Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

III

ФИЗМАТГИЗ · 1960

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ III

Допущено Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для университетов и педагогических институтов



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

§ 5. Интеграл Стилтьеса

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определение и простейшие свойства двойного интеграла

§ 2. Вычисление двойного интеграла

§ 3. Формула Грина

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле

§ 5. Несобственные двойные интегралы

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двусторонние поверхности

§ 2. Площадь кривой поверхности

§ 3. Поверхностные интегралы первого типа

§ 4. Поверхностные интегралы второго типа

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ТРОЙНЫЕ И МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Тройной интеграл и его вычисление

§ 2. Формула Гаусса — Остроградского

§ 3. Замена переменных в тройных интегралах

§ 4. Элементы векторного анализа

§ 5. Многократные интегралы

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

§ 2. Разложение функций в ряд Фурье

§ 3. Дополнения

§ 4. Характер сходимости рядов Фурье

§ 5. Оценка остатка в зависимости от дифференциальных свойств функции

§ 6. Интеграл Фурье

§ 7. Приложения

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ (продолжение)

§ 1. Операции над рядами Фурье. Полнота и замкнутость

§ 2. Применение методов обобщенного суммирования к рядам Фурье

§ 3. Единственность тригонометрического разложения функции

ДОПОЛНЕНИЕ

Общая точка зрения на предел

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

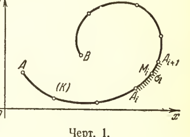
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

§ 1. Криволинейные интегралы первого типа

543. Определение криволинейного интеграла первого типа. Для того чтобы естественным путем придти к этому новому понятию, рассмотрим одну механическую задачу, которая к нему приводит.

Пусть на плоскости дана непрерывная простая * спрямляемая кривая (K) (черт. 1), вдоль которой расположены массы, причем известна их линейная плотность $\rho(M)$ во всех точках M кривой. Требуется определить массу m всей кривой (K).

С этой целью между концами A и B кривой вставим произвольно ряд точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (A_0 и A_n для симметрии обозначений отождествляются с A и B). Мы считаем, что точки эти перенумерованы в направлении от A к B [см. **246**], хотя ничто не мешало бы нам нумеровать их и в обратном направлении.



Черт. 1.

Взяв какую-нибудь точку M_i на дуге A_iA_{i+1} кривой, вычислим плотность $\rho(M_i)$ в этой точке. Приближенно считая, что такова же плотность во всех точках этого участка, и обозначая длину дуги A_iA_{i+1} через σ_i, для массы m_i этой дуги будем иметь приближенное выражение

$$m_i \doteq \rho(M_i)\,\sigma_i,$$

а для всей искомой массы — выражение

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\,\sigma_i.$$

* Ограничимся для определенности случаем незамкнутой кривой.

Погрешность этого последнего, связанная с сделанным выше приближенным допущением, будет стремиться к нулю, если длины σ_i всех участков стремятся к нулю. Таким образом, обозначая через λ наибольшую из длин σ_i, для получения точной формулы остается лишь перейти к пределу:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\, \sigma_i.$$

Станем же изучать вообще пределы этого рода и, отвлекаясь от рассмотренной задачи, возьмем произвольную «функцию точки» $f(M) = f(x, y)$, заданную вдоль непрерывной простой спрямляемой кривой (K)*, и повторим указанный процесс: разбив кривую (K) на элементарные дуги A_iA_{i+1} и выбрав на них произвольно по точке $M_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим значения $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ в них и составим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\, \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\, \sigma_i;$$

она представляет собой также своего рода «интегральную сумму».

Аналогичный процесс может быть применен и в случае **з а м к н у т о й** кривой, если за точку $A_0(A_n)$ выбрать любую ее точку, а остальные точки A_i расположить в соответствии с тем или другим направлением на кривой [**246**].

Если при стремлении $\lambda = \max \sigma$ к нулю интегральная сумма имеет определенный конечный предел I, не зависящий ни от способа дробления кривой (K), ни от выбора точек M_i на участках A_iA_{i+1}, то он называется ***к р и в о л и н е й н ы м   и н т е г р а л о м (п е р в о г о   т и п а****)* *от функции $f(M) = f(x, y)$, взятым по кривой или* ***п о   п у т и*** (K), и обозначается символом

$$I = \int_{(K)} f(M)\, ds = \int_{(K)} f(x, y)\, ds \tag{1}$$

(где s есть длина дуги кривой и ds напоминает об элементарных длинах σ_i). Точную характеристику предельного процесса можно предоставить читателю.

Таким образом, полученное выше выражение для массы материальной кривой может быть переписано так:

$$m = \int_{(K)} \rho(M)\, ds. \tag{2}$$

---

* При этом предполагается, что в основу положена некоторая прямоугольная система координат.

** В отличие от криволинейных интегралов **в т о р о г о   т и п а**, рассматриваемых ниже [**546**].

Отметим особо, что в приведенном определении не играет никакой роли направление, которое может быть придано пути (K). Если, например, эта кривая не замкнута и под (AB) и (BA) разуметь разно направленные кривые, то

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} f(M)\,ds = \int\limits_{(\overset{\smile}{BA})} f(M)\,ds.$$

Аналогично рассмотренному, мы могли бы ввести понятие интеграла, распространенного на пространственную кривую (K):

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = \int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,ds^*.$$

Ввиду отсутствия новых принципиальных моментов нет надобности вдаваться здесь в подробности.

544. Своде́ние к обыкновенному определенному интегралу. Предположим, что на кривой (K) произвольно установлено направление (одно из двух возможных), так что положение точки M на кривой может быть определено длиной дуги $s = \overset{\smile}{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая (K) параметрически выразится уравнениями вида:

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S),$$

а функция $f(x, y)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(x(s), y(s))$ от переменной s.

Если через $s_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ обозначить значения дуги, отвечающие выбранным на кривой точкам деления A_i, то, очевидно, $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$. Обозначив через $\bar{s}_i$ значения s, определяющие точки M_i (причем, очевидно, $s_i \leqslant \bar{s}_i \leqslant s_{i+1}$), видим, что интегральная сумма для криволинейного интеграла

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i),\ y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i$$

является в то же время интегральной суммой для обыкновенного определенного интеграла, так что сразу имеем:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = \text{(R)} \int\limits_0^S f(x(s),\ y(s))\,ds\ ^{**}, \tag{3}$$

причем существование одного из интегралов влечет за собой существование другого.

---

* В основу кладется некоторая прямоугольная система координат. Функция f определена лишь в точках кривой (K).

** Значок (R) указывает, что интеграл понимается здесь в согласии с обыкновенным, *римановым* определением.

Эта непосредственность сведéния криволинейного интеграла первого типа к обыкновенному интегралу, разумеется, понижает его теоретическое значение, но методическое значение он все же сохраняет.

Интеграл, очевидно, существует, например, в случае непрерывности функции $f(M)$*, что мы будем впредь предполагать.

Пусть теперь простая кривая (K) задана произвольными параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

где функции φ и ψ непрерывны со своими производными φ' и ψ'. Тогда кривая заведомо спрямляема, и если возрастание дуги $s=\breve{AM}=s(t)$ отвечает возрастанию параметра t, то

$$s'_t=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[248 (10)]. Заменяя переменную в интеграле (3) справа, сразу получим:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (4)$$

Таким образом, *для вычисления криволинейного интеграла первого типа надлежит заменить в подынтегральной функции переменные x и y выражениями координат через параметр, а множитель ds — дифференциалом дуги, как функции параметра.* Подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла (4) должен быть меньше верхнего.

В случае кривой, заданной явным уравнением

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

формула (4) принимает вид:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds=\int\limits_{a}^{b} f(x,\ y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \qquad (5)$$

Этому соотношению можно придать и другую форму. В предположении непрерывности функции $y(x)$ вместе с ее производной $y'(x)$, кривая (K) в каждой точке будет иметь определенную касательную, не параллельную оси y. Обозначив через α угол касательной с осью x, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=y'(x),\ |\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

* Мы имеем в виду непрерывность в точках кривой (K) вдоль нее. На языке «ε-δ» это означает, что по $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$ при $\overline{MM'}<\delta$ (M и M' — точки кривой). При этом предположении и сложная функция $f(x(s),\ y(s))$, поскольку $x(s)$ и $y(s)$ непрерывны, есть также непрерывная функция от s.

Поэтому

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = \int\limits_a^b \frac{f(x,\ y(x))}{|\cos\alpha|}\,dx. \tag{6}$$

В частности, так как, очевидно,

$$\int\limits_{(K)} ds = S,$$

где через S обозначена длина всей кривой (AB), то

$$S = \int\limits_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

Замечание. Формула (7) получена нами в результате формальных преобразований. Если бы мы определили длину дуги кривой, как предел периметра описанной (а не вписанной) ломаной, то это определение — в случае явного задания кривой — непосредственно привело бы к формуле (7). Предлагаем читателю самому убедиться в этом.

545. Примеры. 1) Вычислить интеграл $I = \int\limits_{(K)} xy\,ds$, если (K) есть четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

Решение. (а) Имеем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2 - x^2}},$$

так что по формуле (5)

$$I = \int\limits_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a^2}\int\limits_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}\cdot x\,dx.$$

Выполняя интегрирование, найдем:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2 - b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Следует заметить, что проведенная выкладка на деле требует еще некоторых оговорок, поскольку при $x = a$ угловой коэффициент касательной обращается в бесконечность. От этого недостатка свободно следующее решение.

(б) Если перейти к параметрическому представлению эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, так что

$$x'_t = -a\sin t,\ y'_t = b\cos t,\ \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},$$

то вычисление можно произвести по формуле (4):

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

Положим здесь $\cos 2t=z$, тогда $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}\,dz$ и

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\,z}\,dz=$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\,z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2) Вычислить интеграл $I=\int\limits_{(K)} y\,ds$, где (K) есть участок параболы $y^2=2px$ от начала координат до точки $(x_0,\ y_0)$.

Решение. Из уравнения кривой имеем $yy'=p$, так что

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx$$

и

$$I=\int_{0}^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right].$$

3) Вычислить интеграл $L=\int\limits_{(A)}(x^2+y^2)\,ds$, где (A) есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(a,\ a)$ и $(b,\ b)$ $(b>a)$.

Указание. Уравнение прямой: $y=x$. *Ответ*: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\,(b^3-a^3)$.

4) Вычислить интеграл $K=\int\limits_{(C)} ye^{-x}\,ds$, где (C) есть участок кривой

$$x=\ln(1+t^2),\quad y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t+3$$

между точками $t=0$ и $t=1$.

Указание: $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=1$,

$$K=\int_{0}^{1}\frac{2\,\mathrm{arctg}\,t-t+3}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}.$$

5) Для большинства постоянно встречающихся кривых (эллипс, гипербола, синусоида, лемниската и пр.) длина дуги не может быть выражена в элементарных функциях, так как ds не интегрируется в конечном виде. Тем не ме-

нее, интеграл $\int\limits_{(K)} f(x, y)\,ds$ и для таких кривых часто может быть вычислен в элементарных функциях [см., например, упр. 1)], так как присоединение множителя $f(x, y)$ меняет всю структуру подинтегрального дифференциала. Предлагаем читателю построить примеры интегралов $\int\limits_{(K)} f(x, y)\,ds$, распространенных на синусоиду $y = \sin x$ или гиперболу $xy = 1$ и выражающихся через элементарные функции.

6) Вычислить интеграл $I = \int\limits_{(C)} xyz\,ds$, где (C) есть дуга кривой

$$x = t,\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\quad z = \frac{1}{2}t^2 \text{ между точками } t = 0 \text{ и } t = 1.$$

Решение: $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = (1 + t)\,dt$,

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1 + t)\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7) Дать формулу для вычисления интеграла $I = \int\limits_{(K)} f(x, y)\,ds$ в случае, когда кривая (K) задана уравнением $r = r(\theta)$ $(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ в полярных координатах.

Ответ. $I = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta.$

8) Вычислить интеграл $H = \int\limits_{(K)} \frac{ds}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, если (K) есть отрезок гиперболической спирали $r\theta = 1$ от $\theta = \sqrt{3}$ до $\theta = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $\frac{19}{3}$.

9) Найти массу участка кривой $y = \ln x$ между точками с абсциссами x_1 и x_2, если (линейная) плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Решение. По формуле (2), так как в нашем случае $\rho = x^2$, имеем:

$$m = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2\,ds. \text{ Но } ds = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\,dx, \text{ так что}$$

$$m = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{3}\left[(1 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

10) Найти массу участка цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ между точками $x = 0$ и $x = a$, если плотность кривой в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки.

Указание. $\rho = \frac{k}{y}$, $ds = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{y}{a}\,dx$, $m = k$.

И другие вопросы, связанные с массами, непрерывно распределенными вдоль материальной кривой, естественным образом приводят к криволинейным интегралам рассмотренного типа.

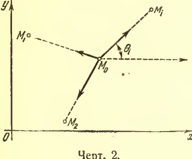
11) Мы уже имели дело в главе X [349] с вычислением статических моментов плоской кривой относительно осей координат, а также координат ее центра тяжести, в предположении, что «линейная плотность» $\rho = 1$. Читатель легко распространит полученные там формулы на общий случай непрерывного распределения масс. Если использовать введенное понятие криволинейного интеграла, то результаты напишутся в следующем виде:

$$M_y = \int\limits_{(K)} \rho x\,ds, \qquad M_x = \int\limits_{(K)} \rho y\,ds,$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_{(K)} \rho x\,ds}{\int\limits_{(K)} \rho\,ds}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int\limits_{(K)} \rho y\,ds}{\int\limits_{(K)} \rho\,ds}.$$

12) Укажем еще одно применение криволинейного интеграла первого типа — к вопросу о притяжении материальной точки материальною же кривою.

Как известно, по закону Ньютона, материальная точка M массы m притягивает материальную точку M_0 массы m_0 с силой, направленной от M_0 к M и численно равной $k \cdot \frac{mm_0}{r^2}$, где r — расстояние M_0M, а k — коэффициент, зависящий от выбора основных единиц измерения; впрочем, для простоты мы будем обычно считать его равным единице.



Черт. 2.

Если точка M_0 притягивается системой точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то результирующая сила, или равнодействующая, получается геометрическим сложением сил притяжения отдельными точками. В то же время проекции результирующей силы на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций отдельных сил.

Если обозначить проекции равнодействующей на оси через X и Y, а угол, составленный вектором $\vec{r}_i = \overrightarrow{M_0M_i}$ с осью x, через θ_i (черт. 2), то, очевидно,

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos\theta_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin\theta_i$$

(где r_i, как обычно, означает длину вектора $\vec{r}_i$).

Пусть теперь притягивающая масса распределена непрерывным образом по кривой (K). Для нахождения притяжения разобьем кривую на участки и, сосредоточив массу каждого участка в произвольно выбранной на нем

точке M_i, найдем приближенные значения проекций равнодействующей на оси:

$$X \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2} \cos\theta_i, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m_0 \rho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2} \sin\theta_i,$$

ибо в этом случае масса отдельного участка приближенно равна $\rho(M_i)\,\sigma_i$. Если устремить все σ_i к нулю, то в пределе получатся точные равенства, причем суммы заменятся интегралами:

$$X = m_0 \int\limits_{(K)} \frac{\rho(M)\,\cos\theta}{r^2}\,ds, \quad Y = m_0 \int\limits_{(K)} \frac{\rho(M)\,\sin\theta}{r^2}\,ds; \tag{8}$$

здесь r означает длину вектора $\vec{r} = \overrightarrow{M_0 M}$, а θ — угол, составленный им с осью x.

13) Найти притяжение, оказываемое однородной полуокружностью (при $\rho = 1$) на единицу массы, помещенную в ее центре.

Решение. Поместим начало координат в центр полуокружности и ось абсцисс проведем через ее концы (черт. 3).

По соображениям симметрии $X = 0$, так что дело приводится к нахождению лишь проекции Y. По формуле (8)

$$Y = \int \frac{\sin\theta}{r^2}\,ds.$$

Черт. 3.

Но в нашем случае $r = R$ (радиус полуокружности) и $ds = R\,d\theta$. Поэтому

$$Y = \frac{1}{R} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{R}.$$

14) Найти притяжение, оказываемое бесконечной однородной прямой ($\rho = 1$) на точку единичной массы ($m_0 = 1$), лежащую на расстоянии h от прямой.

Решение. Рассмотрим искомое притяжение, как предел притяжения, оказываемого конечным отрезком названной прямой при условии, что концы удаляются в разные стороны до бесконечности. Если саму прямую принять за ось x, а ось y провести через заданную точку, то получим (учитывая, что в данном случае $ds = dx$)

$$Y = -h \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2}{h}.$$

Аналогично, $X = 0$ (что, впрочем, ясно из соображений симметрии).

15) Найти притяжение, оказываемое дугой астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первом квадранте, на единицу массы, помещенную в начале координат, если плотность кривой в каждой ее точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат.

Ответ. $X = Y = \frac{3a^2}{5}$.

§ 2. Криволинейные интегралы второго типа

546. Определение криволинейных интегралов второго типа. Переходя к практически более важному понятию криволинейного интеграла второго типа, мы здесь начнем прямо с его определения, отложив приложения этого понятия до дальнейших номеров [см., например, n° **554**]. Пусть дана непрерывная кривая (AB) (которую мы для простоты предположим незамкнутой) и пусть вдоль нее снова задана некоторая функция $f(x, y)$*. Разложив кривую точками $A_i(x_i, y_i)$ на части, выберем на отрезке кривой A_iA_{i+1} по произволу точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим в ней, как и раньше, значение функции $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Но это значение мы умножим на этот раз не на длину дуги A_iA_{i+1}, а на величину проекции этой дуги, скажем, на ось x, т. е. на $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$; затем составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i.$$

Если при стремлении $\mu = \max \overline{A_iA_{i+1}}$ к нулю эта сумма имеет конечный предел I, не зависящий ни от способа дробления кривой, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом (второго типа) от $f(M)\,dx$, взятым по кривой или по пути (AB), и обозначается символом

$$I = \int_{(AB)} f(M)\,dx = \int_{(AB)} f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

Аналогично, умножая значение $f(M_i)$ не на Δx_i, а на Δy_i, т. е. на проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось y, и составляя сумму

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i$$

как предел ее получим *криволинейный интеграл (второго типа) от $f(M)\,dy$*

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)\,dy = \int_{(AB)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Если вдоль кривой (AB) определены две функции $P(M) = P(x, y)$, $Q(M) = Q(x, y)$ и существуют интегралы

$$\int_{(AB)} P(M)\,dx = \int_{(AB)} P(x, y)\,dx, \quad \int_{(AB)} Q(M)\,dy = \int_{(AB)} Q(x, y)\,dy,$$

* См. примечание на стр. 12.

то и их сумму называют криволинейным интегралом («общего вида») и полагают

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{(AB)} P(x,\ y)\,dx+\int\limits_{(AB)} Q(x,\ y)\,dy.$$

Сопоставим теперь определение криволинейного интеграла второго типа (1) [или (2)] с определением криволинейного интеграла первого типа [см. **543** (1)]. При очевидном сходстве оба определения имеют существенное различие: в случае интеграла первого типа при составлении интегральной суммы значение функции $f(M_i)$ *умножается на длину* $\sigma_i=\Delta s_i$ *участка* $\breve{A_iA_{i+1}}$ *кривой*, а в случае интеграла второго типа это значение $f(M_i)$ *умножается на проекцию* Δx_i *(или* Δy_i*) упомянутого участка на ось* x *(или на ось* y*).*

Мы видели, что направление пути (AB), вдоль которого производится интегрирование, не играет роли в случае интеграла первого типа, ибо длина σ_i дуги $\breve{A_iA_{i+1}}$ от этого направления не зависит. Иначе обстоит дело с интегралом второго типа: проекция упомянутой дуги на ту или другую из осей существенно зависит от направления дуги и меняет знак с изменением этого направления на обратное. Таким образом, для интегралов второго типа будет

$$\int\limits_{(BA)} f(x,\ y)\,dx=-\int\limits_{(AB)} f(x,\ y)\,dx$$

и, аналогично,

$$\int\limits_{(BA)} f(x,\ y)\,dy=-\int\limits_{(AB)} f(x,\ y)\,dy,$$

причем из существования интегралов справа уже вытекает существование интегралов слева, и обратно.

Подобным же образом можно ввести понятие криволинейного интеграла второго типа, распространенного на пространственную кривую (AB). Именно, если функция $f(M)=f(x,\ y,\ z)$ задана в точках этой кривой, то, как и выше, строим сумму

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\,\Delta x_i$$

и рассматриваем ее предел при условии стремления к нулю $\mu=\max \breve{A_iA_{i+1}}$. *Этот предел называется криволинейным интегралом (второго типа) от* $f(M)\,dx$ и обозначается символом

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dx=\int\limits_{(AB)} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

Аналогично определяются интегралы вида

$$\int\limits_{(\breve{AB})} f(M)\,dy = \int\limits_{(\breve{AB})} f(x,\ y,\ z)\,dy$$

и

$$\int\limits_{(\breve{AB})} f(M)\,dz = \int\limits_{(\breve{AB})} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Наконец, рассматривается и интеграл («общего вида»)

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(\breve{AB})} P\,dx + \int\limits_{(\breve{AB})} Q\,dy + \int\limits_{(\breve{AB})} R\,dz.$$

Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

Заметим в заключение, что простейшие свойства обыкновенного определенного интеграла [**302, 303**] легко переносятся на рассматриваемый криволинейный интеграл; останавливаться на этом не будем.

547. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго типа. Пусть кривая $(K) = (AB)$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{3}$$

причем функции φ и ψ непрерывны, и при изменении параметра t от α до β кривая описывается именно в направлении от A к B. Функцию $f(x,\ y)$ вдоль кривой (AB) также будем предполагать непрерывной.

Если речь идет об интеграле (1), то дополнительно обусловим еще существование и непрерывность производной $\varphi'(t)$.

При этих предположениях криволинейный интеграл (1) *существует, и имеет место равенство*

$$\int\limits_{(\breve{AB})} f(x,\ y)\,dx = (R)\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\ \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Таким образом, *для вычисления криволинейного интеграла* (1) *надлежит заменить в подинтегральной функции переменные* x *и* y *их выражениями* (3) *через параметр, а множитель* dx — *дифференциалом переменной* x, *как функции от параметра.* Порядок расстановки пределов в последнем интеграле отвечает на этот раз выбранному на кривой направлению.

Переходим к доказательству. Пусть точки $A_i\ (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ $\ldots,\ n)$, взятые на кривой, определяются значениями t_i параметра, а

выбранная на дуге $\widetilde{A_iA_{i+1}}$ точка M_i — значением τ_i (очевидно, лежащим между t_i и t_{i+1}). Тогда интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i,$$

если учесть, что

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\, dt,$$

может быть переписана в виде

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\, dt.$$

С другой стороны, и интеграл в (4) справа* можно представить в виде суммы:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Отсюда

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, предположим теперь все Δt_i настолько малыми, чтобы в промежутках $[t_i, t_{i+1}]$ колебания непрерывной функции $f(\varphi(t), \psi(t))$ были $< \varepsilon$. Так как непрерывная функция $\varphi'(t)$ ограничена $|\varphi'(t)| \leqslant L$, то будем иметь

$$|\sigma - I| < \varepsilon L\, |\beta - \alpha|.$$

Таким образом, при стремлении к 0 величины $\lambda = \max|\Delta t_i|$**,

$$\lim \sigma = I,$$

чем одновременно доказано как существование криволинейного интеграла, так и требуемое равенство.

---

* Самое существование интеграла очевидно ввиду непрерывности подинтегральной функции.

** А это (в случае незамкнутой кривой) равносильно стремлению к 0 наибольшей из хорд [245].

Переходя к интегралу (2), подобным же образом можно установить его существование и доказать формулу

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dy = (R)\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt \tag{5}$$

при условии существования непрерывной производной $\psi'(t)$.

Наконец, если речь идет об интеграле общего вида

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

где P и Q суть непрерывные функции, то на кривую (AB) наложим требование, чтобы обе функции (3) имели непрерывные производные. В этом предположении будет справедлива формула

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt. \tag{6}$$

Определение криволинейного интеграла и указанный здесь способ сведения его к обыкновенному определенному интегралу непосредственно распространяются и на случай кривой (3), которая сама себя пересекает, если только направление на ней по-прежнему определяется монотонным изменением параметра t от α до β.

В заключение укажем некоторые случаи, когда вычисление криволинейного интеграла представляется особенно простым. Пусть интеграл (1) берется по кривой, заданной явным уравнением:

$$y = y(x),$$

причем перемещение точки из A и B происходит при изменении x от a до b. Тогда без каких-либо предположений о кривой, кроме ее непрерывности, имеем

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx = (R)\int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\,dx. \tag{7}$$

Аналогично, если интеграл (2) распространяется на непрерывную кривую, заданную явным же уравнением, но другого типа:

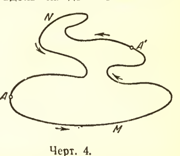
$$x = x(y)$$

(где y изменяется от c до d), то

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dy = (R)\int\limits_{c}^{d} f(x(y), y)\,dy. \tag{8}$$

Наконец, если интеграл (1) распространяется на прямолинейный отрезок (AB), параллельный оси y, то он равен 0 (ибо в этом случае равны 0 все Δx_i, а с ними и все суммы σ). Аналогично равен 0 и интеграл (2), взятый по прямолинейному отрезку, параллельному оси x.

Если путь интегрирования (K) распадается на конечное число примыкающих одна к другой кривых и вдоль каждой из них в отдельности криволинейный интеграл существует и вычисляется по одной из указанных формул, то, как легко показать, существует интеграл вдоль всей кривой (K) и равен сумме интегралов по ее частям.



Черт. 4.

548. Случай замкнутого контура. Ориентация плоскости. Обратимся к рассмотрению замкнутого контура (K), т. е. к случаю, когда начало A и конец B пути интегрирования совпадают. Взяв на кривой отличную от A точку C, полагают по определению, с учетом выбранного на кривой направления (на черт. 4 оно указано стрелкой):

$$\int\limits_{(K)} = \int\limits_{(AMC)} + \int\limits_{(CNA)}$$

в предположении, что интегралы справа существуют.

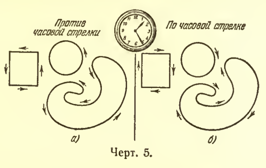
Легко показать, что существование и величина интеграла не зависят от выбора точек A и C. Кроме того, и для замкнутого контура (K) оказываются применимыми формулы (4), (5) и (6), выведенные в предыдущем номере.

Замечание. Впрочем, можно и здесь криволинейный интеграл получить в результате предельного перехода (как и в случае незамкнутой кривой), но ограничив предельный переход, например, требованием, чтобы две наперед фиксированные точки A, A' неизменно входили в состав точек деления. Ничем не ограниченный предельный переход при $\max \overline{A_iA_{i+1}} \to 0$ здесь к цели не привел бы [ср. **330**].

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки на этот раз не определяет направления, в котором описывается кривая (K). Можно было бы в каждом случае указывать особо, какое именно направление имеется в виду. Так и приходится делать, если речь идет о пространственной кривой. В случае же плоского замкнутого контура (K) обыкновенно поступают иначе.

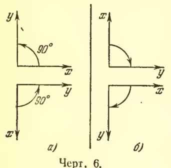
Из двух возможных для данной плоскости направлений вращения — «против часовой стрелки» и «по часовой стрелке» — одно выбирается за положительное: этим создается определенная *ориента-*

ция плоскости. Если положительным считается вращение против часовой стрелки, то ориентация плоскости называется п р а в о й, в другом же случае — левой.



Черт. 5.

В случае правой ориентации плоскости мы именно вращение п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и положим в основу определения п о л о ж и т е л ь н о г о н а п р а в л е н и я на простом замкнутом контуре (черт. 5, *а*). Правда, это определение имеет достаточно ясный характер лишь для контуров, близких к окружности. Поэтому мы условимся более точно так: п о л о ж и т е л ь н ы м н а п р а в л е н и е м обхода (простого) замкнутого контура называется то, при котором ближайшая к наблюдателю часть области, ограниченной контуром, оказывается лежащей с л е в а от наблюдателя (черт. 5, *а*). В случае левой ориентации плоскости п о л о ж и т е л ь н ы м будет обход контура п о ч а с о в о й с т р е л к е, так что область остается с п р а в а от наблюдателя (черт. 5, *б*).



Черт. 6.

Заметим, что самое расположение координатных осей на плоскости всегда ставится в связь с ее ориентацией: ось y получается из оси x поворотом ее на 90° п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и при правой ориентации плоскости и п о ч а с о в о й с т р е л к е — при левой (см. черт. 6, *а*, *б*). В первом случае сама координатная система называется п р а в о й, а во втором — л е в о й.

После этих пояснений заключим раз навсегда такое соглашение: *если путь интегрирования (K) есть простая замкнутая кривая, то под символом*

$$\int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$$

при отсутствии указаний на направление обхода контура *разумеется интеграл, взятый в п о л о ж и т е л ь н о м направлении.* Конечно,

это соглашение не мешает нам рассматривать в случае надобности и интеграл, взятый в отрицательном направлении, но обозначать его мы будем через

$$-\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy.$$

549. Примеры. 1) Найти интеграл $I = \int_{(K)} (x^2 - y^2)\,dx$, если (K) есть отрезок параболы $y = x^2$ от точки с абсциссой $x = 0$ до точки с абсциссой $x = 2$.

Решение. Так как кривая интегрирования задана явным уравнением, то применим формулу (7); мы получим

$$I = \int_0^2 (x^2 - x^4)\,dx = -\frac{56}{15}.$$

2) Найти интеграл $J = \int_{(K)} (x^2 - y^2) dy$, где (K) означает ту же кривую, что и выше.

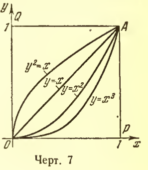
Решение. Здесь следует воспользоваться формулой (8). Заметив, что из уравнения кривой $x^2 = y$ и что пределы изменения y суть 0 и 4, будем иметь

$$J = \int_0^4 (y - y^2)\,dy = -\frac{40}{3}.$$

3) Вычислить значение криволинейного интеграла

$$H = \int_{(L)} 2xy\,dx + x^2 dy,$$

взятого по пути (L), соединяющему точки O (0, 0) и A (1, 1), если путь (L) есть: (а) прямая $y = x$, (б) парабола $y = x^2$, (в) парабола $x = y^2$, (г) кубическая парабола $y = x^3$ (черт. 7).



Черт. 7

Решение. (а) Так как $dy = dx$, то $\int_{(L)} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 3x^2\,dx = 1$;

(б) $dy = 2x\,dx$, $H = \int_0^1 4x^3\,dx = 1$;

(в) $dx = 2y\,dy$, $H = \int_0^1 5y^4 dy = 1$;

(г) $dy = 3x^2\,dx$, $H = \int_0^1 5x^4\,dx = 1$.

4) Вычислить криволинейный интеграл

$$G = \int_{(L)} xy\,dx + (y - x)\,dy$$

при тех же путях интегрирования.

Ответ. (а) $\frac{1}{3}$, (б) $\frac{1}{12}$, (в) $\frac{17}{30}$, (г) $-\frac{1}{20}$.

5) Найти криволинейный интеграл

$$I = \int_{(OA)} (x - y^2)\,dx + 2\,xy\,dy,$$

если в качестве пути интегрирования берется одна из следующих линий, соединяющих точки $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$ (см. черт. 7): (а) прямолинейный отрезок $OA\,(y = x)$; (б) ломаная OPA, состоящая из отрезка OP оси $x\,(y = 0)$ и отрезка PA прямой $x = 1$; (в) ломаная OQA, состоящая из отрезка OQ оси $y\,(x = 0)$ и отрезка QA прямой $y = 1$.

Решение. (а) Так как $y = x$ и $dy = dx$, то

$$I = \int_0^1 (x + x^2)\,dx = \frac{5}{6}.$$

(б) В этом случае естественно разбить путь интегрирования на два отрезка:

$$I = \int_{(OPA)} = \int_{(OP)} + \int_{(PA)} = I_1 + I_2.$$

Вдоль OP имеем: $y = 0$ и $dy = 0$, так что

$$I_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Вдоль PA будет: $x = 1$ и $dx = 0$, поэтому

$$I_2 = \int_0^1 2y\,dy = 1.$$

Таким образом, окончательно $I = \frac{3}{2}$.

(в) Аналогично предыдущему найдем (так как интеграл вдоль отрезка OQ равен нулю):

$$I = \int_{(QA)} = \int_0^1 (x - 1)\,dx = -\frac{1}{2}.$$

6) То же для интеграла

$$J = \int_{(OA)} (y^2 + 2xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy.$$

Ответ. Во всех случаях $J = 2$.

Замечание. Читатель, вероятно, уже обратил внимание на различие между результатами упражнений 3) и 6), с одной стороны, и 4) и 5) — с другой. Величины интегралов, рассмотренных в 3) и 6), оказались не зависящими от линии, соединяющей начальную и конечную точки. Напротив, в примерах 4), 5) мы столкнулись с интегралами, значения которых зависят от того, какой линией соединены начальная и конечная точки. Ниже [§ 3] мы займемся этим вопросом специально и выясним его важность.

7) Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_{(C)} (x^2+2xy)\,dy,$$

где (C) означает верхнюю половину эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемую против часовой стрелки.

Решение. Воспользуемся параметрическим представлением эллипса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; t изменяется здесь от 0 до π. Подставляя вместо x и y их выражения через t и заменяя dy через $b\cos t\,dt$, получим [по формуле (5)]

$$I=\int\limits_0^\pi (a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)\,b\cos t\,dt=$$

$$=a^2b\int\limits_0^\pi \cos^3 t\,dt+2ab^2\int\limits_0^\pi \cos^2 t\sin t\,dt=\frac{4}{3}ab^2.$$

8) Вычислить интеграл

$$K=\int\limits_{(L)} y^2\,dx-x^2\,dy,$$

где (L) есть окружность радиуса 1 с центром (а) в начале координат или (б) в точке $(1, 1)$.

Решение. (а) Исходя из параметрических уравнений $x=\cos t$, $y=\sin t$, где t меняется от 0 до 2π, по формуле (5) будем иметь

$$K=-\int\limits_0^{2\pi} (\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=0.$$

Аналогично с помощью параметрического представления

$$x-1=\cos t,\quad y-1=\sin t$$

получим

$$K=-\int\limits_0^{2\pi} (2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=-4\pi.$$

9) Найти значение интеграла

$$J=\int\limits_{(K)} \frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\qquad (A,\ C \text{ и } AC-B^2>0),$$

где (K) есть окружность $x^2+y^2=r^2$.

Указание. Ср. 339, 14). *Ответ.* $\dfrac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

10) Вычислить интеграл

$$L=\int_{(A)}\frac{x\,dx}{y}+\frac{dy}{y-a},$$

если (A) есть отрезок циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

от точки $t=\frac{\pi}{6}$ до точки $t=\frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[a(t-\sin t)-\frac{\sin t}{\cos t}\right]dt=a\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 3.$$

11) Вычислить интеграл

$$I=\int_{(K)}\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}},$$

если (K) есть часть астроиды

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$

от точки $A(a,\ 0)$ до точки $B(0,\ a)$.

Решение.

$$I=3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}.$$

550. Приближение с помощью интеграла, взятого по ломаной. Во многих случаях, имея дело с криволинейным интегралом, представляется удобным приблизиться к нему с помощью интеграла, взятого по ломаной. Такое приближение основывается на следующем предложении, которое нам не раз будет полезно.

Кривая (L), которая в нем упоминается, предполагается простой и незамкнутой. Она задается уравнениями вида (3), где функции φ и ψ непрерывны вместе со своими производными; этим обеспечивается существование криволинейного интеграла в написанном ниже равенстве [547], а также спрямляемость самой кривой (L) [248].

Лемма. *Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в открытой области (E), а (L) — содержащаяся в ней кривая указанного класса. Если вписать в (L) ломаную (Λ), то при стремлении к нулю наибольшей из ее сторон будем иметь*

$$\lim\int_{(\Lambda)}P\,dx+Q\,dy=\int_{(L)}P\,dx+Q\,dy.$$

Достаточно остановиться на интегралах $\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx$ и $\int\limits_{(L)} P\,dx$; для интегралов $\int\limits_{(\Lambda)} Q\,dy$ и $\int\limits_{(L)} Q\,dy$ рассуждения вполне аналогичны. Пусть вписанная в (L) ломаная (Λ) имеет вершины в точках

$$A \equiv A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_i,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n \equiv B;$$

обозначим через x_i, P_i значения x, P в точке A_i. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, можно звенья $\overline{A_iA_{i+1}}$ представить себе настолько малыми, чтобы 1) колебание непрерывной функции P вдоль звена $\overline{A_iA_{i+1}}$ было $< \varepsilon$ и 2) интегральная сумма $\sum\limits_i P_i \Delta x_i$ отличалась от своего предела $\int\limits_{(L)} P\,dx$ тоже меньше, чем на ε.

Имеем, очевидно,

$$\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx = \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} P\,dx\,]$$

и, с другой стороны,

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} P_i\,dx,$$

так что

$$\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} [P - P_i]\,dx.$$

Но первое слагаемое справа разнится от интеграла $\int\limits_{(L)} P\,dx$ меньше, чем на ε [см. 2)], а второе по абсолютной величине не превосходит $\varepsilon \sum\limits_i \overline{A_iA_{i+1}}$ [см. 1)], т. е. и подавно $< L \cdot \varepsilon$, где L — длина кривой (L).

Итак, окончательно,

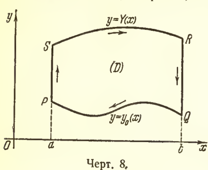
$$\left| \int\limits_{(\Lambda)} P\,dx - \int\limits_{(L)} P\,dx \right| < \varepsilon(1 + L),$$

что и доказывает наше утверждение.

Замечание. Доказанное утверждение *в некотором смысле* может быть распространено и на случай замкнутой простой кривой (L), если разложить ее на две незамкнутые кривые и к каждой из последних в отдельности применить лемму. *Предельный переход здесь ограничен* требованием, чтобы в числе точек деления были две наперед фиксированные точки [ср. замечание в п° **548**].

551. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов. Покажем теперь, как с помощью криволинейных интегралов (второго типа) можно вычислять площади плоских фигур.

Рассмотрим сначала (черт. 8) фигуру $(D) = PQRS$, ограниченную отрезками PS и QR прямых, параллельных оси y (они в частных случаях могут стягиваться и в точку), и двумя кривыми PQ и SR, которые любой параллелью к оси y пересекаются каждая только в одной точке. Пусть явные уравнения кривых (PQ) и (SR) будут



Черт. 8.

$$(PQ):\quad y = y_0(x),$$
$$(SR):\quad y = Y(x),$$

причем x изменяется в промежутке $[a, b]$.

Рассматривая площадь D «криволинейной трапеции» $PQRS$ как разность площадей двух «криволинейных трапеций» $abRS$ и $abQP$, можем написать

$$D = \int_a^b Y(x)\,dx - \int_a^b y_0(x)\,dx.$$

С другой стороны, по формуле (7)

$$\int_{(PQ)} y\,dx = \int_a^b y_0(x)\,dx, \qquad \int_{(SR)} y\,dx = \int_a^b Y(x)\,dx.$$

Поэтому

$$D = \int_{(SR)} y\,dx + \int_{(QP)} y\,dx;$$

мы изменили знак перед вторым интегралом, но зато изменили и направление интегрирования. Если прибавить к правой части равенства интегралы

$$\int_{(PS)} y\,dx \quad \text{и} \quad \int_{(RQ)} y\,dx,$$

равные нулю (так как они взяты по отрезкам, параллельным оси y), то равенство не нарушится. В результате получим

$$D = \int_{(PSRQP)} y\,dx,$$

причем контур пробегается в порядке букв, указанных под символом интеграла.

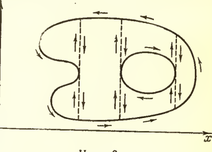
Если обозначить контур области (D) через (L), то символ $\int\limits_{(L)} y\,dx$ по заключенному в n° **548** условию будет означать интеграл, взятый в положительном направлении. При правой ориентации осей, которая принята на черт. 8, это будет направление обхода, оставляющее область слева, в то время как направление $PSRQP$ оставляет эту область справа. Поэтому

$$\int\limits_{(PSRQP)} y\,dx = -\int\limits_{(L)} y\,dx$$

и, следовательно,

$$D = -\int\limits_{(L)} y\,dx. \tag{9}$$

Предположим теперь, что хотя фигура (D) ограничена контуром более сложного вида (который может даже состоять из нескольких отдельных кривых), но эту фигуру прямыми, параллельными оси y, можно разложить на конечное число частей рассмотренного типа (черт. 9). Каждая из этих частей будет иметь площадь, выражающуюся по формуле (9). Сложив все эти равенства, мы получим слева площадь всей фигуры (D), а справа сумму интегралов, распространенных на все частичные контуры. Эти интегралы, однако, приводятся к одному, взятому по общему контуру (L), ибо интегралы по каждому из вспомогательных отрезков равны нулю. Таким образом, и в этом случае площадь D выражается по формуле (9).



Черт. 9.

Для фигуры $PQRS$ (черт. 10), ограниченной прямолинейными отрезками PQ и SR, параллельными оси x, и двумя кривыми

$$(PS):\quad x = x_0(y)$$
$$(QR):\quad x = X(y) \qquad (c \leqslant y \leqslant d),$$

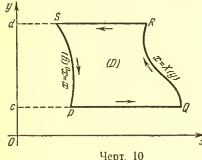
с помощью сходных рассуждений получается формула

$$D = \int\limits_{(L)} x\,dy. \tag{10}$$

Впрочем, она может быть выведена и непосредственно из формулы (9), если обменять ролями оси x и y. Знак при этом придется изменить именно потому, что, несмотря на изменение ролей координатных осей, положительное направление обхода все же осталось прежним.

Легко понять, что, формула (10) будет справедлива и для более сложной фигуры, которая прямыми, параллельными оси x, разлагается на конечное число «криволинейных трапеций» второго типа.

Полученный результат на деле имеет уже вполне достаточную общность. Однако проверка в конкретных случаях возможности разложить предложенную фигуру на части упомянутых специальных типов представляется обременительной. Поэтому мы укажем и другое — тоже весьма общее, но легко проверяемое условие, при котором оказываются приложимыми одновременно обе формулы (9) и (10).



Черт. 10

Именно, предположим, что область (D) ограничена произвольной к у с о ч н о - г л а д к о й кривой (L)*. Так как эта область квадрируема [337], то можно построить входящую и выходящую многоугольные области (A) и (B) так, чтобы было

$$A < D < B, \quad B - A < \varepsilon,$$

где ε — наперед заданное положительное число [335]. При этом можно предположить также, что контуры всех этих областей попарно не имеют общих точек. Обозначим через δ наименьшее расстояние между точками различных контуров [336, сноска на стр. 191 второго тома]. Если вписать в (L) ломаную (Λ) так, чтобы ее звенья все были $< \delta$, то эта ломаная уже не может иметь общих точек с контурами многоугольников (A) и (B), так что ограниченный ею многоугольник (Δ) содержит в себе (A) и сам содержится внутри (B). Отсюда

$$|\Delta - D| < \varepsilon,$$

так что $\Delta \to D$ при стремлении к нулю наибольшего из звеньев вписанной ломаной.

Теперь нетрудно убедиться, что к вычислению площади Δ многоугольника приложимы как формула (9), так и формула (10), т. е.

$$\Delta = -\int\limits_{(\Lambda)} y\,dx = \int\limits_{(\Lambda)} x\,dy$$

(ибо прямыми, параллельными оси y или оси x, легко разложить этот многоугольник на трапеции того или другого типа). Если, опираясь на лемму предыдущего n° (см. замечания), перейти здесь к пределу, то и получим окончательно: *площадь фигуры* (D), *ограниченной кусочно-гладкой кривой, выражается любой из названных формул.*

* Напомним, что к у с о ч н о - г л а д к о й называется кривая, состоящая из нескольких гладких дуг [см. том II, стр. 193; ср. том I, стр. 595].

Чаще всего, впрочем, для вычисления площади применяется другая, более симметричная, формула:

$$D=\frac{1}{2}\int\limits_{(L)} x\,dy-y\,dx, \tag{11}$$

которая легко получается из формул (9) и (10) [ср. 339 (16)].

Замечание. Легко убедиться, что и наличие на кривой конечного числа особых точек не мешает на деле справедливости выведенных формул. Если выделить эти точки с помощью их окрестностей, то к остающейся части фигуры формулы приложимы. Затем нужно лишь перейти к пределу, предполагая диаметры упомянутых окрестностей стремящимися к нулю.

552. Примеры. 1) Найти площадь эллипса с полуосями a и b.

Решение. Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса: $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. По формуле (11)

$$D=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\,dt-b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt=\pi ab.$$

Для вычисления криволинейного интеграла мы применили формулу (6); при расстановке пределов интегрирования было принято во внимание, что положительный обход контура отвечает возрастанию параметра.

2) Найти площадь астроиды

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$
$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Ответ.

$$D=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

3) Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой эпициклоиды

$$x=a\,[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)\,t],$$
$$y=a\,[(1+m)\ \sin mt-m\sin(1+m)\,t]$$

Черт. 11.

и соответствующей дугой круга (черт. 11).

Решение. Интеграл (11) нужно взять сначала по кривой (ABC), а затем по кривой (CDA). В первом случае мы можем воспользоваться написанными выше уравнениями, изменяя t от 0 до 2π. Тогда

$$x\,dy-y\,dx=a^2m\,(1+m)\,(1+2m)\,(1-\cos t)\,dt,$$

так что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(ABC)}=\pi a^2m\,(1+m)\,(1+2m).$$

Что же касается дуги круга $(\overset{\frown}{CDA})$, то, сохраняя тот же параметр, ее можно выразить уравнениями

$$x = a\cos mt,$$
$$y = a\sin mt,$$

изменяя t на этот раз от 2π до 0. Соответствующий интеграл будет

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(\overset{\frown}{CDA})} = \frac{1}{2}a^2m\int\limits_{2\pi}^{0} dt = -\pi a^2 m.$$

Итак, искомая площадь равна

$$D = \pi a^2 m^2 (2m + 3).$$

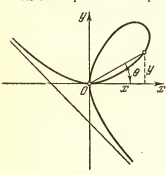
4) Найти площадь петли декартова листа (черт. 12)

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Решение. Для получения параметрических уравнений контура положим $y = tx$ *. Тогда (ср. том первый, стр. 508)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Из геометрических соображений ясно, что петля описывается при изменении параметра t от 0 до ∞ $\left(\text{ибо } t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta, \text{ где } \theta \text{ изменяется от 0 до } \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем



Черт. 12.

$$dx = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt,$$
$$dy = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt$$

и

$$D = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

Отметим, что здесь мы использовали несобственный интеграл с бесконечным пределом, в то время как при выводе формулы (6) мы считали, что промежуток изменения параметра конечен. Оправдать сделанное легко, если предварительно ввести другой параметр с конечным промежутком изменения (например, угол θ), а затем уже перейти к параметру $t = \frac{y}{x}$.

5) То же для кривой:

(а) $(x+y)^4 = ax^2y$, (б) $(x+y)^{2n+1} = ax^ny^n$ (n — натуральное).

Указание. Ввести $t = \frac{y}{x}$, меняя t от 0 до ∞. В случае (б)

$$x\,dy - y\,dx = a^2\frac{t^{2n}}{(1+t)^{4n+2}}dt.$$

---

* Такая подстановка оказывается удобной, как правило, в тех случаях, когда в уравнении алгебраической кривой имеются две однородные группы членов, причем степени этих групп различаются на единицу.

При интегрировании разложение на простые дроби можно получить, исходя из тождества

$$t^{2n} = [(1+t)-1]^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k (1+t)^k.$$

Ответ. (а) $D = \frac{a^2}{210}$; (б) $D = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{C_{2n}^k}{4n-k+1}$.

6) Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2.$$

Ответ. $D = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

7) В качестве примера применения общей формулы (10) для вычисления площадей плоских фигур любой формы * остановимся в заключение на такой задаче.

Пусть основанием некоторого тела служат две произвольного вида фигуры, лежащие в двух параллельных плоскостях, а боковая поверхность его является линейчатой и образована прямыми, соединяющими по произвольному закону точки контуров упомянутых фигур (черт. 13). Доказать, что объем V тела выражается формулой

$$V = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2), \quad (12)$$

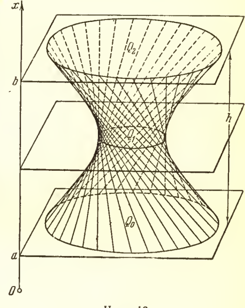
где h означает высоту тела, а Q_0, Q_1 и Q_2 суть площади его оснований и среднего сечения.

Мы знаем, что объем V по площади $Q = Q(x)$ поперечных сечений выражается формулой

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

[см. 342]. С другой стороны, формула Симпсона:

$$\int_a^b Q(x)\,dx = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2),$$



Черт. 13.

если $Q(x)$ есть многочлен степени не выше третьей, является точной [см. сноску на стр. 164 второго тома]. На деле, как мы увидим, $Q(x)$ представляет собой многочлен второй степени.

Пусть

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta \quad (13)$$

* С соблюдением, конечно, высказанных условий, о которых для простоты мы здесь уже не будем упоминать.

будут уравнения образующей той линейчатой поверхности, которая ограничивает наше тело. При этом можно предположить, что коэффициенты α, β, γ, δ являются функциями от некоторого параметра t, при изменении которого (скажем, от t_0 до T) образующая и описывает поверхность. Если теперь пересечь поверхность плоскостью, параллельной плоскости yz, на расстоянии x от нее, то в сечении получится кривая, проекция которой (без искажения!) на плоскость yz как раз и будет иметь уравнения (13) своими параметрическими уравнениями. Предположим, что при изменении t от t_0 до T контуры всех сечений описываются (соответствующими точками образующей) в положительном направлении. Тогда площадь сечения, например, по формуле, аналогичной (10), выразится так:

$$Q(x) = \int\limits_{(K_x)} y\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} (\alpha x + \beta)\,d(\gamma x + \delta) =$$

$$= x^2 \cdot \int\limits_{t_0}^{T} \alpha\,d\gamma + x \cdot \int\limits_{t_0}^{T} (\alpha\,d\delta + \beta\,d\gamma) + \int\limits_{t_0}^{T} \beta\,d\delta,$$

т. е. действительно представится квадратным трехчленом от x.

Легко показать, что формула, аналогичная формуле (12), применима и к вычислению статического момента нашего тела относительно плоскости yz. Этот момент выражается интегралом

$$M_{yz} = \int\limits_a^b xQ(x)\,dx$$

[356, 1)], и здесь подинтегральная функция будет полиномом третьей степени.

553. Связь между криволинейными интегралами обоих типов. Рассмотрим гладкую кривую $(K) \equiv (AB)$ и, выбрав в качестве параметра дугу $s = \breve{AM}$, представим ее уравнениями

$$x = x(s); \quad y = y(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant S).$$

Функции $x(s)$, $y(s)$ будут иметь непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$. Если через α обозначить угол, составленный с осью x касательной, направленной в сторону возрастания дуг, то, как известно [249 (15)],

$$\cos\alpha = x'(s), \quad \sin\alpha = y'(s).$$

Если вдоль кривой (K) задана непрерывная функция $f(M) = f(x, y)$, то последовательно имеем

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,dx = \int\limits_0^S f(x(s), y(s))\,x'(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^S f(x(s), y(s))\cos\alpha\,ds = \int\limits_{(K)} f(M)\cos\alpha\,ds,$$

и криволинейный интеграл второго типа оказался сведенным к криволинейному интегралу первого типа.

Аналогично получается

$$\int_{(K)} f(M)\,dy = \int_{(K)} f(M)\sin\alpha\,ds.$$

Если же заданы две непрерывные вдоль кривой (K) функции $P(M) = P(x, y)$ и $Q(M) = Q(x, y)$, то

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds. \tag{14}$$

Подчеркнем, что во всех этих формулах угол α связан с тем направлением касательной, которое отвечает направлению самой кривой (K). Если изменить направление кривой, то не только интеграл слева изменит знак: ввиду изменения направления касательной угол α изменится на $\pm\pi$, в связи с чем изменит знак и интеграл справа.

Очевидно, выведенные формулы остаются справедливыми и для кусочно-гладкой кривой без кратных и особых точек; в этом легко убедиться, если написать их для каждого из гладких кусков кривой и почленно сложить.

В виде упражнения предложим себе преобразовать формулу (11) для площади к криволинейному интегралу первого типа:

$$D = \frac{1}{2}\int_{(K)} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{(K)} (x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,ds.$$

Если перейти к полярным координатам r, θ, то получим, далее,

$$D = \frac{1}{2}\int_{(K)} r(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)\,ds = \frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(\alpha - \theta)\,ds.$$

Заметив, что $\alpha - \theta$ есть угол (r, t) между радиусом-вектором точки и касательной в ней, можно придать формуле такой окончательный вид:

$$D = \frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(r, t)\,ds.$$

Аналогичные соображения можно развить и для криволинейных интегралов по пространственной кривой. В результате получится формула

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(K)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть направляющие косинусы касательной, в предположении, что ее направление отвечает направлению пути интегрирования.

Для случая плоской кривой иногда удобна формула, связывающая криволинейные интегралы обоих типов и содержащая угол между

осью x и нормалью к кривой, на которую распространены интегралы. Если приписать нормали такое направление, чтобы угол $\sphericalangle(t, n)$ между касательной и нормалью был равен $+\frac{\pi}{2}$ *, так что

$$\sphericalangle(x, n) = \sphericalangle(x, t) + \sphericalangle(t, n) = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

то

$$\cos\alpha = \sin(x, n),$$
$$\sin\alpha = -\cos(x, n).$$

Тогда, например, формула (14) может быть написана в виде

$$\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(K)} [P\sin(x, n) - Q\cos(x, n)]\,ds. \qquad (15)$$

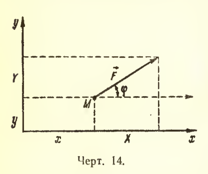
554. Физические задачи. Остановимся в заключение на нескольких физических задачах, в которых криволинейные интегралы находят себе применение.

1) *Работа силового поля.* Пусть в каждой точке M плоскости xy (или определенной части плоскости) на помещенную в нее единицу массы действует определенная сила $\vec{F}$, ***величина и направление которой зависят только от положения точки*** M; если масса m помещенной в точке M материальной точки отлична от единицы, то действующая на нее сила будет равна $m\vec{F}$. При этих условиях плоскость (или рассматриваемая ее часть) называется (*плоским*) *силовым полем*, а сила $\vec{F}$, действующая на единицу массы, — *напряжением поля*. Задание силы $\vec{F}$ по величине и направлению равносильно заданию ее проекций X, Y на оси, очевидно, являющихся функциями от координат x, y точки M:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y).$$

Если обозначить через φ угол, составленный вектором $\vec{F}$ с осью x, то (черт. 14)

$$X = F\cos\varphi, \quad Y = F\sin\varphi. \qquad (16)$$



Черт. 14.

Предположим теперь, что материальная точка M с единичной массой, находящаяся в поле, движется и описывает некоторую непрерывную кривую (K) ***в определенном направлении.*** Задача состоит в вычислении работы A, которую при этом движении совершают силы поля.

Если бы действующая на точку сила сохраняла постоянную величину F и постоянное направление, а само перемещение точки происходило прямолинейно, то, как известно, работа A выразилась бы произведением перемещения l на проекцию силы на направление перемещения:

$$A = Fl\cos\theta,$$

где θ — угол между силой $\vec{F}$ и направлением перемещения.

---

* Направление отсчета углов должно быть согласовано с ориентацией плоскости!

В случае непрямолинейного движения и непостоянной силы работа определяется с помощью некоторого предельного процесса. Можно, впрочем, прибегнуть для краткости к привычному в приложениях «методу суммирования бесконечно малых» [ср. 348]. Станем определять положение точки M на кривой (K) (черт. 15) длиной s дуги $\breve{AM}$. Рассмотрим бесконечно малый элемент $MN = ds$ кривой и будем приближенно считать, что сила $\vec{F}$ и угол θ на перемещении ds сохраняют свою величину. Тогда соответствующий элемент работы будет

$$dA = F\cos\theta\, ds.$$

Теперь остается лишь «просуммировать» эти элементы вдоль всей кривой (K), в результате чего работа A выразится криволинейным интегралом первого типа:

$$A = \int_{(K)} F\cos\theta\, ds. \qquad (17)$$

Черт. 15.

Введем угол α между направлением элемента ds (т. е. направлением касательной к кривой в точке M) и осью x. Очевидно, $\theta = \varphi - \alpha$, так что

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha,$$

и элемент интеграла пишется так: $(F\cos\varphi\cdot\cos\alpha + F\sin\varphi\cdot\sin\alpha)\,ds$ или, ввиду (16):

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\,ds.$$

Само выражение (17) для работы примет вид:

$$A = \int_{(K)} (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\,ds.$$

Если теперь учесть формулу (14), устанавливающую связь между криволинейными интегралами обоих типов, то, окончательно, работа силового поля выразится криволинейным интегралом второго типа:

$$A = \int_{(K)} X\,dx + Y\,dy. \qquad (18)$$

Это и есть наиболее употребительное выражение для работы, удобное для исследования ряда важных, связанных с нею вопросов: зависит ли произведенная работа от формы траектории, соединяющей данные две точки; будет ли работа по замкнутой траектории всегда равна нулю (об этом см. ниже п°п° 555—562).

2) *Плоское установившееся течение несжимаемой жидкости.* Такое движение характеризуется тем, что, во-первых, все частицы, лежащие на одной вертикали к некоторой плоскости, имеют одну и ту же скорость, параллельную этой плоскости, так что для характеристики всего движения достаточно изучить движение в одной лишь плоскости*, и, во-вторых, скорость $\vec{c}$ частицы жидкости зависит только от положения частицы, но не от времени. Таким образом, с каждой геометрической точкой рассматриваемой плоскости (или ее части) свя-

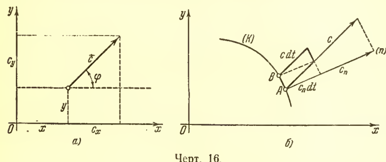
* Которую мы и выберем за плоскость xy.

зана определенная по величине и направлению скорость; иными словами, задано некоторое «поле скорости».

Если обозначить угол, составленный вектором $\vec{c}$ с осью x, через φ, а проекции этого вектора на координатные оси (слагающие скорости по осям) через u и v, то (черт. 16, *а*)

$$u = c_x = c\cos\varphi,$$
$$v = c_y = c\sin\varphi.$$

Возьмем теперь в плоскости xy какую-нибудь кривую (K) и постараемся определить количество Q жидкости, протекающей через нее в *определенную от нее сторону* в единицу времени. Предполагая жидкость несжимаемой, можно количество жидкости измерять площадью закрытой ею фигуры.



Черт. 16.

Если фактически жидкость течет в сторону, противоположную выбранной, то количество протекающей жидкости будем считать отрицательным.

Рассмотрим элемент $ds = AB$ кривой (K). За время dt через этот элемент протечет количество жидкости, равное

$$c_n\,ds\,dt, \tag{19}$$

где c_n есть проекция скорости $\vec{c}$ на нормаль $\vec{n}$ к элементу ds, *направленную в выбранную сторону от кривой*. Действительно, это количество равно площади параллелограмма со сторонами ds и $c\cdot dt$, высотой которого как раз и является произведение $c_n dt$ (черт. 16, *б*). Для подсчета количества жидкости, протекающей через элемент ds в единицу времени, суммируем выражения (19) по элементам dt, что дает $c_n\,ds$. Суммируя же найденные выражения по всем элементам кривой (K), мы представим искомое количество Q жидкости в виде криволинейного интеграла *первого типа*

$$Q = \int\limits_{(K)} c_n ds. \tag{20}$$

Если угол между осью x и нормалью к кривой есть (x, n), то угол между нормалью и скоростью $\vec{c}$ будет

$$(n,\ c) = (x,\ c) - (x,\ n) = \varphi - (x,\ n);$$

поэтому

$$c_n = c\cos(n,\ c) = c\,[\cos\varphi\cos(x, n) + \sin\varphi\sin(x,\ n)] = u\cos(x,\ n) + v\sin(x,\ n),$$

и выражение (20) принимает вид

$$Q = \int\limits_{(K)} [u\cos(x,\ n) + v\sin(x,\ n)]\,ds. \tag{21}$$

Теперь, согласно формуле (15) п° **553**, этот интеграл можно представить и в форме криволинейного интеграла второго типа:

$$Q = \int_{(K)} v\,dx - u\,dy, \tag{22}$$

причем важно подчеркнуть, что направление на этой кривой должно быть взято так, чтобы угол между соответствующим направлением касательной и выбранным заранее направлением нормали был равен $+\frac{\pi}{2}$ [ибо именно в этом предположении и выведена была формула (15)].

Если (K) есть замкнутый контур и интеграл (22) считать взятым (как обычно, **548**) в положительном направлении, то нормаль в формуле (22) должна была бы быть направлена внутрь области, ограниченной контуром (K) (чтобы было соблюдено упомянутое только что условие). Следовательно, в этом случае формула (22) дает количество жидкости, протекающей через контур (K) в единицу времени внутрь области. Если желаем получить количество жидкости, вытекающей наружу из области, ограниченной контуром (K), то следует лишь в формуле (22) изменить знак.

Далее, если поле не имеет ни «источников», ни «стоков» жидкости, то в любой ограниченной области количество жидкости остается постоянным. Поэтому, какую бы замкнутую кривую ни взять, интеграл (22), взятый по ней, должен быть равен нулю.

Итак, *если u и v суть слагающие скорости в плоском установившемся течении несжимаемой жидкости, то при отсутствии источников и стоков*

$$\int_{(K)} v\,dx - u\,dy = 0,$$

каков бы ни был замкнутый контур (K).

Впоследствии [**566**, 2)] мы увидим, что этот результат, полученный с помощью физических соображений, позволяет дать и некоторую аналитическую характеристику функций u и v.

3) *Тепло, поглощенное газом*. Рассмотрим некоторую массу, например 1 *моль* газа. Состояние газа характеризуется тремя величинами: его объемом V, давлением p и абсолютной температурой T. Если считать газ идеальным, то эти три величины оказываются связанными между собой уравнением Клапейрона:

$$pV = RT,$$

где R есть постоянная. Таким образом, любая из величин p, V и T может быть выражена через две другие. Поэтому для определения состояния газа достаточно знать две из этих величин. Пусть это будут, например, V и p. Тогда точка с абсциссой V и ординатой p служит изображением состояния газа. Если состояние газа меняется от начального состояния, отвечающего точке A, до конечного состояния, определяемого точкой B, то весь процесс изменения характеризуется кривой $(K) \equiv (AB)$, устанавливающей последовательность непрерывно меняющихся состояний *.

* И здесь, и впредь мы имеем в виду так называемые квазистационарные процессы, т. е. представляем изменение состояния газа происходящим настолько медленно и сопровождающимся настолько хорошим перемешиванием, что вся масса газа одновременно проходит через всякое промежуточное состояние.

Поставим теперь себе задачу установить, какое количество тепла U *(кал)* поглощается данной массой газа во время всего этого процесса, характеризуемого кривой (K). С этой целью, как обычно, рассмотрим некоторый «бесконечно малый» элементарный процесс, переводящий газ из состояния (V, p, T) в бесконечно близкое состояние $(V+dV,\ p+dp,\ T+dT)$. Ему отвечает элемент кривой (K) (черт. 17). Определение того элементарного количества тепла dU, которое при этом ему было сообщено, мы однажды уже произвели [при выводе формулы Пуассона, **361**, 3)]. Воспользуемся полученным там выражением:

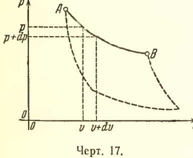
$$dU = \frac{c_v}{R}\, V\,dp + \frac{c_p}{R}\, p\,dV.$$

Для того чтобы найти общее количество тепла U, сообщенное газу в течение всего процесса его изменения, характеризуемого кривой (K), остается лишь «просуммировать» элементы dU вдоль этой кривой:

$$U = \int\limits_{(K)} \frac{c_v}{R}\, V dp + \frac{c_p}{R}\, p dV. \qquad (23)$$

Итак, количество тепла U непосредственно выражается криволинейным интегралом второго типа.

Если бы мы выражали элементарное приращение тепла dU не через dV и dp, а через dV и dT, или через dp и dT, то и тогда дело свелось бы к криволинейному интегралу, который, однако, пришлось бы брать по кривой, лежащей, соответственно, в плоскости VT или pT.



Черт. 17.

4) *Действие тока на магнит.* Закон Био и Савара, характеризующий действие тока на магнит, имеет «дифференциальную» форму. Согласно этому закону, элемент ds проводника, по которому идет ток силы I, действует на отстоящую от него на расстояние r «магнитную массу» m с силой, величина которой равна

$$\frac{Im\ \sin\varphi\, ds}{r^2}, \qquad (24)$$

где φ $(0 < \varphi < \pi)$ есть угол между вектором $\overrightarrow{r}$, соединяющим магнитный полюс с элементом тока, и направленным в сторону течения тока элементом $\overrightarrow{ds}$ проводника. Направление же этой элементарной силы перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{ds}$, и идет в ту сторону, с которой вращение от $\overrightarrow{r}$ к $\overrightarrow{ds}$ на угол φ кажется происходящим против часовой стрелки. [Ср. **356**, 8).]

Поставим себе задачей охарактеризовать магнитное поле тока, идущего по конечному замкнутому проводнику (K) произвольной формы и произвольно расположенному в пространстве; иными словами, установить силу, с которой весь этот проводник в целом действует на «магнитную массу» m, помещенную в любой точке M пространства. Получение закона Био и Савара в «интегральной» форме затрудняется, однако, тем обстоятельством, что отдельные элементарные силы, о которых была речь выше, по-разному направлены и складывать их надо геометрически.

В подобном случае обычно переходят к проекциям векторов на оси какой-либо прямоугольной системы координат в пространстве, ибо проекции элементарных сил складываются уже алгебраически.

Для упрощения выкладок используем аппарат векторной алгебры. Если переписать выражение (24) для величины элементарной силы $\overrightarrow{dF}$ в виде

$$\frac{mI}{r^3} \cdot r\,ds\,\sin\varphi,$$

то легко заметить, что оно лишь множителем $\frac{mI}{r^3}$ отличается от величины векторного произведения $\vec{r} \times \overrightarrow{ds}$. Так как и направление $\overrightarrow{dF}$, определяемое законом Био и Савара, совпадает с направлением этого произведения, то можно написать

$$\overrightarrow{dF} = \frac{mI}{r^3}(\vec{r} \times \overrightarrow{ds}).$$

Рассмотрим теперь произвольную (правую) прямоугольную координатную систему $Oxyz$. Если через x, y, z обозначить координаты (начальной точки) элемента ds, а через ξ, η, ζ — координаты рассматриваемой точки M пространства, то проекциями вектора $\vec{r}$ на оси будут

$$x-\xi, \quad y-\eta, \quad z-\zeta;$$

вектор же $\overrightarrow{ds}$ имеет проекции

$$dx, \quad dy, \quad dz.$$

В таком случае проекциями $\overrightarrow{dF}$ будут произведения множителя $\frac{mI}{r^3}$, соответственно, на

$$(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy, \quad (z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz,$$
$$(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx.$$

Таким образом, суммируя по всем элементам кривой (K), окончательно получим выражения для проекций искомой силы $\vec{F}$ на оси в виде криволинейных интегралов по пространственной кривой (K):

$$F_x = mI\int\limits_{(K)} \frac{(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy}{r^3},$$

$$F_y = mI\int\limits_{(K)} \frac{(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz}{r^3},$$

$$F_z = mI\int\limits_{(K)} \frac{(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx}{r^3},$$

причем направление на кривой определяется направлением течения тока. Это и дает решение нашей задачи.

§ 3. Условия независимости криволинейного интеграла от пути

555. Постановка задачи, связь с вопросом о точном дифференциале. Пусть в некоторой связной области (D) заданы две непрерывные функции

$$P = P(x, y) \quad \text{и} \quad Q = Q(x, y).$$

Рассмотрим криволинейный интеграл второго типа

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy. \tag{1}$$

Здесь A и B — какие-нибудь две точки из области (D), а (AB) — произвольная соединяющая их кусочно-гладкая * кривая, которая целиком лежит в этой области.

Основная задача настоящего параграфа состоит в выяснении *условий, при которых величина этого интеграла оказывается не зависящей от формы пути* (AB), т. е. однозначно определяется начальной и конечной точками A и B, где бы эти точки не лежали.

Поведение интеграла (1) определяется свойствами дифференциального выражения

$$P\,dx + Q\,dy, \tag{2}$$

стоящего под знаком интеграла. Напомним, что мы уже имели дело с подобного рода выражением, когда речь шла о дифференцируемой функции $F(x, y)$ от двух переменных и о (полном) дифференциале ее [**179**]

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy, \tag{3}$$

которое отождествляется с выражением (2) при

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Однако далеко не каждое выражение вида (2) есть «точный дифференциал», т. е. не для каждого такого выражения существует «первообразная функция» $F(x, y)$, для которой это выражение служит (полным) дифференциалом. И вот оказывается, что интеграл (1) не зависит от пути именно в тех случаях, когда его подинтегральное выражение есть точный дифференциал! Сформулируем это фундаментальной важности утверждение в виде теоремы, доказательству которой будут посвящены ближайшие два п°:

Теорема 1. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (1) *не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальное выражение* (2) *было в рассматриваемой области дифференциалом от некоторой* (*однозначной* **) *функции двух переменных.*

556. Дифференцирование интеграла, не зависящего от пути. Допустим сначала, что интеграл (1) не зависит от пути.

* Мы ограничимся в этом параграфе рассмотрением только таких путей интегрирования; этим заведомо обеспечивается существование интеграла (1).

** Читателю впоследствии [562] станет ясной необходимость подчеркивания однозначности первообразной функции.

В этом случае интеграл однозначно определяется заданием точек $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, в связи с чем его обозначают символом

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy \quad \text{или} \quad \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P\,dx + Q\,dy.$$

Здесь указаны только начало и конец пути интегрирования; сам путь не указан, но он безразличен — можно интегрировать по любому. Конечно, без сделанного предположения о независимости от пути такое обозначение не имело бы определенного смысла.

Если точку $A(x_0, y_0)$ фиксировать, а точку B заменить произвольной точкой $M(x, y)$ области (D), то полученный интеграл представит собой некоторую ф у н к ц и ю о т т о ч к и M, т. е. от ее координат x, y, в области (D):

$$F(x, y) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P\,dx + Q\,dy. \quad (4)$$

Займемся теперь вопросом об ее частных производных как по x, так и по y.

Взяв произвольную точку $B(x_1, y_1)$ в области (D), придадим x_1 приращение Δx и перейдем к точке $C(x_1 + \Delta x, y_1)$, которая при достаточно малом Δx будет также принадлежать (D) в м е с т е с о в с е м о т р е з к о м BC (черт. 18). Соответствующие значения функции будут

Черт. 18.

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P\,dx + Q\,dy,$$

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1 + \Delta x,\, y_1)} P\,dx + Q\,dy.$$

Первый из этих интегралов мы возьмем по произвольной кривой (K), соединяющей точки A и B, а для второго интеграла путь интегрирования составим из этой же кривой (K) и из прямолинейного отрезка BC. Таким образом, приращение функции F будет

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(BC)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(BC)} P(x, y)\,dx;$$

интеграл, содержащий $Q\,dy$, обращается в нуль, так как отрезок BC перпендикулярен к оси y.

Оставшийся интеграл непосредственно приводится к обыкновенному определенному интегралу: для этого в подинтегральной функции нужно заменить y на y_1 (из уравнения $y=y_1$ прямой BC) и в качестве пределов интегрирования по x взять абсциссы точек B и C. Окончательно

$$F(x_1+\Delta x, y_1)-F(x_1, y_1)=(R)\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)\,dx.$$

Применяя к полученному обыкновенному интегралу теорему о среднем и деля обе части равенства на Δx, найдем

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1)-F(x_1, y_1)}{\Delta x}=P(x_1+\theta\Delta x, y_1) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

Устремим теперь Δx к нулю. В силу непрерывности функции $P(x, y)$, правая часть равенства, а с нею и левая, стремятся к $P(x_1 y_1)$. Следовательно, в точке (x_1, y_1) частная производная функции F по x существует и выражается равенством

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x}=P(x_1, y_1).$$

Аналогично устанавливается и формула

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y}=Q(x_1, y_1).$$

Так как точка (x_1, y_1) была взята произвольно внутри области (D), то для всех точек этой области будем иметь

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}=P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}=Q(x, y).$$

Поскольку эти частные производные непрерывны, *функция $F(x, y)$ имеет дифференциал:*

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy,$$

совпадающий с подинтегральным выражением для интеграла (1) [**179**]*.

Таким образом, для криволинейного интеграла, не зависящего от пути, нам удалось установить результат, вполне аналогичный теореме о дифференцировании обыкновенного определенного интеграла по переменному верхнему пределу [**305**, 12°].

Вместе с тем доказана необходимость условия, сформулированного в теореме предыдущего n°. Если интеграл (1) не

* Отсюда, между прочим, вытекает и непрерывность самой функции $F(x, y)$ по обеим переменным.

зависит от пути, то выражение (2) действительно будет точным дифференциалом: сам интеграл (4) при сделанном предположении и дает нам однозначную первообразную функцию для подинтегрального выражения!

557. Вычисление криволинейного интеграла через первообразную. Предположим теперь, обратно, что выражение (2) представляет собой (полный) дифференциал от некоторой однозначной функции $\Phi(x, y)$, так что

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{5}$$

Рассмотрим какую-нибудь кусочно-гладкую кривую (K), соединяющую две данные точки: A с координатами x_A, y_A и B с координатами x_B, y_B. Пусть параметрическое представление ее будет

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

и при изменении параметра от α до β кривая описывается в направлении от A к B. Таким образом,

$$\varphi(\alpha) = x_A, \quad \psi(\alpha) = y_A; \quad \varphi(\beta) = x_B, \quad \psi(\beta) = y_B.$$

Вычисляя теперь криволинейный интеграл вдоль кривой (K) путем сведения его к обыкновенному интегралу [по формуле (6) n° 547], получим

$$I = \int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{ P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t) \}\,dt$$

или, принимая во внимание (5),

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \psi'(t) \right\} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \Phi(\varphi(t), \psi(t))\,dt$$

— по правилу дифференцирования сложной функции.

Окончательно

$$I = \Phi(\varphi(t), \psi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) =$$

$$= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A).$$

Итак, при наличии первообразной функции

$$\Phi(M) = \Phi(x, y)$$

криволинейный интеграл вычисляется по простой формуле:

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A) = \left.\Phi(x, y)\right|_{(x_A,\, y_A)}^{(x_B,\, y_B)} \tag{6}$$

или, короче,

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \Phi(B) - \Phi(A) = \left.\Phi(M)\right|_A^B. \tag{6*}$$

Эта формула вполне аналогична основной формуле интегрального исчисления [308], выражающей обыкновенный определенный интеграл через первообразную. Подчеркнем, однако, еще раз, что она приложима только к таким интегралам, для которых подинтегральное выражение есть точный дифференциал.

Одновременно эта формула показывает, что в *рассматриваемом случае интеграл* (1) *не зависит от выбора кривой* AB*, чем устанавливается и *достаточность* условия, указанного в теореме n° **555**. Таким образом, эта теорема теперь полностью доказана.

558. Признак точного дифференциала и нахождение первообразной в случае прямоугольной области. Теперь естественно возникает вопрос о том, по какому признаку можно установить, является ли предложенное дифференциальное выражение (2) точным дифференциалом или нет. Ответ на этот вопрос позволит окончательно выяснить и условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Для того чтобы получить признак в простой и удобной для проверки форме, мы впредь будем дополнительно предполагать, что *в рассматриваемой области* (D) *существуют и непрерывны обе частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

При этом предположении искомый признак получается сразу. *Если* выражение (2) есть дифференциал некоторой функции $\Phi(x, y)$, так что имеют место равенства (5):

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x}.$$

---

* Ибо, именно ввиду *однозначности* функции Φ, ее значения $\Phi(A)$ и $\Phi(B)$ вполне определяются заданием точек A и B.

Предположенная непрерывность частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ обеспечивает равенство двух смешанных производных **[190]**, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

Таким образом, это замечательное по простоте соотношение оказывается необходимым условием для того, чтобы выражение (2) было точным дифференциалом.

Обращаясь к исследованию достаточности условия (А), мы ограничимся сначала случаем, когда область (D) представляет собой прямоугольник; пусть, для определенности, это будет конечный замкнутый прямоугольник $[a, b; c, d]$. В предположении, что выполняется условие (А), мы непосредственно дадим для этого случая построение первообразной.

Задача состоит в том, чтобы определить в прямоугольнике $[a, b; c, d]$ функцию $\Phi(x, y)$, которая удовлетворяла бы двум уравнениям:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y). \tag{5*}$$

Действительно, ввиду непрерывности функций P и Q отсюда уже следовало бы, что выражение (2) является для упомянутой функции полным дифференциалом [179].

Взяв любые значения x_0 и x в $[a, b]$, проинтегрируем первое из уравнений (5*) по x от x_0 до x при любом фиксированном значении y из $[c, d]$; мы найдем

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \Phi(x_0, y).$$

Если теперь во втором из уравнений (5*) положить $x = x_0$ и проинтегрировать его по y между любыми значениями y_0 и y из $[c, d]$, то получится, что

$$\Phi(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \Phi(x_0, y_0).$$

Таким образом, искомая функция $\Phi(x, y)$ необходимо имеет вид:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C, \tag{7}$$

где $C = \Phi(x_0, y_0) = \text{const}$.

Остается теперь проверить, что функция, определяемая формулой (7) (какова бы ни была постоянная C), в действительности удовлетво-

ряет обоим уравнениям (5*). Относительно первого это очевидно, ибо производная по x первого слагаемого в (7) справа равна $P(x, y)$ [305], а последние два слагаемых не зависят от x. Продифференцируем теперь равенство (7) по y, причем к первому интегралу справа применим правило Лейбница [507]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x_0, y).$$

В силу (А), вместо $\frac{\partial P}{\partial y}$ можно сюда подставить $\frac{\partial Q}{\partial x}$; тогда интеграл сведется к разности $Q(x, y) - Q(x_0, y)$, а производная $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ окажется равной просто $Q(x, y)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если бы мы начали с интегрирования по y, то пришли бы к такому выражению для искомой первообразной:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy + C, \tag{8}$$

лишь по форме отличающемуся от прежнего.

Полезно дать себе отчет в том, что, фиксируя значение первообразной в какой-нибудь точке области, мы тем самым выбираем постоянную в общем выражении первообразной и получаем уже вполне определенную и однозначную первообразную.

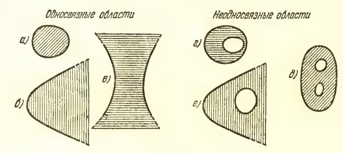
559. Обобщение на случай произвольной области. Рассмотрим теперь произвольную (конечно, связную) область (D), ограниченную одной или несколькими кусочно-гладкими кривыми и при этом конечную или простирающуюся в бесконечность. Эту область мы впредь будем предполагать открытой. В таком случае каждая ее точка является внутренней [163] и принадлежит ей вместе с некоторой, скажем, прямоугольной окрестностью. Так как к последней приложимы рассуждения предыдущего n°, то при выполнении условия (А) в окрестности каждой точки области (D) для выражения (2) существует первообразная и даже бесконечное множество первообразных, разнящихся одна от другой на постоянную. Однако согласование всех этих первообразных так, чтобы получилась однозначная первообразная для всей области (D), оказывается не всегда возможным! Вопрос здесь зависит от характера самой области.

Чтобы обеспечить существование такой однозначной первообразной в общем случае, приходится наложить на область (D) своеобразное ограничение. Его можно сформулировать так: *какой бы простой замкнутый контур, лежащий в области (D), ни взять, ограниченная извне этим контуром область должна также целиком принадлежать области (D).* Иными словами, область не должна со-

держать «дырок», даже точечных. Связную область, обладающую этим свойством, называют *односвязной*.

Если речь идет о конечной области (т. е. не простирающейся в бесконечность), то понятие односвязности можно сформулировать еще проще: *область должна быть ограничена единственным замкнутым контуром*. На черт. 19 представлены примеры односвязных и неодносвязных областей, из них а), г), д) конечны, а б), в), е) простираются в бесконечность.

Пусть же рассматриваемая область (D) будет односвязной; сначала мы предположим ее конечной, так что она попросту ограничена единственной кусочно-гладкой кривой (K). Построение первообразной для области (D) мы будем производить постепенно, исходя



Черт. 19.

из содержащихся в (D) областей, разлагающихся на прямоугольники.

Задавшись произвольно малым числом $\varepsilon > 0$, мы можем каждую точку M контура (K) окружить таким квадратом со стороной $< \varepsilon$, чтобы в его пределах контур выражался явным уравнением одного из двух типов [ср. 223]; лишь в угловой точке мы будем иметь стык двух подобных кривых.

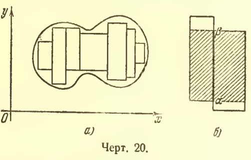
По лемме Бореля [175], можно, сохранив лишь конечное число этих квадратов, покрыть ими весь контур (K). Этой конечной цепью квадратов извне ограничивается некоторая замкнутая область $(\tilde{D})$, целиком лежащая в (D) и очевидным образом разлагающаяся на прямоугольники. Она будет связной*, а тогда уже и односвязной вместе с (D); ей заведомо будут принадлежать все точки области (D), отстоящие от контура на расстояние $\geqslant \varepsilon$.

---

* Если две точки M_0 и M_1 принадлежат $(\tilde{D})$, то их можно соединить ломаной (L), целиком лежащей в $(\tilde{D})$ [163]. Эта ломаная, вообще говоря, может и выходить за пределы $(\tilde{D})$, попадая внутрь каких-либо из упомянутых в тексте квадратов. Но часть ломаной, содержащаяся в таком квадрате, всегда может быть заменена соответствующей частью его обвода. Таким путем и получается соединяющая точки M_0 и M_1 ломаная $(\tilde{L})$, целиком лежащая в $(\tilde{D})$.

Мы покажем ниже, как строится первообразная для области $(\tilde{D})$. Чтобы иметь дело с определенной первообразной, мы фиксируем ее значение в какой-нибудь точке M_0, принадлежащей $(\tilde{D})$. Заметим, что *две первообразные, определенные для двух налегающих одна на другую областей, в общей их части могут разниться лишь на постоянную* (так как их разность имеет нулевые частные производные, **183**). Следовательно, если эти первообразные совпадают хоть в одной точке, то они тождественны во всей упомянутой общей части. Отсюда ясно, что, устремляя ε к нулю, мы, действительно, постепенно распространим определение первообразной на всю область (D) с сохранением ее однозначности.

Чтобы построить первообразную для области $(\tilde{D})$, мы представим себе эту область разложенной на прямоугольники, которые примы-



Черт. 20.

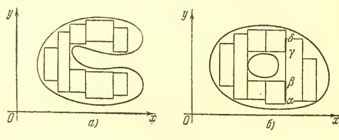
кают один к другому по вертикальному отрезку (черт. 20, *а*). Два таких смежных прямоугольника d_1 и d_2 изображены на черт. 20, *б*. В каждом из них мы умеем строить первообразные, пусть это будут Φ_1 и Φ_2. Вдоль отрезка $\alpha\beta$, общего прямоугольникам d_1 и d_2, они могут разниться лишь на постоянную; это становится ясным, если вспомнить, что каждая из них разнится вдоль $\alpha\beta$ разве лишь постоянным слагаемым от какой-либо первообразной, построенной для заштрихованного прямоугольника, которая существует в силу предыдущего n°. Изменяя одну из первообразных, Φ_1 или Φ_2, на надлежащую постоянную, можно, следовательно, добиться их совпадения вдоль отрезка $\alpha\beta$.

Начнем с построения первообразной для того из прямоугольников, где лежит точка M_0, причем озаботимся, чтобы в этой точке первообразная имела именно наперед фиксированное значение. Затем построим первообразные для примыкающих к нему прямоугольников, так, чтобы переход через их общие границы не нарушал непрерывности, и т. д.

Постараемся теперь уяснить себе, в чем же сказывается условие односвязности области (D), а с нею и $(\tilde{D})$. Ряд прямоугольников на черт. 20, *а* при замысловатости контура (K) может и раз-

ветвиться, как на черт. 21, *а*: это не помешает непрерывному распространению первообразной вдоль отделенных друг от друга отрогов. Но если область имеет «дырку» (см. черт. 21, *б*) и два ответвления вновь смыкаются, то для первого замыкающего прямоугольника выбор первообразной с сохранением непрерывности перехода на обоих стыках $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ сразу — может оказаться невозможным!

Случай области (D), простирающейся в бесконечность, исчерпывается аналогично, исходя из конечных подобластей, с постепенным распространением первообразной на всю область (D).



Черт. 21.

560. Окончательные результаты. Все сказанное в двух предшествующих nn° может быть суммировано в виде следующего предложения:

Теорема 2. *Для того чтобы во всей области* (D) *выражение* (2) *было дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных, необходимо, а в предположении односвязности области* (D) *и достаточно, выполнение условия* (A).

В связи с этим условие (A) часто называют «условием интегрируемости» выражения (2).

Если вспомнить теперь теорему 1, то непосредственно получается и следующая заключительная

Теорема 3. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (1), *где бы в области* (D) *ни были взяты начальная и конечная точки* A *и* B *пути интегрирования, не зависел от формы этого пути, необходимо, а в предположении односвязности области* (D) *и достаточно, выполнение условия* (A).

Таким образом, мы нашли, наконец, в условии (A) удобный и легко проверяемый критерий независимости криволинейного интеграла от пути. С помощью этого критерия, например, легко расклассифицировать интегралы, предложенные в задачах 3), 4), 5), 6) n° **549**, и предвидеть их особенности, указанные в замечании.

Ниже мы встретим важные приложения полученных результатов. К особенностям случая неодносвязной области мы вернемся в n° **562**.

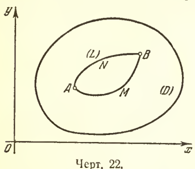
561. Интегралы по замкнутому контуру. До сих пор мы рассматривали криволинейный интеграл (1)

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy$$

и изучали тот важный класс случаев, когда этот интеграл не зависит от пути интегрирования. Обратимся теперь к рассмотрению интеграла

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy, \tag{9}$$

взятого по любому простому замкнутому контуру (L) в пределах области (D), и поставим вопрос об условиях, при которых этот интеграл всегда обращается в нуль. Оказывается, что этот вопрос совершенно эквивалентен вопросу, решенному выше: если при данном дифференциальном выражении (2) интеграл (1) не зависит от пути, то интеграл (9) всегда равен нулю, и обратно.



Черт. 22.

Действительно, предположим сначала независимость интеграла (1) от пути. Если (L) есть любой простой замкнутый контур в области (D) (черт. 22), то произвольно взятыми на нем точками A и B разложим его на части (AMB) и (ANB). Так как интегралы по этим кривым должны быть равны:

$$\int\limits_{(AMB)} = \int\limits_{(ANB)}, \tag{10}$$

то отсюда

$$\int\limits_{(L)} = \int\limits_{(AMB)} + \int\limits_{(BNA)} = \int\limits_{(AMB)} - \int\limits_{(ANB)} = 0. \tag{11}$$

Пусть теперь, обратно, дано, что интеграл (9) по простому замкнутому контуру всегда равен нулю. Взяв две точки A и B, соединим их двумя путями (AMB) и (ANB); из них составится замкнутый контур

$$(L) = (AMBNA).$$

Легким будет случай, когда линии (AMB) и (ANB), кроме точек A и B, общих точек не имеют; тогда контур (L) сам себя не пересекает, т. е. оказывается простым.

Если же кривые (AMB) и (ANB) взаимно пересекаются, то замкнутая кривая (L) уже не будет простой.

Однако, как показывает следующая лемма, можно все же ограничиться рассмотрением интегралов по простым (т. е. не пересекающим себя) замкнутым контурам.

Лемма. *Если интеграл* (9) *равен нулю, по какому бы простому (т. е. не пересекающему себя) замкнутому контуру его ни взять, то он будет нулем и при всяком замкнутом контуре, хотя бы и самопересекающемся.*

В силу леммы, установленной в n° **550**, достаточно доказать это утверждение для любой замкнутой ломаной, хотя бы и самопересекающейся. Пусть (L) и будет такая ломаная, определенным образом направленная. Исходя из некоторой ее точки M_0 и следуя направлению ломаной, опишем часть ломаной до первого самопересечения — в точке M_1. Отбросив получившуюся замкнутую ломаную (L_1), продолжим путь M_0M_1 до нового самопересечения, что позволит выделить еще одну замкнутую ломаную (L_2), и т. д. После конечного числа шагов ломаная (L) окажется распавшейся на конечное число не пересекающих себя замкнутых ломаных

$$(L_1),\ (L_2), \ldots,$$

вдоль по которым интеграл заведомо нуль. Значит, он равен нулю и вдоль ломаной (L), что и требовалось доказать.

Таким образом, нами доказана полезная

Теорема 4. *Для того чтобы криволинейный интеграл* (1) *не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы интеграл* (9) *по любому замкнутому контуру был равен нулю. При этом условие остается достаточным и в том случае, если ограничиться лишь простыми (т. е. не пересекающими себя) замкнутыми контурами.*

Теперь ясно, что об обращении в нуль интеграла (9) по замкнутому пути можно судить с помощью того же критерия, который в теореме 3 был установлен для независимости интеграла (1) от пути:

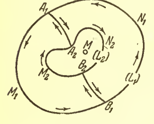
Теорема 5. *Для того чтобы интеграл* (9), *по какому бы замкнутому контуру в пределах области* (D) *его ни взять, обращался в нуль, необходимо, а в случае односвязности области* (D) *и достаточно выполнение условия* (A). *Это условие остается необходимым и в том случае, если ограничиться лишь простыми (т. е. не пересекающими себя) замкнутыми контурами.*

Ниже [**601**], располагая более развитым аппаратом (двойные интегралы, формула Грина), мы вернемся к вопросам, рассмотренным в настоящем параграфе, и некоторые из установленных здесь результатов получим вновь и притом более экономным образом.

562. Случай неодносвязной области или наличия особых точек. Вся теория, развитая в настоящем параграфе и связанная с использованием условия интегрируемости (A), основана на предположении, что 1) рассматриваемая область (D) односвязна, т. е. лишена «дырок», и 2) функ-

ции P и Q вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области (D) непрерывны. Если эти условия нарушены, то высказанные выше утверждения, вообще говоря, перестают быть верными. Разобраться в представляющихся при этом особенностях и составляет цель этого n°.

Отметим, что «особые» точки, в которых нарушены условия непрерывности 2), тоже могут трактоваться, если их выключить из области, как своего рода точечные «дырки». Таким образом, вопрос сводится к рассмотрению области (D), в которой выполнены все требования непрерывности и условие (А), но зато имеется одна или несколько «дырок», точечных или нет. Впрочем, для определенности в дальнейшем изложении мы предпочтем ограничиться именно случаем точечных «дырок», т. е. особых точек. Общий случай трактуется совершенно аналогично.



Черт. 23.

Предположим сначала, что область (D) содержит одну особую точку M (но не имеет других «дырок»). Возьмем в этой области простой замкнутый контур (L) и рассмотрим интеграл (9)

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy.$$

Если этот контур не охватывает особой точки, то интеграл по-прежнему равен нулю. Если же точка M лежит внутри контура (L), то интеграл может оказаться и отличным от нуля.

Весьма замечательно, однако, что *все интегралы, взятые в положительном направлении [548] по всевозможным контурам указанного типа, окружающим точку M, равны между собой.*

В самом деле, рассмотрим два кусочно-гладких контура (L_1) и (L_2), окружающих точку M. Можно считать их взаимно не пересекающимися, ибо в противном случае мы ввели бы третий контур (L_3), охватывающий оба контура (L_1), (L_2) и не пересекающий их, и рассмотрели бы отдельно пары контуров (L_1), (L_3) и (L_2), (L_3).

Кривые (L_1) и (L_2) вместе составляют контур кольцеобразной области (Δ), заключенной между ними (черт. 23). С помощью двух разрезов (A_1A_2) и (B_1B_2) разобьем эту область на две уже односвязные части (Δ') и (Δ''). Тогда мы имеем право писать:

$$\int_{(A_1M_1B_1)} + \int_{(B_1B_2)} + \int_{(B_2M_2A_2)} + \int_{(A_2A_1)} = 0$$

и

$$\int_{(B_1N_1A_1)} + \int_{(A_1A_2)} + \int_{(A_2N_2B_2)} + \int_{(B_2B_1)} = 0.$$

При складывании интегралы, взятые по разрезам в противоположных направлениях, взаимно уничтожатся, и мы получим

$$\int\limits_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} + \int\limits_{(A_2N_2B_2M_2A_2)} = 0,$$

откуда, наконец,

$$\int\limits_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} = \int\limits_{(A_2M_2B_2N_2A_2)} \quad \text{или} \quad \int\limits_{(L_1)} = \int\limits_{(L_2)},$$

причем последние интегралы берутся оба в положительном направлении. Наше утверждение доказано.

Обозначим общее значение всех подобных интегралов через σ; его называют *циклической постоянной*, отвечающей особой точке M *.

Покажем теперь, что если (L) — любой замкнутый контур в области (D), хотя бы и пересекающий себя, но не проходящий через особую точку M, то

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = n\sigma, \tag{12}$$

где n есть целое число (положительное, отрицательное или нуль). Это очевидно для многоугольного контура, так как он распадается на конечное число не пересекающих себя замкнутых многоугольных контуров, вдоль каждого из которых интеграл равен нулю или $\pm\sigma$. В общем же случае мы снова воспользуемся леммой, установленной в n° 550 (и замечанием к ней), и прибегнем к предельному переходу, исходя из вписанной в кривую ломаной. Так как выражение вида $n\sigma$ (при $\sigma \neq 0$ и целом n) может стремиться к конечному пределу лишь того же вида (с тем, что число n в конце концов перестает изменяться), то формула (12) оказывается верной для любого контура (L).

Перейдем теперь к рассмотрению интеграла по кривой, соединяющей точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ области (D), но не проходящей через особую точку. Если $(AB)_0$ есть одна из таких кривых, а (AB) — любая другая, то (AB) и $(BA)_0$ вместе составят замкнутый контур, так что, в силу (12),

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(BA)_0} P\,dx + Q\,dy = n\sigma,$$

откуда

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(AB)_0} P\,dx + Q\,dy + n\sigma.$$

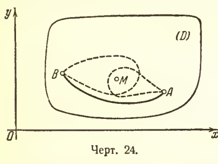
* Совершенно так же определяется и циклическая постоянная, отвечающая настоящей — неточечной — «дырке».

Здесь интеграл реально зависит от пути интегрирования, но лишь в смысле прибавления целого кратного циклической постоянной σ. Присоединяя к кривой $(AB)_0$ то или иное число петель, окружающих точку M (черт. 24), можно добиться того, чтобы множитель n принял любое наперед выбранное целое значение.

Иными словами, в рассматриваемом случае символ

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

при заданных A и B уже не является (если $\sigma \neq 0$) однозначным; он определен с точностью до слагаемого вида $n\sigma$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Черт. 24.

Если точку B заменить переменной точкой $M(x, y)$, то *интеграл*

$$F(x,\ y) = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx + Q\,dy$$

по-прежнему представит первообразную функцию для выражения $P\,dx + Q\,dy$, непрерывную (исключая, конечно, точку M), *но многозначную*.

Важно дать себе отчет в существенном отличии рассматриваемого случая от изученного выше [556, 558, 559]. И там можно было бы говорить о «многозначности» первообразной, поскольку последняя содержала в своем выражении произвольную постоянную. Однако стоило лишь фиксировать эту постоянную, чтобы получить однозначную функцию во всей рассматриваемой области; никакой принудительной связи между отдельными «ветвями» многозначной первообразной там не было. Здесь же «ветви», разнящиеся на кратное циклической постоянной, уже нельзя рассматривать обособленно, ибо при вращении вокруг особой точки они непрерывным образом переходят одна в другую*.

Для иллюстрации всего изложенного здесь в качестве примера положим

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Эти функции с их производными непрерывны во всей плоскости за исключением начала координат $O(0,\ 0)$, которое, таким образом,

* С подобным обстоятельством мы имели дело в случае многозначных функций комплексной переменной [ср., например, 458]; нетрудно усмотреть, что и то, и другое связано со свойствами плоскости.

является единственной особой точкой. Непосредственно проверяется, что условие интегрируемости везде (разумеется, кроме начала координат) выполнено:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Легко вычислить, что интеграл

$$\int\limits_{(L)}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

взятый в положительном направлении по любой окружности с центром в начале, равен 2π. Такова здесь циклическая постоянная, отвечающая начальной точке.

Первообразная для дифференциального выражения

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

легко угадывается: это — полярный угол θ, в чем легко убедиться, если подставить сюда $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Следовательно, общий вид первообразной будет $\theta+C\,(C=\text{const})$. Однако с каким бы значением полярного угла θ мы не исходили в данной точке плоскости, отличной от начала, если заставить точку сделать n оборотов вокруг начала в ту или другую сторону, угол θ, *непрерывно изменяясь*, получит при возвращении точки в исходное положение приращение $\pm 2n\pi$, кратное циклической постоянной. Таким образом, если рассматривать здесь первообразную во всей плоскости или в ее части, *содержащей внутри начало координат* (конечно, само начало исключается), то приходится считаться с многозначностью, как с неотъемлемым ее свойством: ветви ее, разнящиеся на целое кратное 2π, в известном смысле неотделимы.

Изложенное исследование читатель без труда распространит и на случай, когда налицо несколько особых точек или «дырок». Пусть, например, имеется k особых точек

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k.$$

Если A и B — две (отличные от особых) точки области и через $(AB)_0$ обозначена какая-либо *определенная* кривая, соединяющая эти точки (и не проходящая через особые точки), то общая форма интеграла по любой подобной же кривой (AB) будет

$$\int\limits_{(AB)}P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{(AB)_0}P\,dx+Q\,dy+n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+\ldots+n_k\sigma_k.$$

Здесь σ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ есть циклическая постоянная, отвечающая особой точке M_i, т. е. величина интеграла

$$\int\limits_{(L_i)} P\,dx + Q\,dy,$$

взятого в положительном направлении по простому замкнутому контуру (L_i), содержащему внутри себя особую точку M_i и не содержащему других особых точек. Коэффициенты $n_1, n_2, \ldots, n_k$ независимо друг от друга могут принимать любые целые значения.

Черт. 25.

563. Интеграл Гаусса. В некоторых вопросах математической физики приходится рассматривать криволинейный интеграл первого типа:

$$g = \int\limits_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds,$$

связываемый с именем Гаусса. Здесь через r обозначена длина

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

вектора, соединяющего внешнюю точку $A(\xi, \eta)$ с переменной точкой $M(x, y)$ кривой (L) (черт. 25), через (r, n) — угол между этим вектором и нормалью к кривой в точке M.

Так как точка A неизменна, то подинтегральное выражение $\frac{\cos(r, n)}{r}$ представляет собой функцию от координат x, y точки M. Представим интеграл Гаусса в форме криволинейного интеграла второго типа. Если (x, n) и (x, r) суть углы между положительным направлением оси x и направлениями радиуса-вектора и нормали, то, очевидно,

$$(r, n) = (x, n) - (x, r),$$

так что

$$\cos(r, n) = \cos(x, n)\cos(x, r) + \sin(x, n)\sin(x, r) =$$
$$= \frac{x-\xi}{r}\cos(x, n) + \frac{y-\eta}{r}\sin(x, n).$$

Подставляя это в интеграл Гаусса, приведем его к виду

$$g = \int\limits_{(L)} \left[\frac{y-\eta}{r^2}\sin(x, n) + \frac{x-\xi}{r^2}\cos(x, n)\right] ds.$$

Если же воспользоваться формулой (15) п° 353, то и получим искомое выражение интеграла g в виде криволинейного интеграла второго типа:

$$g = \pm \int\limits_{(L)} \frac{y-\eta}{r^2}\, dx - \frac{x-\xi}{r^2}\, dy,$$

где двойной знак отвечает тому или иному выбору направления нормали.

Функции $P=\frac{y-\eta}{r^2}$ и $Q=-\frac{x-\xi}{r^2}$, равно как и их производные, непрерывны во всей плоскости xy за исключением точки A, где $r=0$. Во всех точках, отличных от A, удовлетворяется условие интегрируемости. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-\eta}{r^2}\right)=\frac{r^2-2(y-\eta)^2}{r^4}=\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-\xi}{r^2}\right)=-\frac{r^2-2(x-\xi)^2}{r^4}=\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^4},$$

так что эти производные равны.

Если кривая (L) замкнута, но не охватывает точки A (и не проходит через нее), то необходимо $g=0$. Если же замкнутая кривая (L) охватывает точку A, то интеграл Гаусса может быть и отличным от нуля, но, как мы видели в предыдущем п°, его значение должно быть одним и тем же для всех таких кривых. Для выяснения этого значения возьмем в качестве кривой (L) окружность радиуса R с центром в точке A. Тогда

$$r=R \quad \text{и} \quad \cos(r,\, n)=1$$

(если считать, что нормаль и радиус-вектор имеют одно и то же направление), так что

$$g=\frac{1}{R}\int\limits_{(L)} ds=\frac{1}{R}\cdot 2\pi R=2\pi.$$

Итак, для каждой замкнутой кривой (L), внутри которой находится точка A, будет

$$g=\int\limits_{(L)}\frac{\cos(r,\, n)}{r}\,ds=2\pi,$$

если нормаль направить во внешнюю сторону, как мы это сделали в случае окружности.

Полученные результаты можно было бы легко предвидеть, если предварительно установить геометрический смысл интеграла Гаусса: g *есть мера угла, под которым видна из точки* A *кривая* (L) (если угол, описываемый радиусом-вектором, идущим из A, при обходе кривой брать со знаком).

Для обнаружения этого обстоятельства, предположим сначала, что кривая (L) пересекается с каждым исходящим из A лучом не более чем в одной точке (черт. 26). Пусть, далее, нормаль n к кривой направлена в сторону, противоположную точке A, так что

$$0<(r,\, n)<\frac{\pi}{2}.$$

Черт. 26.

Возьмем на кривой (L) элемент ds и определим угол, под которым этот элемент виден из точки A. Если M есть (например, начальная) точка этого элемента, то опишем вокруг A окружность радиусом AM и спроектируем на эту окружность элемент ds. Пусть элемент окружности, который

служит проекцией элемента ds, будет $d\sigma$. Так как угол между ними (считая оба элемента приближенно прямолинейными) равен углу (r, n), то

$$d\sigma = \cos(r, n)\, ds.$$

С другой стороны, очевидно,

$$d\sigma = r\, d\varphi,$$

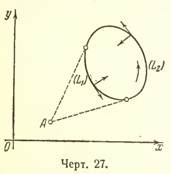
где $d\varphi$ есть центральный угол, отвечающий дуге $d\sigma$, т. е. именно тот угол, под которым элемент ds виден из точки A. Отсюда имеем для этого элементарного угла видимости выражение

$$d\varphi = \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds.$$

Наконец, суммируя все элементарные углы, мы получим, что угол видимости для всей кривой (L) как раз и выражается интегралом g.

Если кривая пересекается лучами, исходящими из точки A, более чем в одной точке, но может быть разбита на части, каждая из которых пересекается этими лучами уже лишь в одной точке, то нужно лишь просуммировать интегралы Гаусса, относящиеся к этим частям.

Выберем на кривой (L) определенное направление, а нормаль будем направлять, например, так, чтобы угол между положительно направленной касательной и нею был $+\frac{\pi}{2}$. Тогда в одних частях кривой нормаль окажется направленной в сторону, противоположную точке A, и интеграл Гаусса даст угол видимости с плюсом, в других же частях нормаль будет направлена в сторону точки A, и угол видимости получится с минусом. В общем интеграл Гаусса в этом случае даст алгебраическую сумму углов видимости. Впрочем, именно эту сумму и называют углом видимости для всей кривой (L), понимая, таким образом, под углом видимости полную меру вращения луча зрения от начала к концу кривой.



Черт. 27.

Если кривая замкнута и окружает точку A, то непосредственно ясно, что угол видимости кривой есть 2π. Если же замкнутая кривая не охватывает точку A, то углы видимости, взаимно уничтожаясь благодаря разнице знаков, в сумме дают нуль. Для простого случая, изображенного на черт. 27, кривая (L) распадается на две части: (L_1) и (L_2), видные из A под одним и тем же углом; но для кривой (L_1) этот угол получается с плюсом, а для (L_2) — с минусом.

Все это полностью согласуется со сказанным выше.

Замечание. Геометрическая трактовка интеграла Гаусса позволяет усмотреть, что в случае, когда замкнутая кривая (L) проходит через точку A и в этой точке имеет касательную, значение интеграла будет π. Если точка A будет угловой и угол между односторонними касательными в ней равен α, то таково же будет и значение интеграла Гаусса. Для аналитического обоснования указанного результата следовало бы сначала выделить из (L) некоторую окрестность точки A, а затем перейти к пределу, сжимая эту окрестность.

564. Трехмерный случай. Все проведенное выше исследование может быть повторено и для трехмерного случая.

Пусть в некоторой трехмерной области (V) определены и непрерывны три функции: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$; станем рас-

сматривать криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{13}$$

по произвольной лежащей в этой области кривой (AB). Рассуждения пп° **556** и **557** переносятся на рассматриваемый случай непосредственно и без изменений. Таким образом, и здесь имеет место теорема, аналогичная теореме 1 п° **555**: *вопрос о независимости интеграла* (13) *от пути интегрирования приводится к вопросу о том, будет ли дифференциальное выражение*

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{14}$$

точным дифференциалом, т. е. будет ли существовать такая («первообразная») функция $\Phi(x, y, z)$, полный дифференциал которой

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

совпадает с выражением (14).

Отметим попутно, что если такая функция существует, то интеграл (13) выражается разностью двух ее конечных значений;

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M)\Big|_A^B \tag{15}$$

[ср. **557** (6*)].

Затем, как и выше, встает вопрос о признаках точного дифференциала. Допустим существование в области (V) непрерывных производных

$$\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z};\ \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Тогда, если выражение (14) есть дифференциал некоторой функции $\Phi(x, y, z)$, так что имеют место равенства

$$P = \frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad R = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{16}$$

то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x};$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial y}.$$

Все эти производные, по предположению, непрерывны; а тогда [**191**] имеют место равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{Б}$$

Таким образом, какова бы ни была область (V), *условия* (Б) *являются необходимыми для того, чтобы выражение* (14) *было точным дифференциалом, а следовательно, и для того, чтобы интеграл* (13) *не зависел от пути.*

Переходя к вопросу о достаточности этих условий, мы ограничимся здесь случаем, когда область (V) есть прямоугольный параллелепипед

$$(V)=[a, b; c, d; e, f].$$

Здесь мы повторим построения n° 558.

Для определения функции $\Phi(x, y, z)$ из условий (16), проинтегрируем первое из них по x между x_0 и x $(a \leqslant x_0, x \leqslant b)$, считая y и z произвольно фиксированными в соответствующих промежутках. Мы получим

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\Phi(x_0, y, z).$$

Полагая во втором из уравнений (16) $x=x_0$ и интегрируя по y от y_0 до y $(c \leqslant y_0, y \leqslant d)$, найдем

$$\Phi(x_0, y, z)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\Phi(x_0, y_0, z).$$

Наконец, интегрируем третье уравнение (16), полагая в нем $x=x_0$ и $y=y_0$, по z от z_0 до z $(e \leqslant z_0, z \leqslant f)$:

$$\Phi(x_0, y_0, z)=\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+\Phi(x_0, y_0, z_0).$$

Если постоянное значение $\Phi(x_0, y_0, z_0)$, которое, очевидно, остается произвольным, обозначить через C, то окончательно придем к такому выражению для искомой функции:

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+$$
$$+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+C. \tag{17}$$

Применяя, в случае надобности, правило Лейбница, теперь легко проверить, что эта функция, действительно, удовлетворяет всем условиям (16).

Это непосредственное построение первообразной убеждает нас в том, что, по крайней мере, для параллелепипедальной области (V) *условия* (Б) *достаточны для того, чтобы выражение* (14)

было точным дифференциалом, а значит и для того, чтобы интеграл (13) *не зависел от пути.*

Распространение на общий случай возможно и здесь, с тем лишь, что область (V) удовлетворяет некоторому условию (аналогичному односвязности плоской области). Но так как на этот раз проведение всех рассуждений представляет трудности, мы от него отказываемся. Ниже [641], после ознакомления с поверхностными интегралами и формулой Стокса, мы к этим вопросам вернемся.

565. Примеры. 1) Будет ли криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(l)} (x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$$

по любому замкнутому контуру равен нулю?

Ответ утвердительный, так как подинтегральное выражение явно представляет собой полный дифференциал от функции $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$.

2) Не прибегая к условию (A), выяснить, зависит ли от пути интегрирования интеграл

$$\int\limits_{(AB)} x\,dy-y\,dx.$$

Ответ: зависит (вообще говоря), ибо подобный же интеграл по непересекающему себя замкнутому контуру выражает удвоенную площадь ограниченной этим контуром области [551] и, следовательно, отличен от 0.

3) Установить существование первообразной и найти ее для следующих дифференциальных выражений:

(а) $(4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+(3x^4y^2-6xy-4)\,dy$,

(б) $(10xy-8y)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy$,

(в) $(4x^3y^3-2y^2)\,dx+(3x^4y^2-2xy)\,dy$,

(г) $[(x+y+1)\,e^x-e^y]\,dx+[e^x-(x+y+1)\,e^y]\,dy$,

Решение. С помощью условия интегрируемости выясняется, что в случаях (а), (б), (г) мы имеем точный дифференциал, а в случае (в) нет.

(а) По формуле (8), полагая $x_0=y_0=0$, имеем

$$\Phi(x,\ y)=\int\limits_0^x 5\,dx+\int\limits_0^y (3x^4y^2-6xy-4)\,dy+C=$$
$$=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C.$$

То же получается и по формуле (7):

$$\Phi(x,\ y)=\int\limits_0^x (4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+\int\limits_0^y (-4)\,dy+C=$$
$$=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C.$$

(б) Выгодно, взяв $x_0=y_0=0$, вычислять по формуле (8), ибо тогда первый интеграл обратится в нуль:

$$\Phi(x,\ y)=\int\limits_0^y (5x^2-8x+3)\,dy+C=(5x^2-8x+3)\,y+C.$$

(г) По любой из указанных формул получим:

$$\Phi(x, y) = (x+y)(e^x - e^y) + C.$$

4) Доказать, что условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ равносильно тождеству

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy$$

(в предположении непрерывности функций P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$).

5) Иногда разыскание первообразной (если условие интегрируемости выполнено) оформляют иначе, чем это сделано в 558. Покажем это на примере 3 (а).

Из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5,$$

интегрируя по x, найдем для Φ выражение $x^4y^3 - 3xy^2 + 5x$ с точностью до «постоянной интегрирования». Эта последняя не зависит от x, по которому мы интегрировали, но может зависеть от «параметра» y; поэтому мы возьмем ее в виде $\varphi(y)$. Итак,

$$\Phi = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + \varphi.$$

Условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^4y^2 - 6xy - 4$$

дает нам, при подстановке, вместо Φ его выражения

$$\frac{d\varphi}{dy} = -4,$$

откуда $\varphi = -4y + C$. Окончательно

$$\Phi = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C.$$

6) Если тот же прием применить к примеру 3) (в), не обращая внимания на нарушение условия интегрируемости, то для определения φ получим условие

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2xy.$$

Оно явно противоречиво, ибо справа стоит выражение, содержащее x, в то время как φ от x не зависит!

7) Интересно в общем виде выяснить, какую роль в осуществлении указанного приема играет условие интегрируемости.

Интегрируя по x равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y),$$

найдем, как и в частном примере,

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \varphi(y).$$

Второе равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

даст затем для определения $\varphi(y)$ условие

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx = Q(x, y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx. \qquad (18)$$

Если последнее выражение фактически от x не зависит (т. е. при $y = \text{const}$ не меняется с изменением x), то простая квадратура по y приводит к выражению для φ. Если же выражение (18) содержит x, то полученное для φ условие противоречиво, ибо φ не должно зависеть от x. Таким образом, успех зависит исключительно от того, свободно ли от x или нет выражение (18), а это проще всего установить по тому, обращается ли в нуль или нет частная производная от выражения (18) по x. Но производная эта равна $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$; таким образом, выполнение условия (A), и только оно, гарантирует успех!

8) Какому условию должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы выражение

$$F(x, y)(x\,dx + y\,dy)$$

было точным дифференциалом?

Ответ: $x\frac{\partial F}{\partial y} = y\frac{\partial F}{\partial x}$.

Черт. 28.

9) Вывести формулы (7) и (8) п° 558 для первообразной, воспользовавшись выражением первообразной через криволинейный интеграл [556 (4)] и выбрав в качестве пути интегрирования один раз ломаную ACM, а другой раз ADM (черт. 28).

10) Чтобы дать другой пример применения общей формулы (4) п° 556 для разыскания первообразной, решим наново по этой формуле задачу 3) (а), взяв в качестве пути интегрирования прямолинейный отрезок, соединяющий начало координат с произвольной точкой (x', y') плоскости (мы иначе обозначаем ее координаты, чтобы не путать их с координатами x, y переменной точки пути интегрирования).

В интеграле

$$F(x', y') = \int_{(0,0)}^{(x',y')} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\, dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\, dy$$

нужно y заменить на $\frac{y'x}{x'}$ (ибо $y = \frac{y'x}{x'}$ как раз и будет уравнение пути интегрирования) и тем свести дело к вычислению обыкновенного определенного интеграла по x от 0 до x'. В результате получим

$$F(x', y') = \int_0^{x'} \left(\frac{7y'^3x^6}{x'^3} - \frac{9y'^2x^2}{x'^2} + 5 - \frac{4y'}{x'}\right) dx =$$

$$= x'^4y'^3 - 3x'y'^2 + 5x' - 4y',$$

что с точностью до обозначений совпадает с найденным выше выражением.

11) Установить область, в которой выражение

$$P\,dx + Q\,dy = \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}\,dx + \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}\,dy\ *$$

является полным дифференциалом, и найти первообразную для этой области.

Решение. Имеем (при $y \neq 0$):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

причем в первом случае знак плюс или минус берется в соответствии со знаком y. Таким образом, условие интегрируемости выполняется лишь для $y > 0$.

Ограничиваясь, в силу этого, верхней полуплоскостью, воспользуемся для восстановления первообразной тем же приемом, что и в 10), но уравнения прямолинейного отрезка возьмем в параметрической форме:

$$x = x't, \quad y = y't \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Тогда

$$F(x', y') = \int_{(0,0)}^{(x',y')} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x' \sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} + x'}\right)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x' \sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} - x'} + y' \sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} + x'}\right).$$

12) Положим

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} \quad (A,\ C,\ AC - B^2 > 0).$$

Проверить выполнение условия (А) и найти циклическую постоянную, отвечающую особой точке (0,0).

Указание. Проще всего вычислить криволинейный интеграл по эллипсу

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \qquad (E)$$

ибо тогда

$$\int_{(E)} P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\int_{(E)} x\,dy - y\,dx$$

сведется [551 (10)] попросту к площади этого эллипса, которая нам известна [339, 6)]. Ср. 549, 9).

13) Если соблюдено условие интегрируемости, криволинейный интеграл иной раз может оказаться не зависящим от пути, а первообразная функция однозначной — даже при наличии особой точки! Пример: для выражения

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

* Символом $\sqrt{\ }$ обозначен, как обычно, арифметический корень.

имеющего особой точкой начало координат, первообразной будет, например, функция $\ln(x^2+y^2)$, однозначная и непрерывная вместе с производными во всей плоскости (исключая начало). Читатель легко уяснит себе, что это связано с фактом обращения в нуль циклической постоянной, отвечающей началу.

14) Проинтегрировать дифференциальное выражение

$$z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}\,dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz.$$

Решение. Легко проверяются «условия интегрируемости»:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^2y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2}.$$

Вычисление проведем по формуле, аналогичной формуле (17), но с перестановкой ролей x и z, и полагая при этом $z_0=0$, а x_0 и $y_0>0$. Тогда сохранится лишь один из трех интегралов, и мы сразу найдем:

$$\Phi(x, y, z)=\int_0^z\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz+C=\operatorname{arctg}\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.$$

566. Приложение к физическим задачам. Вернемся в свете изложенной теории к некоторым ранее рассмотренным задачам из области механики и физики.

1) *Работа силового поля.* В п° **554** мы видели, что работа силового поля при перемещении материальной точки с массой 1 вдоль по траектории (K) выражается криволинейным интегралом [см. **554** (18)]:

$$A=\int_{(K)}X\,dx+Y\,dy, \tag{19}$$

где $X=X(x, y)$ и $Y=Y(x, y)$ суть проекции напряжения поля на координатные оси.

Весьма естественно заняться выяснением условий, при которых работа сил поля зависит лишь от начального и конечного положений точки, но не от формы траектории. Этот вопрос, очевидно, равносилен вопросу о независимости значения криволинейного интеграла (19) от пути интегрирования. Поэтому искомым условием является равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{20}$$

в предположении, конечно, что область, охватываемая полем, односвязна и что особые точки отсутствуют.

То же условие можно выразить и в такой форме: *работа сил поля при перемещении материальной точки из одного положения в другое не зависит от формы траектории в том и только в том случае, когда элементарная работа*

$$X\,dx+Y\,dy$$

служит полным дифференциалом от некоторой однозначной функции $U(x, y)$. Эту функцию обычно называют *силовой* или *потенциальной*; в случае ее существования само поле получает наименование *потенциального*.

Работа потенциального поля при перемещении точки из положения $A(x_0, y_0)$ в положение $B(x_1, y_1)$ равна [см. **557** (6)] просто соответствующему приращению силовой функции:

$$U(x_1, y_1)-U(x_0, y_0)=U(B)-U(A).$$

В качестве примера рассмотрим *поле ньютоновского притяжения*. Если в начале координат O поместить массу μ, а в точку A — массу 1, то эта последняя будет притягиваться к центру O с силой $\vec{F}$, равной по величине

$$F=\frac{\mu}{r^2},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние точки A от начала. Так как косинусы углов, составляемых этой силой с осями, будут $-\frac{x}{r}$ и $-\frac{y}{r}$, то проекции силы $\vec{F}$ на оси выразятся так:

$$X=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Непосредственно ясно, что ньютоновское поле является потенциальным, поскольку выражение

$$-\frac{\mu x}{r^3}\,dx-\frac{\mu y}{r^3}\,dy \tag{21}$$

служит дифференциалом для функции

$$U=\frac{\mu}{r},$$

которая и играет здесь роль потенциальной функции; ее называют *ньютоновским потенциалом* (поля точки O). Несмотря на наличие особой точки (начало координат), функция эта однозначна: интеграл от выражения (21) по замкнутому контуру будет нулем, даже если контур охватывает начало («циклическая постоянная» здесь равна нулю!).

При перемещении точки из положения A в положение B силы поля произведут работу

$$A=\frac{\mu}{r_B}-\frac{\mu}{r_A},$$

где r_A и r_B суть расстояния точек A и B от центра. При удалении точки B в бесконечность работа превратится в $-\frac{\mu}{r_A}$; она будет равна как раз величине ньютоновского потенциала $\frac{\mu}{r_A}$, если точка перемещается из бесконечности в положение A.

Примерами не потенциальных полей могут служить поля, образованные силой

$$F=kr \text{ или } F=\frac{k}{r}, \quad (k=\text{const})$$

направление которой составляет угол $+\frac{\pi}{2}$ с направлением радиуса-вектора $\vec{r}$.

Все сказанное здесь легко переносится и на случай п р о с т р а н с т в е н н о г о силового поля.

2) *Плоское установившееся течение несжимаемой жидкости*. Если через u, v обозначить слагающие по осям вектора-скорости, то, как мы вывели в п° **554**, 2), количество жидкости, втекающей в единицу времени через замкнутый контур (K) в н у т р ь, равно

$$Q=\int\limits_{(K)} v\,dx-u\,dy$$

[см. 554 (22)]. В случае несжимаемой жидкости и при отсутствии источников и стоков этот интеграл всегда будет нулем. Отсюда следует, что слагающие u, v вектора-скорости необходимо подчинены условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Тогда подинтегральное выражение $v\,dx-u\,dy$ имеет первообразную функцию $\varphi(M)=\varphi(x, y)$, которую в гидромеханике называют *функцией тока*.

Если взять любую кривую (AB), соединяющую точки A и B, то, как известно [554 (22)], количество жидкости, протекающей через нее в единицу времени в определенную сторону, выражается интегралом

$$Q=\int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} v\,dx-u\,dy,$$

причем направление на кривой (AB) должно быть таким, чтобы нормаль, направленная в упомянутую сторону, составляла с положительно направленной касательной угол $+\frac{\pi}{2}$. Теперь мы видим, что эта величина попросту равна разности $\varphi(B)-\varphi(A)$ значений функции тока на концах кривой!

3) *Тепло, поглощенное газом.* Рассмотрим вновь [554, 3)] вопрос о количестве тепла, полученном данной массой (скажем, 1 молем) идеального газа при изменении его состояния. Если самый процесс изменения состояния газа характеризуется кривой (K) на плоскости V, то, как мы видели в п° 554, 3), упомянутое количество тепла выразится криволинейным интегралом [см. там (23)]:

$$U=\int\limits_{(K)}\frac{c_p}{R}p\,dV+\frac{c_v}{R}V\,dp$$

(мы сохраняем прежние обозначения).

Если, как это делается обычно, считать теплоемкости c_v и c_p газа (при постоянном объеме и при постоянном давлении) неизменными, то условие интегрируемости здесь явно нарушено. Действительно, ввиду того что $c_p\neq c_v$, будет

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{R}p\right)=\frac{c_p}{R}\neq\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{c_v}{R}V\right)=\frac{c_v}{R}.$$

Отсюда следует, что *количество тепла U не является функцией от состояния газа* и зависит от того процесса, который к этому состоянию привел. Даже при циклическом процессе, возвращающем газ в его первоначальное состояние, газ может приобрести (или потерять) некоторое количество тепла.

Если выражение элементарного количества тепла

$$dU=\frac{c_p}{R}p\,dV+\frac{c_v}{R}V\,dp$$

умножить на $\frac{1}{T}$, где $T=\frac{pV}{R}$ есть абсолютная температура газа, то придем к выражению

$$\frac{dU}{T}=c_p\frac{dV}{V}+c_v\frac{dp}{p},$$

которое явно представляет собой полный дифференциал. Первообразной здесь служит функция

$$S=c_p\ln V+c_v\ln p,$$

Криволинейный интеграл

$$\int_{(V_0,\, p_0)}^{(V,\, p)} \frac{dU}{T}$$

уже не зависит от пути интегрирования, соединяющего постоянную точку (V_0, p_0) с переменной точкой (V, p) и лишь постоянной отличается от указанной выше функции S. Этим интегралом определяется некоторая физическая величина (так называемая энтропия), уже являющаяся функцией состояния газа и играющая важную роль в тепловых расчетах.

§ 4. Функции с ограниченным изменением

567. Определение функции с ограниченным изменением. Настоящий параграф представляет некоторое отступление от основной линии этой главы. Он посвящен ознакомлению читателя с важным классом функций (указанным в заголовке), который был введен в науку Жорданом (C. Jordan). Этот класс функций будет играть основную роль в том обобщении понятия определенного интеграла, которым мы займемся в следующем параграфе. Впрочем, и во многих других вопросах математического анализа класс функций с ограниченным изменением имеет важное значение.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором конечном промежутке $[a, b]$, где $a < b$. Разложим этот промежуток произвольным образом на части с помощью точек деления:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

(подобно тому, как мы это делали при составлении интегральных или римановых сумм, устанавливая понятие определенного интеграла). Из абсолютных величин приращений функции, отвечающих отдельным частичным промежуткам, образуем сумму

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{1}$$

Теперь весь вопрос в том, будет ли множество этих чисел, отвечающих различным способам дробления промежутка $[a, b]$ на части, ограничено сверху или нет.

Если суммы (1) *в их совокупности ограничены сверху, то говорят, что функция* $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ *имеет ограниченное изменение* (или ограниченную вариацию). При этом *точную верхнюю границу этих сумм называют полным изменением* (или полной вариацией) *функции в указанном промежутке* и обозначают символом

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}.$$

Можно применять это понятие и в случае функции не ограниченного изменения, но тогда *полное изменение будет равно* $+\infty$.

По самому определению точной верхней границы, в обоих случаях, надлежаще выбирая подразделения промежутка $[a, b]$, можно достигнуть произвольной близости сумм v к полному изменению $\bigvee_a^b f(x)$. Иными словами, можно выбрать такую последовательность подразделений, чтобы полное изменение служило пределом для последовательности соответствующих сумм v.

Иногда ставится вопрос об ограниченности изменения функции $f(x)$ в бесконечном промежутке, например в промежутке $[a, +\infty]$. Говорят, что *функция* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение в промежутке* $[a, +\infty]$, *если она является функцией с ограниченным изменением в любой его конечной части* $[a, A]$ *и полные изменения* $\bigvee_a^A f(x)$ *ограничены в их совокупности*. Во всех случаях мы полагаем

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\}. \tag{2}$$

Отметим, что в этих определениях никакой роли не играет вопрос о непрерывности функции $f(x)$.

Примером функции с ограниченным изменением в конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$ может служить любая ограниченная монотонная функция. Если промежуток $[a, b]$ конечный, то это сразу следует из того, что

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(b) - f(a)|,$$

так что и $\bigvee_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$. Для промежутка $[a, +\infty]$, очевидно, будет

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a} \{ |f(A) - f(a)| \} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

разумея под $f(+\infty)$, как обычно, предел $\lim_{A\to+\infty} f(A)$.

Дадим теперь пример непрерывной функции, которая, однако, не будет функцией с ограниченным изменением. Положим

$$f(x) = x \cos\frac{\pi}{2x} \ (\text{для } x \neq 0), \ f(0) = 0$$

и рассмотрим, например, промежуток [0, 1]. Если за точки деления этого промежутка принять точки

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

то, как легко убедиться,

$$v=v_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=H_n$$

и [см. 365, 1)]

$$\bigvee_0^1 f(x)=\sup\{v\}=+\infty.$$

568. Классы функций с ограниченным изменением. Мы уже упоминали о том, что монотонная функция имеет ограниченное изменение. Можно следующим образом расширить этот класс функций:

1°. *Если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$, такова, что этот промежуток может быть разложен на конечное число частей*

$$[a_k,\ a_{k+1}] \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\ a_0=a,\ a_m=b),$$

в каждой из которых $f(x)$ монотонна, то она имеет в $[a, b]$ ограниченное изменение.*

Разбив произвольным образом промежуток $[a, b]$ на части, составим сумму v. Так как от присоединения каждой новой точки деления сумма v может разве лишь увеличиться**, то, присоединив к точкам деления все точки a_k, о которых была речь выше, мы получим сумму $\bar{v}\geqslant v$. Если выделить из суммы $\bar{v}$ те слагаемые, которые относятся к промежутку $[a_k, a_{k+1}]$, то, обозначая их сумму значком (k) наверху, будем иметь

$$\bar{v}^{(k)}=|f(a_{k+1})-f(a_k)|,$$

так что

$$\bar{v}=\sum_{k=0}^{m-1}|f(a_{k+1})-f(a_k)|.$$

Так как произвольная сумма v не превосходит этого числа, то оно и будет полным изменением функции.

---

* Про такую функцию говорят, что она кусочно-монотонна в промежутке $[a, b]$.

** Если между x_i и x_{i+1} вставлена точка x', то слагаемое $|f(x_{i+1})-f(x_i)|$ заменяется суммой

$$|f(x_{i+1})-f(x')|+|f(x')-f(x_i)|\geqslant|f(x_{i+1})-f(x_i)|.$$

2°. *Если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ удовлетворяет условию*

$$|f(\bar{x})-f(x)|\leqslant L|\bar{x}-x|, \tag{3}$$

где $L=\text{const}$, а $\bar{x}$ и x — любые точки промежутка, то она имеет ограниченное изменение,* причем

$$\bigvee_a^b f(x)\leqslant L(b-a).$$

Это следует из неравенства

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1}-f(x_i)|\leqslant L\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=L(b-a).$$

В частности,

3°. *Функция $f(x)$ будет в промежутке $[a, b]$ функцией с ограниченным изменением, если она имеет в нем ограниченную производную: $|f'(x)|\leqslant L$* (где $L=\text{const}$).

В самом деле, по теореме о среднем в этом случае

$$|f(\bar{x})-f(x)|=|f'(\xi)(\bar{x}-x)|\leqslant L|\bar{x}-x| \qquad (x\gtrless\xi\gtrless\bar{x}),$$

так что выполнено условие Липшица (3).

На основании этого замечания можно, например, утверждать ограниченность изменения функции

$$f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x} \quad (x\neq 0),\ f(0)=0$$

в любом конечном промежутке, ибо производная ее

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x} \quad (x\neq 0), \quad f'(0)=0$$

ограничена. Любопытно отметить, что в каждом промежутке, содержащем точку 0, эта функция «бесконечно колеблется», т. е. бесконечное число раз переходит от возрастания к убыванию, и наоборот.

Обширный класс функций с ограниченным изменением дается следующим предложением:

4°. *Если $f(x)$ в конечном (или даже в бесконечном) промежутке $[a, b]$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:*

$$f(x)=c+\int_a^x\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

---

* Это условие обычно называется *условием Липшица* (R. Lipschitz).

где $\varphi(t)$ предполагается абсолютно интегрируемой в этом промежутке, то $f(x)$ имеет в нем ограниченное изменение.* При этом

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Пусть $[a, b]$ — конечный промежуток; тогда

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)|\,dt = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt,$$

откуда и следует наше утверждение.

Если же речь идет о бесконечном промежутке $[a, +\infty]$, то достаточно заметить, что

$$\bigvee_a^A f(x) \leqslant \int_a^A |\varphi(t)|\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Замечание. Можно доказать, что как в случае конечного, так и в случае бесконечного промежутка на самом деле имеет место точное равенство

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Если же функция $\varphi(t)$ в промежутке $[a, b]$ интегрируема, но не абсолютно, то полное изменение $f(x)$ заведомо бесконечно. Мы не будем останавливаться на этом, но поясним лишь последнюю часть замечания примерами.

Пусть $f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, так что

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2} \quad (x \neq 0), \quad f'(0) = \varphi(0) = 0.$$

Тогда, например, для $0 \leqslant x \leqslant 2$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

* Т. е. интегрируемой (хотя бы в несобственном смысле) вместе со своей абсолютной величиной $|\varphi(t)|$.

но в n° 482 мы показали, что интеграл этот — неабсолютно сходящийся. Пользуясь той же идеей, что и там, разложим промежуток [0, 2] точками

$$0,\ \frac{1}{\sqrt{n}},\ \sqrt{\frac{2}{2n-1}},\ \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

$$\sqrt{\frac{2}{2n-3}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ 1,\ \sqrt{2},\ 2;$$

для соответствующей суммы v, очевидно, будет

$$v > \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_k,$$

откуда и следует, что

$$\bigvee_0^2 f(x) = +\infty.$$

Аналогично этому легко показать, что функция

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

в промежутке $[0, +\infty]$ имеет неограниченное изменение [ср. 476].

569. Свойства функций с ограниченным изменением. Промежуток $[a, b]$, в котором здесь рассматриваются все функции, предполагается конечным.

1°. *Всякая функция с ограниченным изменением ограничена.*

В самом деле, при $a < x' \leqslant b$ имеем

$$v' = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \leqslant \bigvee_a^b f(x),$$

откуда

$$|f(x')| \leqslant |f(x') - f(a)| + |f(a)| \leqslant |f(a)| + \bigvee_a^b f(x).$$

2°. *Сумма, разность и произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ с ограниченным изменением также являются функциями с ограниченным изменением.*

Пусть $s(x) = f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$|s(x_{i+1}) - s(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

и, суммируя по значку i,

$$\sum_i |s(x_{i+1}) - s(x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x),$$

откуда следует

$$\bigvee_a^b s(x) \leqslant \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x).$$

Положим теперь $p(x) = f(x)\, g(x)$ и пусть для $a \leqslant x \leqslant b$

$$|f(x)| \leqslant K, \quad |g(x)| \leqslant L \qquad (K,\ L = \text{const})$$

[см. 1°]. Очевидно,

$$|p(x_{i+1}) - p(x_i)| =$$
$$= |f(x_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \leqslant$$
$$\leqslant K \cdot |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + L \cdot |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

откуда уже легко получить, что

$$\bigvee_a^b p(x) \leqslant K \bigvee_a^b g(x) + L \bigvee_a^b f(x).$$

3°. *Если $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с ограниченным изменением и, сверх того, $|g(x)| \geqslant \sigma > 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет функцией с ограниченным изменением.*

Ввиду свойства 2°, достаточно доказать ограниченность изменения функции $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. Имеем

$$|h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \frac{|g(x_{i+1}) - g(x_i)|}{|g(x_i)| \cdot |g(x_{i+1})|} \leqslant \frac{1}{\sigma^2} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

так что

$$\bigvee_a^b h(x) \leqslant \frac{1}{\sigma^2} \bigvee_a^b g(x).$$

4°. *Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ и $a < c < b$. Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a, b]$, то она имеет ограниченное изменение и*

в каждом из промежутков $[a, c]$ *и* $[c, b]$, *и обратно. При этом*

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{5}$$

Пусть $f(x)$ имеет ограниченное изменение в $[a, b]$. Разложим на части каждый из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$ порознь:

$$y_0 = a < y_1 < \ldots < y_m = c, \quad z_0 = c < z_1 < \ldots < z_n = b; \tag{6}$$

этим будет разбит на части и весь промежуток $[a, b]$. Составим суммы отдельно для промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|;$$

соответствующая сумма для промежутка $[a, b]$ будет $v = v_1 + v_2$. Таким образом

$$v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^b f(x)$$

и, следовательно, каждая из сумм v_1, v_2 порознь ограничена, т. е. функция $f(x)$ оказывается с ограниченным изменением в промежутках $[a, c]$ и $[c, b]$. Выбирая подразделения (6) так, чтобы суммы v_1 и v_2 стремились к соответствующим полным изменениям, в пределе получим

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leqslant \bigvee_a^b f(x). \tag{7}$$

Допустим теперь, что $f(x)$ имеет ограниченное изменение в каждом из промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$. Произведем произвольное разбиение промежутка $[a, b]$ на части. Если точка c не входит в состав точек деления, то мы ее дополнительно введем, отчего, как мы знаем *, сумма v может лишь увеличиться. Сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$v \leqslant v_1 + v_2 \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Отсюда сразу вытекает ограниченность изменения $f(x)$ в промежутке $]a, b]$ и неравенство

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{8}$$

---

* См. сноску ** на стр. 76.

Наконец, из (7) и (8) следует (5).

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает:

5°. *Если в промежутке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение, то для* $a \leqslant x \leqslant b$ *полное изменение*

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

будет монотонно возрастающей (и ограниченной) функцией от x.

Действительно, если $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, то

$$\bigvee_a^{x''} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t),$$

так что

$$g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t) \geqslant 0 \tag{9}$$

(так как по самому определению полного изменения оно не может быть отрицательным числом).

Теперь становится ясным, что определение полного изменения в бесконечном промежутке $[a, +\infty]$ вместо (2) может быть дано в следующей форме:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \to +\infty} \bigvee_a^A f(x). \tag{2*}$$

С помощью этого замечания теоремы настоящего n° легко обобщаются и на случай бесконечного промежутка.

570. Критерии для функций с ограниченным изменением. Пусть функция $f(x)$ определена в конечном или бесконечном промежутке $[a, b]$.

6°. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *имела в промежутке* $[a, b]$ *ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы для нее в этом промежутке существовала монотонно возрастающая и ограниченная функция* $F(x)$, *такая, что в любой части* $[x', x'']$, $(x' < x'')$ *промежутка* $[a, b]$ *приращение функции* f *по абсолютной величине не превосходит соответствующего приращения функции* F:

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant F(x'') - F(x')\,*.$$

---

* Можно было бы, впрочем, ограничиться и неравенством без знака абсолютной величины:

$$f(x'') - f(x') \leqslant F(x'') - F(x').$$

[Функцию $F(x)$, обладающую этим свойством, естественно было бы назвать мажорантой для функции $f(x)$.]

Необходимость следует из того, что для функции $f(x)$ с ограниченным изменением роль мажоранты может играть, например, функция

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t),$$

монотонно возрастающая и ограниченная в силу 5°. Неравенство

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t)$$

вытекает из самого определения полного изменения функции.

Достаточность для случая конечного промежутка видна сразу из неравенства

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(b) - F(a),$$

а для бесконечного — получается предельным переходом.

Очень важной является другая форма критерия:

7°. *Для того чтобы функция $f(x)$ имела в промежутке $[a, b]$ ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в этом промежутке в виде разности двух монотонно возрастающих и ограниченных функций:*

$$f(x) = g(x) - h(x). \tag{10}$$

Необходимость. В силу 6°, для функции $f(x)$ с ограниченным изменением существует монотонно возрастающая и ограниченная мажоранта $F(x)$. Положим

$$g(x) = F(x), \quad h(x) = F(x) - f(x),$$

так что (10) выполнено. Остается убедиться в монотонности функции $h(x)$; но при $x' < x''$

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \geqslant 0$$

по самому определению мажоранты.

Достаточность ясна из того, что при наличии равенства (10) функция

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

служит мажорантой, ибо

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant [g(x'') - g(x')] + [h(x'') - h(x')] = \\ = F(x'') - F(x').$$

В виде упражнения предлагается читателю:

1) опираясь на установленные критерии, наново доказать утверждения 1°—4° предыдущего n°;

2) для рассмотренных в n° **568** классов функций с ограниченным изменением непосредственно установить наличие монотонной мажоранты и возможность представления в виде разности монотонных функций.

По поводу теоремы 7° сделаем дополнительное замечание. Так как функции g и h обе ограничены, то путем прибавления к ним одной и той же постоянной всегда можно добиться того, чтобы они обе стали положительными. Точно так же, прибавляя к функциям g и h какую-либо возрастающую в строгом смысле, но ограниченную функцию (например, $\operatorname{arctg} x$), придем к такому разложению вида (10), где обе функции будут уже строго возрастающими.

Установленная в 7° возможность сведéния функций с ограниченным изменением в некотором смысле к монотонным функциям не должна создавать у читателя иллюзий относительно «простоты» поведения функций с ограниченным изменением: ведь бесконечно колеблющаяся функция

$$f(x)=x^2\sin\frac{\pi}{x}\quad (x\neq 0),\quad f(0)=0,$$

которая была рассмотрена в n° **568**, тоже допускает представление в виде разности двух монотонных функций!

Тем не менее, именно в связи с представлением (10), некоторые свойства монотонных функций переносятся и на функции с ограниченным изменением. Так, если вспомнить, что для монотонной ограниченной функции $f(x)$ при любом $x=x_0$ существуют односторонние пределы, слева и справа,

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x),\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \tag{11}$$

[71, 1°], то, применяя это свойство к каждой из функций g и h, заключим, что и

8°. *Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением в промежутке $[a, b]$ в любой точке $x=x_0$ этого промежутка существуют конечные односторонние пределы* (11)*.

571. Непрерывные функции с ограниченным изменением.

9°. *Пусть в промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ с ограниченным изменением. Если $f(x)$ в некоторой точке $x=x_0$ непрерывна, то в этой же точке непрерывна и функция*

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t).$$

* Конечно, если x_0 есть один из концов промежутка, то речь может идти только об одном из этих пределов.

Предположим, что $x_0 < b$, и докажем, что $g(x)$ непрерывна в точке x_0 справа. С этой целью, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, разложим промежуток $[x_0, b]$ точками

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на части так, чтобы оказалось

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \varepsilon. \tag{12}$$

Опираясь на непрерывность функции $f(x)$, можно предположить при этом, что x_1 уже настолько близко к x_0, что выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(в случае надобности, можно было бы вставить еще одну точку деления, отчего сумма v разве лишь увеличилась бы). Тогда из (12) следует, что

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) < \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| <$$

$$< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b} f(t),$$

стало быть,

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon$$

или, наконец,

$$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon.$$

Отсюда и подавно

$$0 \leqslant g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon,$$

следовательно, ввиду произвольности ε,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0).$$

Аналогично доказывается, что (при $x_0 > a$)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0),$$

т. е. что $g(x)$ в точке x_0 непрерывна слева.

Из доказанной теоремы вытекает такое следствие:

10°. *Непрерывная функция с ограниченным изменением представима в виде разности двух **непрерывных** же возрастающих функций.*

В самом деле, если вернуться к доказательству предложения 7° (в части, относящейся к необходимости) и в качестве монотонной мажоранты взять именно функцию

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t),$$

непрерывную в силу 9°, то и получится требуемое разложение.

В заключение покажем, что для непрерывной функции в определении полного изменения:

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v\}$$

supremum можно заменить пределом как в том случае, когда полное изменение конечно, так и в том, когда оно бесконечно.

11°. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в конечном промежутке $[a, b]$. Разложив этот промежуток на части точками*

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и составив сумму

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

будем иметь

$$\lim_{\lambda \to 0} v = \bigvee_a^b f(x), \tag{13}$$

где $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$ *.

Как уже отмечалось, сумма v не убывает от добавления новой точки деления **. С другой стороны, если эта новая точка попадает в промежуток между x_k и x_{k+1}, то увеличение суммы v, проистекающее из появления этой точки, не превосходит удвоенного колебания функции $f(x)$ в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

Заметив это, возьмем какое-либо число

$$A < \bigvee_a^b f(x)$$

и найдем сумму v^* такую, что

$$v^* > A. \tag{14}$$

* Здесь имеется в виду предельный переход такого же типа, как и для римановых сумм или сумм Дарбу [259, 30].

** См. сноску ** на стр. 76.

Пусть эта сумма отвечает следующему способу деления:

$$x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b.$$

Выберем теперь столь малое $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m},$$

лишь только $|x'' - x'| < \delta$ (это сделать можно ввиду равномерной непрерывности функции f). Докажем, что для любого способа деления, которому отвечает $\lambda < \delta$, будет

$$v > A. \tag{15}$$

В самом деле, имея подобный способ деления (I), составим новый способ (II), получающийся из (I) добавлением всех точек x_k^*. Если способу (II) отвечает сумма v_0, то

$$v_0 \geqslant v^*. \tag{16}$$

С другой стороны, способ (II) получается из (I) путем (самое большее) m-кратного добавления по одной точке. Так как каждое добавление вызывает увеличение суммы v, меньшее, чем $\frac{v^* - A}{2m}$, то

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}.$$

Отсюда, а также из (16) и (14), следует, что

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geqslant \frac{A + v^*}{2} > A.$$

Итак, при $\lambda < \delta$ выполнено (15); но, поскольку всегда

$$v \leqslant \bigvee_a^b f(x),$$

то действительно имеет место (13), что и требовалось доказать.

572. Спрямляемые кривые. Понятие функции с ограниченным изменением находит себе применение в вопросе о спрямляемости кривой линии, в связи с которым названное понятие и было впервые введено Жорданом. Изложением этого вопроса мы хотим заключить настоящий параграф.

Пусть кривая (K) задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{17}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предположены только непрерывными. Допустим при этом, что кривая не имеет кратных точек.

Взяв вершины вписанной в кривую ломаной в точках кривой, отвечающих значениям параметра

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T, \tag{18}$$

будем иметь для периметра ломаной выражение

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}.$$

Как мы знаем [247], длина s рассматриваемой дуги кривой определяется как точная верхняя граница множества всех периметров p. Если эта граница конечна, кривая и называется спрямляемой. Достаточные условия спрямляемости мы указали уже в первом томе [278]. Нижеследующая теорема устанавливает самые общие — необходимые и достаточные условия для этого.

Теорема Жордана. *Для спрямляемости кривой* (17) *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *обе имели ограниченное изменение в промежутке* $[t_0, T]$.

Необходимость. Если кривая спрямляема и имеет длину s, то при любом подразделении (18) промежутка $[t_0, T]$ имеем

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant s,$$

откуда, в силу очевидного неравенства

$$|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2},$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqslant s,$$

так что функция $\varphi(t)$, действительно, имеет ограниченное изменение. Аналогичное заключение применимо и к функции $\psi(t)$.

Достаточность. Допустим теперь, что обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют ограниченное изменение. Ввиду очевидного неравенства

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|+\sum_{i=0}^{n-1}|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)|$$

можно утверждать, что все числа p ограничены сверху, например, числом

$$\bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t),$$

а отсюда по доказанному выше уже вытекает спрямляемость кривой (K).

Присовокупим еще два важных замечания.

Из только что сказанного явствует, что вся длина s кривой (17) удовлетворяет неравенству

$$s \leqslant \bigvee_{t_0}^{T} \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^{T} \psi(t).$$

Рассматривая переменную дугу $s = s(t)$, отвечающую промежутку $[t_0, t]$ изменения параметра, применим написанное неравенство к промежутку $[t, t + \Delta t]$, где, скажем, $\Delta t > 0$. Тогда

$$0 < \Delta s < \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \psi(t).$$

Так как при бесконечно малом Δt обе вариации справа [в силу **571** 9°], а с ними и Δs, также бесконечно малы, то мы приходим к заключению: *для непрерывной спрямляемой кривой переменная дуга $s(t)$ является непрерывной функцией параметра.*

Так как эта функция монотонно возрастает от 0 до длины S всей кривой, то, каково бы ни было натуральное число n, можно себе представить кривую разделенной на n частей длины $\frac{S}{n}$ [теорема Коши, **82**]. Если плоскость покрыта сеткой квадратов со стороной $\frac{S}{n}$, то каждая из упомянутых частей не может встретить больше четырех таких квадратов. Таким образом, сумма площадей всех квадратов, встречающих нашу кривую, во всяком случае не превосходит $4n \cdot \frac{S^2}{n^2}$ и может быть сделана сколь угодно малой: *кривая имеет площадь нуль.*

Отсюда — такое интересное следствие: *область, ограниченная спрямляемой кривой (или несколькими такими кривыми), заведомо квадрируема*, т. е. имеет площадь [**337**].

§ 5. Интеграл Стилтьеса

573. Определение интеграла Стилтьеса. Интеграл Стилтьеса (Th. J. Stieltjes) является непосредственным обобщением обычного определенного интеграла Римана [**295**]. Определяется он следующим образом.

Пусть в промежутке $[a, b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (1)$$

промежуток $[a, b]$ на части и положим $\lambda = \max \Delta x_i$. Выбрав в каждой из частей $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ по точке ξ_i, вычислим

значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ и умножим его на соответствующее промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ приращение функции $g(x)$

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

Наконец, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i). \tag{2}$$

Эта сумма носит название интегральной суммы Стилтьеса.

Конечный предел суммы Стилтьеса σ *при стремлении* $\lambda = \max \Delta x_i$ *к нулю называется интегралом Стилтьеса функции* $f(x)$ *по функции* $g(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i)^{*}. \tag{3}$$

Иной раз, желая особенно отчетливо подчеркнуть, что интеграл рассматривается в смысле Стилтьеса, употребляют обозначение

$$(\mathrm{s}) \int_a^b f(x)\, dg(x) \quad \text{или} \quad \mathop{\mathbf{S}}_a^b f(x)\, dg(x).$$

Предел здесь понимается в том же смысле, что и в случае обыкновенного определенного интеграла. Точнее говоря, число I называется интегралом Стилтьеса, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что лишь только промежуток $[a, b]$ раздроблен на части так, что $\lambda < \delta$, тотчас же выполняется неравенство

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

как бы ни выбирать точки ξ_i в соответствующих промежутках.

При существовании интеграла (3) говорят также, что *функция* $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ *интегрируема по функции* $g(x)$.

Читатель видит, что единственное (но существенное) отличие данного выше определения от обычного определения интеграла Римана состоит в том, что $f(\xi_i)$ умножается не на приращение Δx_i независимой переменной, а на приращение $\Delta g(x_i)$ второй функции. Таким образом, интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса, когда в качестве функции $g(x)$ взята сама независимая переменная x:

$$g(x) = x.$$

---

* Мы для определенности предполагали $a < b$; нетрудно аналогично рассмотреть и случай, когда $a > b$. Впрочем, он непосредственно приводится к предыдущему ввиду равенства $\int_a^b = -\int_b^a$.

574. Общие условия существования интеграла Стилтьеса. Установим общие условия существования интеграла Стилтьеса, ограничиваясь, впрочем, предположением, что *функция* $g(x)$ *монотонно возрастает.*

Отсюда следует, что при $a<b$ теперь все $\Delta g(x_i)>0$, наподобие того, как раньше было $\Delta x_i>0$. Это позволяет слово за словом, заменяя лишь Δx_i на $\Delta g(x_i)$, повторить все построения nn° **296** и **297.**

Аналогично суммам Дарбу, и здесь целесообразно ввести суммы

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta g(x_i),\quad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta g(x_i),$$

где m_i и M_i означают, соответственно, нижнюю и верхнюю точные границы функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i,\ x_{i+1}]$. Эти суммы мы будем называть *нижней и верхней суммами Дарбу-Стилтьеса.*

Прежде всего, ясно, что (при одном и том же разбиении)

$$s\leqslant\sigma\leqslant S,$$

причем s и S служат точными границами для стилтьесовых сумм σ.

Сами суммы Дарбу-Стилтьеса обладают, как и в простейшем случае [**296**], следующими двумя свойствами:

1-е свойство. *Если к имеющимся точкам деления добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса может от этого разве лишь возрасти, а верхняя сумма — разве лишь уменьшиться.*

2-е свойство. *Каждая нижняя сумма Дарбу-Стилтьеса не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы и отвечающей другому разбиению промежутка.*

Если ввести *нижний и верхний интегралы Дарбу-Стилтьеса:*

$$I_*=\sup\{s\} \text{ и } I^*=\inf\{S\},$$

то оказывается, что

$$s\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S.$$

Наконец, с помощью сумм Дарбу-Стилтьеса легко устанавливается для рассматриваемого случая основной признак существования интеграла Стилтьеса:

Теорема. *Для существования интеграла Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

или

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta g(x_i)=0, \tag{4}$$

если под ω_i, как обычно, разуметь колебание $M_i - m_i$ функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$.

Все доказательства, как указывалось, копируются с соответствующих доказательств, проведенных в nn° **296, 297**, и мы можем предоставить их читателю.

В следующем n° мы применим этот критерий к установлению важных парных классов функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых интеграл Стилтьеса существует.

575. Классы случаев существования интеграла Стилтьеса.

I. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение, то интеграл Стилтьеса*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \tag{5}$$

существует.

Сначала предположим, что $g(x)$ монотонно возрастает: тогда применим критерий предыдущего n°. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ найдется такое $\delta > 0$, что в любом промежутке с длиной, меньшей δ, колебание $f(x)$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$. Пусть теперь промежуток $[a, b]$ произвольно разбит на части так, что $\lambda = \max \Delta x_i < \delta$. Тогда все $\omega_i < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ и

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \cdot \sum_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \varepsilon,$$

откуда и следует выполнение условия (4), а стало быть и существование интеграла.

В общем случае, если функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение, она представима в виде разности двух ограниченных возрастающих функций: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ [**575**, 7°]. В соответствии с этим преобразуется и сумма Стилтьеса, отвечающая функции $g(x)$:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g_1(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g_2(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Так как по уже доказанному каждая из сумм σ_1 и σ_2 при $\lambda \to 0$ стремится к конечному пределу, то это справедливо и относительно суммы σ, что и требовалось доказать.

Можно ослабить условия, налагаемые на функцию $f(x)$, если одновременно усилить требования к функции $g(x)$:

II. *Если функция $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$ в смысле Римана, а $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$|g(\bar{x}) - g(x)| \leqslant L(\bar{x} - x) \tag{6}$$
$$(L = \text{const.},\ a \leqslant x < \bar{x} \leqslant b),$$

то интеграл (5) *существует.*

Для того чтобы опять иметь возможность применить установленный выше критерий, предположим сначала функцию $g(x)$ не только удовлетворяющей условию (6), но и монотонно возрастающей.

Ввиду (6), очевидно, $\Delta g(x_i) \leqslant L\Delta x_i$, так что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) \leqslant L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Но последняя сумма при $\lambda \to 0$ и сама стремится к 0 вследствие интегрируемости (в смысле Римана) функции $f(x)$ [297], а тогда стремится к нулю и первая сумма, что доказывает существование интеграла (5).

В общем случае функции $g(x)$, удовлетворяющей условию Липшица (6), представим ее в виде разности

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] = g_1(x) - g_2(x).$$

Функция $g_1(x) = Lx$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица и в то же время монотонно возрастает. То же справедливо и для функции $g_2(x) = Lx - g(x)$, так как, в силу (6), при $a \leqslant x < \bar{x} \leqslant b$

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \geqslant 0$$

и

$$|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \leqslant L(\bar{x} - x) + |g(\bar{x}) - g(x)| \leqslant 2L(\bar{x} - x).$$

В таком случае рассуждение завершается, как и выше.

III. *Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана, а функция $g(x)$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:*

$$g(x) = c + \int_a^{x} \varphi(t)\,dt, \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$, то интеграл (5) *существует.*

Пусть $\varphi(t) \geqslant 0$, так что $g(x)$ монотонно возрастает. Если $\varphi(t)$ интегрируема в собственном смысле и, следовательно, ограничена: $|\varphi(t)| \leqslant L$, то для $a \leqslant x < \bar{x} \leqslant b$ имеем

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant L(\bar{x} - x).$$

Таким образом, в этом случае $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, и интеграл существует в силу II.

Предположим теперь, что $\varphi(t)$ интегрируема в несобственном смысле. Ограничимся случаем одной особой точки, скажем b. Прежде всего, по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ выберем $\eta > 0$ так, чтобы было

$$\int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega}, \tag{8}$$

где Ω — общее колебание функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке.

Разобьем промежуток $[a, b]$ по произволу на части и составим сумму

$$\sum = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i).$$

Она разлагается на две суммы $\sum = \sum' + \sum''$, из коих первая отвечает промежуткам, целиком содержащимся в промежутке $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$, а вторая — остальным промежуткам. Последние наверное содержатся в промежутке $[b-\eta, b]$, если только $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$; тогда, в силу (8),

$$\sum'' < \Omega \int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как в промежутке $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ функция $\varphi(t)$ интегрируема в собственном смысле, то по доказанному при достаточно малом λ и сумма $\sum'$ станет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует (4), что и требовалось доказать.

В общем случае, когда функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$, мы рассмотрим функции

$$\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2},$$

очевидно, неотрицательные и интегрируемые в названном промежутке. Так как

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

то вопрос сводится, как и выше, к уже рассмотренному случаю.

Замечание. Пусть функция $g(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ и имеет, исключая разве лишь конечное число точек, произ-

водную $g'(x)$, причем эта производная* интегрируема (в собственном или несобственном смысле) от a до b; тогда, как известно [470°, замечание], имеет место формула типа (7):

$$g(x)=g(a)+\int_a^x g'(t)\,dt.$$

Если $g'(x)$ абсолютно интегрируема, то к функции $g(x)$ полностью приложимо изложенное в III.

576. Свойства интеграла Стилтьеса. Из определения интеграла Стилтьеса непосредственно вытекают следующие его свойства:

1°. $$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a);$$

2°. $$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dg(x)=\int_a^b f_1(x)\,dg(x)\pm\int_a^b f_2(x)\,dg(x);$$

3°. $$\int_a^b f(x)\,d[g_1(x)\pm g_2(x)]=\int_a^b f(x)\,dg_1(x)\pm\int_a^b f(x)\,dg_2(x);$$

4°. $$\int_a^b kf(x)\,d[lg(x)]=kl\cdot\int_a^b f(x)\,dg(x)\quad (k,\ l=\text{const.}).$$

При этом в случаях 2°, 3°, 4° из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой части.

Затем имеем

5°. $$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^c f(x)\,dg(x)+\int_c^b f(x)\,dg(x),$$

в предположении, что $a<c<b$ и существуют все три интеграла.

Для доказательства этой формулы достаточно лишь озаботиться включением точки c в число точек деления промежутка $[a, b]$ при составлении суммы Стилтьеса для интеграла $\int_a^b f\,dg$.

По поводу этой формулы сделаем ряд замечаний. Прежде всего, *из существования интеграла* $\int_a^b f\,dg$ *следует уже существование обоих интегралов* $\int_a^c f\,dg$ и $\int_c^b f\,dg$.

* Если ее значения в точках, где она не существует, выбрать по произволу.

Для своеобразного предельного процесса, с помощью которого из стилтьесовой суммы получается интеграл Стилтьеса, имеет место принцип сходимости Больцано-Коши. Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ ввиду существования интеграла $\int_a^b f\,dg$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две суммы σ и $\bar{\sigma}$ Стилтьеса, которым отвечают λ и $\bar{\lambda} < \delta$, разнятся меньше чем на ε. Если при этом в состав точек деления включить точку c, а точки деления, приходящиеся на промежуток $[c, b]$, брать в обоих случаях одними и теми же, то разность $\sigma - \bar{\sigma}$ сведется к разности $\sigma_1 - \bar{\sigma}_1$ двух сумм Стилтьеса, относящихся уже к промежутку $[a, c]$, ибо прочие слагаемые взаимно уничтожатся. Применяя к промежутку $[a, c]$ и вычисленным для него стилтьесовым суммам тот же принцип сходимости, заключим о существовании интеграла $\int_b^c f\,dg$. Аналогично устанавливается и существование интеграла $\int_c^b f\,dg$.

Особенно заслуживает быть отмеченным тот не имеющий прецедентов факт, что *из существования обоих интегралов* $\int_a^c f\,dg$ *и* $\int_c^b f\,dg$, *вообще говоря, не вытекает существование интеграла* $\int_a^b f\,dg$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть пример. Пусть в промежутке $[-1, 1]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы следующими равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } \quad 0 < x \leqslant 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ 1 & \text{при } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что интегралы

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x), \quad \int_{0}^{1} f(x)\,dg(x)$$

оба существуют и равны 0, ибо соответствующие им суммы Стилтьеса все равны 0: для первого это следует из того, что всегда $f(x) = 0$, для второго — из постоянства функции $g(x)$, благодаря чему всегда $\Delta g(x_i) = 0$.

В то же время интеграл

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$$

не существует. Действительно, разобьем промежуток $[-1,1]$ на части так, чтобы точка 0 не попала в состав точек деления, и составим сумму

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i).$$

Если точка 0 попадает в промежуток $[x_k, x_{k+1}]$, так что $x_k<0<x_{k+1}$, то в сумме σ останется только одно k-е слагаемое; остальные будут нули, потому что $\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)=0$ для $i\neq k$. Итак,

$$\sigma=f(\xi_k)\,[g(x_{k+1})-g(x_k)]=f(\xi_k).$$

В зависимости от того, будет ли $\xi_k\leqslant 0$ или $\xi_k>0$, окажется $\sigma=0$ или $\sigma=1$, так что σ предела не имеет.

Указанное своеобразное обстоятельство связано с наличием разрывов в точке $x=0$ для обеих функций $f(x)$ и $g(x)$ [см. 584, 3) и 4)].

577. Интегрирование по частям. Для интегралов Стилтьеса имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=f(x)\,g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,df(x), \tag{9}$$

в предположении, что существует один из этих интегралов; существование другого отсюда уже вытекает. Формула эта носит название *формулы интегрирования по частям*. Докажем ее.

Пусть существует интеграл $\int\limits_a^b g\,df$. Разложив промежуток $[a, b]$ на части $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$, выберем в этих частях произвольно по точке ξ_i, так что

$$a=x_0\leqslant\xi_0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{i-1}\leqslant\xi_{i-1}\leqslant x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\leqslant$$
$$\leqslant\ldots\leqslant x_{n-1}\leqslant\xi_{n-1}\leqslant x_n=b.$$

Сумму Стилтьеса для интеграла $\int\limits_a^b f\,dg$

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]$$

можно представить в виде

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})\,g(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_i)=$$
$$=-\Big\{g(a)f(\xi_0)+\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]-g(b)f(\xi_{n-1})\Big\}.$$

Если прибавить и отнять справа выражение

$$f(x)\,g(x)\Big|_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a),$$

то σ перепишется так:

$$\sigma = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \{\,g(a)\,[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] + g(b)\,[f(b) - f(\xi_{n-1})]\,\}.$$

Выражение в фигурных скобках представляет собою стилтьесову сумму для интеграла $\int_a^b g\,df$ (существование которого предположено!). Она отвечает разбиению промежутка $[a, b]$ точками деления

$$a \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant b,$$

если в качестве выбранных из промежутков $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ точек взять x_i, а для промежутков $[a, \xi_0]$ и $[\xi_{n-1}, b]$, соответственно, a и b. Если, как обычно, положить $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i)$, то теперь длины всех частичных промежутков не превзойдут 2λ. При $\lambda \to 0$ сумма в квадратных скобках стремится к $\int_a^b g\,df$, следовательно, существует предел и для σ, т. е. интеграл $\int_a^b f\,dg$, и этот интеграл определяется формулой (9).

Как следствие нашего рассуждения, особо отметим тот любопытный факт, что *если функция $g(x)$ в промежутке $[a, b]$ интегрируема по функции $f(x)$, то и функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$.*

Это замечание позволяет добавить ряд новых случаев существования интеграла Стилтьеса к тем, которые были рассмотрены в **575**, переменив роли функций f и g.

578. Приведение интеграла Стилтьеса к интегралу Римана. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, а $g(x)$ монотонно возрастает в этом промежутке, и притом в строгом смысле*. Тогда, как показал Лебег (H. Lebesgue), интеграл Стилтьеса $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$ с помощью подстановки $v = g(x)$ непосредственно приводится к интегралу Римана.

* Последнее мы предполагаем исключительно в целях некоторого упрощения изложения.

На черт. 29 изображен график функции $v = g(x)$. Для тех значений $x = x'$, при которых функция $g(x)$ испытывает скачок (ибо мы вовсе не предполагаем $g(x)$ обязательно непрерывной), мы дополняем график прямолинейным вертикальным отрезком, соединяющим точки $(x', g(x'-0))$ и $(x', g(x'+0))$. Так создается непрерывная линия, которая каждому значению v между $v_0 = g(a)$ и $V = g(b)$ относит одно определенное значение x между a и b. Эта функция $x = g^{-1}(v)$, очевидно, будет непрерывной и монотонно возрастающей в широком смысле; ее можно рассматривать как своего рода обратную для функции $v = g(x)$.

Именно, если ограничиться лишь теми значениями v, которые функция $v = g(x)$ действительно принимает при изменении x от a до b, то $x = g^{-1}(v)$ является обратной для нее в обычном смысле, т. е. относит v именно то значение x, при котором $g(x) = v$. Но из промежутка значений v

$$[g(x'-0),\ g(x'+0)],$$

связанного со скачком функции $g(x)$, лишь одно значение $v = v' = g(x')$ имеет себе соответствующим значение $x = x'$; другим значениям v в упомянутом промежутке никакие значения x, очевидно, не отвечают. Но мы условно относим и им то же значение $x = x'$; геометрически это и выразилось в дополнении графика функции $y = g(x)$ рядом вертикальных отрезков.

Черт. 29.

Докажем теперь, что

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv, \qquad (10)$$

где последний интеграл берется в обычном смысле, его существование обеспечено, так как функция $g^{-1}(v)$, а с нею и сложная функция $f(g^{-1}(v))$, непрерывна.

С этой целью разложим промежуток $[a, b]$ на части с помощью точек деления

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

и составим стилтьесову сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)]\,^*.$$

Если положить $v_i = g(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то будем иметь

$$v_0 < v_1 < \ldots < v_i < v_{i+1} < \ldots < v_n = V.$$

Так как $x_i = g^{-1}(v_i)$, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i))\,\Delta v_i \qquad (\Delta v_i = v_{i+1} - v_i).$$

---

* Для простоты выбирая в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ именно точку x_i.

Это выражение имеет вид римановой суммы для интеграла

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv.$$

Отсюда, однако, нельзя еще непосредственно заключить, переходя к пределу, о равенстве (10), ибо даже при $\Delta x_i \to 0$ $(\lambda \to 0)$ может оказаться, что Δv_i к нулю не стремится, если, например, между безгранично сближающимися x_i и x_{i+1} будет заключено значение $x = x'$, где функция $g(x)$ испытывает скачок. Поэтому мы будем рассуждать иначе.

Имеем

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(g^{-1}(v))\,dv$$

и

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)\,dv,$$

так что

$$\sigma - \int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} [f(x_i) - f(g^{-1}(v))]\,dv.$$

Предположим теперь Δx_i настолько малыми, чтобы колебания функции $f(x)$ во всех промежутках $[x_i, x_{i+1}]$ были меньше произвольного наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Так как

$$\text{при } v_i \leqslant v \leqslant v_{i+1}, \text{ очевидно, } x_i \leqslant g^{-1}(v) \leqslant v_{i+1},$$

то одновременно и

$$|f(x_i) - f(g^{-1}(v))| < \varepsilon.$$

В таком случае

$$\left| \sigma - \int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv \right| < \varepsilon (V - v_0).$$

Этим доказано, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv,$$

откуда и следует (10).

Несмотря на принципиальную важность полученного результата, он не дает практически удобного средства для вычисления интеграла Стилтьеса. Как осуществлять это вычисление в некоторых простейших случаях, мы покажем в следующем n°.

579. Вычисление интегралов Стилтьеса. Докажем следующую теорему:

1°. *Если функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана в промежутке $[a, b]$, а $g(x)$ представлена интегралом*

$$g(x) = c + \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(t)$ *абсолютно интегрируема в* $[a, b]$, *то*

$$\text{(S)}\int_a^b f(x)\,dg(x) = \text{(R)}\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{11}$$

Интеграл справа существует [298, 482]. Существование интеграла Стилтьеса при сделанных предположениях уже было доказано [575, III].

Остается лишь установить равенство (11).

Без умаления общности можно предположить функцию $\varphi(x)$ положительной [ср. стр. 94].

Составим, как обычно, сумму Стилтьеса

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\,\varphi(x)\,dx.$$

Так как, с другой стороны, можно написать

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

то будем иметь

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\,\varphi(x)\,dx.$$

Очевидно, для $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ будет $|f(\xi_i) - f(x)| \leqslant \omega_i$, где ω_i означает колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Отсюда вытекает такая оценка написанной выше разности:

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta g(x_i).$$

Но мы уже знаем [575, III], что при $\lambda \to 0$ последняя сумма стремится к 0, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

что и доказывает формулу (11).

В частности, из доказанной теоремы вытекает [если учесть замечание в конце n° 575] такое следствие, удобное для непосредственного применения на практике:

2°. *При прежних предположениях относительно функции* $f(x)$ *допустим, что функция* $g(x)$ *непрерывна во всем промежутке* $[a, b]$ *и имеет в нем, исключая разве лишь конечное число точек,*

производную $g'(x)$, которая в $[a, b]$ абсолютно интегрируема. Тогда*

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{12}$$

Интересно отметить, что интеграл справа в формуле (12) формально получается из интеграла слева, если, понимая символ $dg(x)$ буквально как дифференциал, заменить его выражением $g'(x)\,dx$.

Обращаясь к случаям, когда функция $g(x)$ оказывается разрывной (что для практики, как увидим, представляет особый интерес), начнем с рассмотрения «стандартной» разрывной функции $\rho(x)$, определяемой равенствами

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Она имеет разрыв первого рода — скачок — в точке $x = 0$ справа, причем величина скачка $\rho(+0) - \rho(0)$ равна 1; в точке $x = 0$ слева и в остальных точках функция $\rho(x)$ непрерывна. Функция $\rho(x - c)$ будет иметь такой же разрыв в точке $x = c$ справа; наоборот, $\rho(c - x)$ будет иметь подобный разрыв в точке $x = c$ слева, причем величина скачка будет равна -1.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = c$, и вычислим интеграл $(S)\int_a^b f(x)\,d\rho(x - c)$, где $a \leqslant c < b$ (при $c = b$ этот интеграл равен нулю).

Составим сумму Стилтьеса:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta\rho(x_i - c).$$

Пусть точка c попадет, скажем, в k-й промежуток, так что $x_k \leqslant c < x_{k+1}$. Тогда $\Delta\rho(x_k - c) = 1$, а при $i \neq k$, очевидно, $\Delta\rho(x_i - c) = 0$. Таким образом, вся сумма σ сводится к одному слагаемому: $\sigma = f(\xi_k)$. Пусть теперь $\lambda \to 0$. По непрерывности $f(\xi_k) \to f(c)$. Следовательно, существует (при $a \leqslant c < b$)

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\rho(x - c) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = f(c). \tag{13}$$

* См. сноску на стр. 95.

Аналогично можно убедиться в том, что (при $a < c \leqslant b$)

$$\text{(S)} \int_a^b f(x)\, d\rho\,(c - x) = -f(c) \tag{14}$$

(при $c = a$ этот интеграл обращается в нуль).

Теперь мы в состоянии доказать теорему, в некотором смысле более общую, чем 2°, а именно, отказаться от требования непрерывности функции $g(x)$:

3°. *Пусть функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ непрерывна, а $g(x)$ имеет в этом промежутке, исключая разве лишь конечное число точек, производную $g'(x)$, которая абсолютно интегрируема в $[a, b]$. При этом пусть функция $g(x)$ в конечном числе точек*

$$c_0 = a < c_1 < \ldots < c_k < \ldots < c_m = b$$

терпит разрыв первого рода. Тогда существует интеграл Стилтьеса и выражается формулой

$$\text{(S)} \int_a^b f(x)\, dg(x) = \text{(R)} \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx + f(a)\,[g(a+0) - g(a)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] +$$
$$+ f(b)\,[g(b) - g(b-0)]. \tag{15}$$

Характерно здесь наличие внеинтегральной суммы, где фигурируют скачки функции $g(x)$ в точках a или b — односторонние*.

Для упрощения записи введем обозначения для скачков функции $g(x)$ справа и слева:

$$\alpha_k^+ = g(c_k + 0) - g(c_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$
$$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k - 0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m);$$

очевидно, для $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k + 0) - g(c_k - 0)$.

Составим вспомогательную функцию:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho\,(x - c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho\,(c_k - x),$$

которая как бы вбирает в себя все разрывы функции $g(x)$, так что разность $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$, как мы сейчас установим, оказывается уже непрерывной.

---

* Если на деле в какой-либо из этих точек скачка нет, то соответствующее слагаемое суммы обращается в нуль.

Для значений x, отличных от всех c_k, непрерывность функции $g_2(x)$ не вызывает сомнений, ибо для этих значений непрерывны обе функции $g(x)$ и $g_1(x)$. Докажем теперь непрерывность $g_2(x)$ в точке c_k $(k<m)$ с п р а в а. Все слагаемые суммы $g_1(x)$, кроме члена $\alpha_k^+\rho(x-c_k)$, непрерывны при $x=c_k$ справа; поэтому достаточно изучить поведение выражения $g(x)-\alpha_k^+\rho(x-c_k)$. При $x=c_k$ оно имеет значение $g(c_k)$; но таков же и его предел при $x\to c_k+0$:

$$\lim_{x\to c_k+0}[g(x)-\alpha_k^+\rho(x-c_k)]=g(c_k+0)-\alpha_k^+=g(c_k).$$

Аналогично проверяется и непрерывность функции $g_2(x)$ в точке c_k $(k>0)$ с л е в а.

Далее, если взять точку x (отличную от всех c_k), в которой функция $g(x)$ имеет производную, то вблизи этой точки $g_1(x)$ сохраняет постоянное значение, следовательно, в ней и функция $g_2(x)$ имеет производную, причем

$$g_2'(x)=g'(x).$$

Для н е п р е р ы в н о й функции $g_2(x)$, по предыдущей теореме, существует интеграл С т и л т ь е с а

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,dg_2(x)=(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g_2'(x)\,dx=(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Точно так же легко вычислить и интеграл [см. (13), (14)]

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,dg_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,d\rho(x-c_k)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,d\rho(c_k-x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-f(c_k)=f(a)\,[g(a+0)-g(a)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)\,[g(b)-g(b-0)].$$

Складывая почленно эти два равенства, мы и придем к равенству (15); существование интеграла С т и л т ь е с а от $f(x)$ по функции $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ устанавливается попутно [576, 3°].

580. Примеры. 1) Вычислить по формуле (11) интегралы:

(а) $(\mathrm{S})\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x)$, (б) $(\mathrm{S})\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\sin x$, (в) $(\mathrm{S})\int_{-1}^{1} x\,d\,\mathrm{arctg}\,x$.

Решение. (а) $(S)\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x) = (R)\int_0^2 \frac{x^2}{1+x}\,dx =$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right)\Big|_0^2 = \ln 3 \quad \text{и т. д.}$$

Ответы: (б) $\frac{\pi}{2}-1$; (в) 0.

2) Вычислить по формуле (15) интегралы:

$$\text{(а)}\ (S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x),\ \text{где}\ g(x)=\begin{cases} 0 & \text{при}\ x=-1,\\ 1 & \text{при}\ -1<x<2,\\ -1 & \text{при}\ 2\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$$

$$\text{(б)}\ (S)\int_{0}^{2} x^2\,dg(x),\ \text{где}\ g(x)=\begin{cases} -1 & \text{при}\ 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 0 & \text{при}\ \frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{2},\\ 2 & \text{при}\ x=\frac{3}{2},\\ -2 & \text{при}\ \frac{3}{2}<x\leqslant 2.\end{cases}$$

Решение. (а) Функция $g(x)$ имеет скачок 1 при $x=-1$ и скачок -2 при $x=2$; в остальных точках $g'(x)=0$. Поэтому

$$(s)\int_{-1}^{3} x\,dg(x) = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -5.$$

(б) Скачок 1 при $x=\frac{1}{2}$ и -2 при $x=\frac{3}{2}$ (значение функции g при $x=\frac{3}{2}$ не влияет на результат); в прочих точках $g'(x)=0$.
Имеем:

$$(s)\int_0^2 x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2) = -\frac{17}{4}.$$

3) Вычислить по формуле (15) интегралы:

$$\text{(а)}\int_{-2}^{2} x\,dg(x),\ \text{(б)}\int_{-2}^{2} x^2 dg(x),\ \text{(в)}\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dg(x),$$

где

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{при}\ -2\leqslant x\leqslant -1,\\ 2 & \text{при}\ -1<x<0,\\ x^2+3 & \text{при}\ \ 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Решение. Функция $g(x)$ имеет скачки, равные 1, при $x=-1$ и $x=0$. Производная

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } -2\leqslant x<-1,\\ 0 & \text{при } -1<x<0,\\ 2x & \text{при } 0<x\leqslant 2.\end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1} x\,dx+2\int_{0}^{2} x^2\,dx+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=2\frac{5}{6}.$$

Аналогично

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x)=11\frac{1}{3} \text{ и } \int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dg(x)=15\frac{1}{20}.$$

4) Предположим, что вдоль отрезка $[a, b]$ оси x расположены массы, как сосредоточенные в отдельных точках, так и распределенные непрерывно. *Не делая различия между ними*, обозначим для $x>a$ через $\Phi(x)$ сумму всех масс, расположенных в промежутке $[a, x]$; сверх того, положим, $\Phi(a)=0$. Очевидно, $\Phi(x)$ — монотонно возрастающая функция. Поставим себе задачей найти статический момент этих масс относительно начала координат.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b.$$

На отрезке $(x_i, x_{i+1}]$ при $i>0$ содержится, очевидно, масса $\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$. Точно так же на отрезке $[a, x_1]$ содержится масса $\Phi(x_1)-\Phi(x_0)=\Delta\Phi(x_0)$. Считая массу во всех случаях сосредоточенной, например, на правом конце промежутка, получим для искомого статического момента приближенное выражение

$$M\doteq\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\,\Delta\Phi(x_i).$$

При стремлении к 0 всех Δx_i, в пределе придем к точному результату:

$$M=(\mathrm{S})\int_a^b x\,d\Phi(x). \tag{16}$$

Можно было бы и здесь, как это было разъяснено во втором томе по отношению к обыкновенному определенному интегралу [348], сначала установить «элементарный» статический момент $dM=x\,d\Phi(x)$, отвечающий отрезку оси от x до $x+dx$, а затем «просуммировать» эти элементы.

Аналогично для момента инерции I тех же масс относительно начала найдем формулу

$$I=(\mathrm{S})\int_a^b x^2\,d\Phi(x). \tag{17}$$

Важно подчеркнуть, что интеграл Стилтьеса дал возможность объединить одной интегральной формулой разнородные случаи непрерывно распределенных и сосредоточенных масс!

Пусть непрерывно распределенные массы имеют линейную плотность $\rho(x)$; кроме них пусть в точках $x = c_1, c_2, \ldots, c_k$ расположены сосредоточенные массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Тогда, исключая эти точки, функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x) = \rho(x).$$

В каждой же точке $x = c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ функция испытывает скачок, равный именно массе m_j, в этой точке сосредоточенной.

Если теперь разложить интеграл (16) по формуле (15), то получим

$$M = (\mathrm{S}) \int_a^b x\, d\Phi(x) = (\mathrm{R}) \int_a^b x \rho(x)\, dx + \sum_{j=1}^{k} c_j m_j.$$

Всмотревшись в правую часть, легко в первом члене узнать статический момент непрерывно распределенных масс, а во втором — статический момент сосредоточенных масс. Аналогичный результат получится и для интеграла (17).

5) Чтобы лучше уяснить себе содержание предыдущего упражнения, предлагается:

(а) составить выражение $\Phi(x)$ и построить график его для следующего распределения масс: массы величины 1 в точках $x = 1$, 2 и 3 и непрерывно распределенные массы с плотностью 2 в промежутке $[1, 3]$;

(б) то же — для такого распределения: массы величины 2 при $x = 2$ и 4 и непрерывно распределенные массы с плотностью $2x$ в промежутке $[0, 5]$;

(в) выяснить распределение масс, если $\Phi(x)$ равна функции $g(x)$ задачи 3).

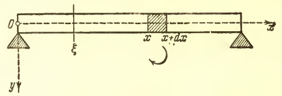
Ответы. (а) В промежутке $[1, 3]$ имеем

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 1, \\ 2x - 1 & \text{для } 1 < x < 2, \\ 2x & \text{для } 2 \leqslant x < 3, \\ 7 & \text{для } x = 3. \end{cases}$$

(б) В промежутке $[0, 5]$ имеем

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{для } 0 \leqslant x < 2, \\ x^2 + 2 & \text{для } 2 \leqslant x < 4, \\ x^2 + 4 & \text{для } 4 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

(в) Массы величины 1 в точках $x = -1$ и 0, в промежутке $[-2, -1]$ непрерывно распределенные массы с плотностью 1, в промежутке $[0, 2]$ — массы с плотностью $2x$.



Черт. 30.

6) Рассмотрим другой вопрос, в котором интеграл Стилтьеса играет такую же роль, как и в упражнении 4). Предположим, что на балку (черт. 30), покоящуюся на двух опорах *, кроме непрерывно распределенной нагрузки

* Это предположение мы делаем лишь ради простоты.

действуют и сосредоточенные силы. Расположим ось x вдоль по оси балки, а ось y вертикально вниз (см. чертеж). *Не делая различий между действующими силами*, обозначим для $x > 0$ через $F(x)$ сумму всех сил, приложенных на отрезке $[0, x]$ балки, включая и реакции опор; далее, пусть $F(0) = 0$. Силу $F(x)$ называют перерезывающим усилием в сечении x балки. При этом силы, направленные вниз, будем считать положительными, а вверх — отрицательными.

Поставим задачей определить так называемый изгибающий момент M в произвольном сечении $x = \xi$ балки. Под этим разумеют сумму моментов всех сил, действующих на правую (или на левую) часть балки, относительно этого сечения. При этом, когда речь идет о правой части балки, момент считают положительным, если он вращает эту часть по часовой стрелке (для левой части — обратное правило).

Так как на элементе $(x, x + dx]$, скажем, правой части балки приложена сила $F(x + dx) - F(x) = dF(x)$, создающая элементарный момент

$$dM = (x - \xi)\, dF(x),$$

то, «суммируя», получим

$$M = M(\xi) = (s) \int_{\xi}^{l} (x - \xi)\, dF(x).$$

Аналогично, исходя из левой части балки, можно было бы получить (учитывая изменение положительного направления для отсчета моментов)

$$M(\xi) = (S) \int_{0}^{\xi} (\xi - x)\, dF(x). \tag{18}$$

Легко непосредственно усмотреть, что оба выражения изгибающего момента в действительности тождественны. Их равенство равносильно условию

$$\int_{0}^{l} x\, dF(x) - \xi F(l) = 0,$$

которое является следствием из условий равновесия

$$F(l) = 0, \quad \int_{0}^{l} x\, dF(x) = 0,$$

выражающих равенство нулю суммы всех сил и суммы моментов (относительно начала) всех сил, действующих на балку.

Если интенсивность непрерывно распределенной нагрузки обозначить через $q(x)$, то, исключая точки, где приложены сосредоточенные силы, будет

$$\frac{dF(x)}{dx} = q(x).$$

Пусть сосредоточенные силы F_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) приложены в точках $x = x_j$. Тогда, очевидно, перерезывающее усилие именно в этих точках имеет скачки, соответственно равные F_j. Далее, применяя, например, к интегралу (18) формулу (15), получим

$$M(\xi) = \int_{0}^{\xi} (\xi - x)\, q(x)\, dx + \sum_{x_j < \xi} (\xi - x_j) F_j.$$

В двух слагаемых правой части легко узнать моменты, порожденные порознь непрерывной нагрузкой и сосредоточенными силами: *интеграл Стилтьеса охватывает их единой интегральной формулой.*

Установим еще один факт, интересный для теории сопротивления материалов. Произведя в формуле (18) интегрирование по частям, получим

$$M(\xi)=\int_0^{\xi}(\xi-x)\,dF(x)=(\xi-x)F(x)\Big|_0^{\xi}-\int_0^{\xi}F(x)\,d(\xi-x)=\int_0^{\xi}F(x)\,dx.$$

Отсюда ясно, что всюду, за исключением точек приложения сосредоточенных сил, имеет место равенство

$$\frac{dM}{d\xi}=F(\xi).$$

7) Пример. Пусть балка длины $l=3$ несет (черт. 31) «треугольную» нагрузку с интенсивностью $\frac{2}{3}x$; кроме того, пусть к ней приложены сосредоточенная сила, равная 3, в точке $x=1$, и реакции опор, обе равные -3 (они устанавливаются по закону рычага). Определить перерезывающее усилие $F(x)$ и изгибающий момент $M(\xi)$.

Ответ.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=0,\\ \frac{1}{3}x^2-3 & \text{при } 0<x<1,\\ \frac{1}{3}x^2 & \text{при } 1\leqslant x<3\\ 0 & \text{при } x=3;\end{cases}$$

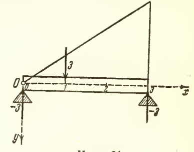
$$M(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{9}\xi^3-3\xi & \text{при } 0\leqslant\xi\leqslant 1,\\ \frac{1}{9}\xi^3-3 & \text{при } 1<\xi\leqslant 3.\end{cases}$$

8) Формула (15) может оказаться полезной и для вычисления обычных интегралов (в смысле Римана). Проиллюстрируем это на следующем общем примере.

Пусть $\varphi(x)$ — «кусочно-полиномиальная» функция в промежутке $[a, b]$; это означает, что промежуток разлагается на конечное число частей точками

$$a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_k=b$$

так, что в каждой из частей функция $\varphi(x)$ представляется полиномом не выше n-й степени. Заменив значения функции $\varphi(x)$ и всех ее производных в точках a и b нулями, обозначим через $\delta_j^{(i)}$ ($j=0, 1, \ldots, k$; $i=0, 1, \ldots, n$) величину скачка i-й производной $\varphi^{(i)}(x)$ в j-й точке $x=\xi_j$.



Черт. 31.

Пусть, далее, $f(x)$ — любая непрерывная функция; положим

$$F_1(x)=\int f(x)\,dx \text{ и, вообще, } F_s(x)=\int F_{s-1}(x)\,dx \quad (s>1).$$

Тогда имеет место следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{j=0}^{k} F_1(\xi_j)\,\delta_j^{(0)} + \sum_{j=0}^{k} F_2(\xi_j)\,\delta_j^{(1)} - \ldots + (-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k} F_{k+1}(\xi_j)\,\delta_j^{(k)}.$$

Действительно, последовательно находим

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = (\mathrm{S})\int_a^b \varphi(x)\,dF_1(x) = \varphi(x)F_1(x)\Big|_a^b - (\mathrm{S})\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x);$$

двойная подстановка исчезает, а интеграл

$$\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x) = \sum_j F_1(\xi_j)\,\delta_j^{(0)} + \int_a^b F_1(x)\,\varphi'(x)\,dx;$$

аналогично

$$\int_a^b F_1(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\sum_j F_2(\xi_j)\,\delta_j^{(1)} - \int_a^b F_2(x)\,\varphi''(x)\,dx$$

и т. д.

9) Установим, в заключение, с помощью формулы (11) одно полезное обобщение формулы интегрирования по частям для обыкновенных интегралов. Именно, если $u(x)$ и $v(x)$ обе абсолютно интегрируемы в промежутке $[a, b]$, а $U(x)$ и $V(x)$ определяются интегральными формулами:

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t)\,dt,$$

$$V(x) = V(a) + \int_a^x v(t)\,dt,$$

то справедлива формула

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,u(x)\,dx. \tag{19}$$

Для доказательства, по формуле (11) заменим интеграл слева интегралом Стилтьеса и проинтегрируем по частям [577]:

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dV(x) = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,dU(x).$$

Остается еще раз применить формулу (11) к последнему интегралу, чтобы придти к (19).

Здесь функции $u(x)$, $v(x)$ играют как бы роль производных от функций $U(x)$, $V(x)$, не будучи ими на деле. При непрерывности функций $u(x)$ и $v(x)$ мы возвращаемся к обычной формуле интегрирования по частям, ибо тогда наверное

$$U'(x) = u(x), \quad V'(x) = v(x).$$

581. Геометрическая иллюстрация интеграла Стилтьеса. Рассмотрим интеграл

$$(S)\int_a^b f(t)\,dg(t), \tag{20}$$

предполагая функцию $f(t)$ непрерывной и положительной, а $g(t)$ — лишь монотонно возрастающей (в строгом смысле); функция $g(t)$ может иметь и разрывы (скачки).

Система параметрических уравнений

$$x = g(t), \quad y = f(t) \tag{21}$$

выражает некоторую кривую (K), вообще говоря, разрывную (черт. 32). Если при некотором $t = t_0$ функция $g(t)$ испытывает скачок, так что $g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$, то этим предельным значениям $x = g(t)$ отвечает одно и то же предельное значение $y = f(t)$, равное $f(t_0)$. Дополним кривую (K) всеми горизонтальными отрезками, соединяющими пары точек



Черт. 32.

$$(g(t_0 - 0),\ f(t_0)) \text{ и } (g(t_0 + 0),\ f(t_0)),$$

отвечающие всем скачкам функции $g(t)$ (см. чертеж). Таким образом, составится уже непрерывная кривая (L). Покажем, что интеграл (20) представляет площадь фигуры под этой кривой, точнее, площадь фигуры, ограниченной кривой (L), осью x и двумя крайними ординатами, отвечающими абсциссам $g(a)$ и $g(b)$.

С этой целью разложим промежуток $[a, b]$ на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

и в соответствии с этим промежуток $[g(a), g(b)]$ на оси x — на части точками

$$g(a) < g(t_1) < \ldots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \ldots < g(b).$$

Введя наименьшее и наибольшее значения m_i и M_i функции $f(t)$ в i-м промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, составим нижнюю и верхнюю суммы Стилтьеса-Дарбу

$$s = \sum_i m_i\,\Delta g(t_i), \quad S = \sum_i M_i\,\Delta g(t_i).$$

Легко видеть теперь, что они представляют площади фигур, составленных из входящих и из выходящих прямоугольников, между которыми содержится рассматриваемая криволинейная фигура.

Так как при стремлении к 0 всех Δt_i обе суммы стремятся к общему пределу (20), то отсюда следует [336], что наша фигура квадрируема и площадью ее служит действительно интеграл (20).

582. Теорема о среднем, оценки. 1°. Пусть в промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

а $g(x)$ монотонно возрастает. Если существует интеграл Стилтьеса I от $f(x)$ по $g(x)$, то имеет место формула

$$I = (S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = \mu\,[g(b) - g(a)], \text{ где } m \leqslant \mu \leqslant M. \quad (22)$$

Это и есть теорема о среднем для интегралов Стилтьеса.

Для доказательства будем исходить из очевидных неравенств для стилтьесовой суммы σ:

$$m[g(b) - g(a)] \leqslant \sigma \leqslant M[g(b) - g(a)].$$

Переходя к пределу, получим

$$m[g(b) - g(a)] \leqslant I \leqslant M[g(b) - g(a)] \quad (23)$$

или *

$$m \leqslant \frac{I}{g(b) - g(a)} \leqslant M.$$

Обозначая написанное отношение через μ и придем к (22).

Если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ непрерывна, то обычным путем убеждаемся в том, что μ есть значение функции в некоторой точке этого промежутка, и формула (22) приобретает вид

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(\xi)\,[g(b) - g(a)], \text{ где } a \leqslant \xi \leqslant b. \quad (24)$$

2°. В практике интегралов Стилтьеса наиболее важным является случай, когда функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение. Для этого случая справедлива такая оценка интеграла Стилтьеса:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant MV, \quad (25)$$

где

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|, \quad V = \mathop{\mathrm{V}}_a^b g(x).$$

---

* Мы предполагаем $g(b) > g(a)$, ибо случай $g(b) = g(a)$ [т. е. $g(x) = \mathrm{const.}$] не представляет интереса: тогда обе части формулы (22) — нули.

Действительно, для суммы Стилтьеса σ будет

$$|\sigma| = \left|\sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i)\right| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)|\,|\Delta g(x_i)| \leqslant$$
$$\leqslant M\sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant MV,$$

так что остается лишь перейти к пределу, чтобы получить требуемое неравенство.

3°. Отсюда вытекает, в частности, и оценка близости суммы σ к самому интегралу Стилтьеса I (при прежних предположениях относительно функций f и g). Представив σ и I в виде

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\Delta g(x_i) = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\,dg(x),$$

$$I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dg(x)$$

и почленно вычитая эти равенства, получим

$$\sigma - I = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\,dg(x).$$

Если, как обычно, обозначить через ω_i колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, так что

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leqslant \omega_i \quad \text{для} \quad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},$$

то, применяя оценку (25) к каждому интегралу $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}$ в отдельности, будем иметь

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\,dg(x)\right| \leqslant \omega_i \bigvee_{x_i}^{x_{i+1}} g(x).$$

Если промежуток $[a, b]$ раздроблен на столь мелкие части, что все $\omega_i < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед взятое число, то заключаем, что

$$|\sigma - I| \leqslant \varepsilon \bigvee_a^b g(x). \tag{26}$$

Эти оценки будут нами использованы в следующем n°.

583. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса.

1°. *Пусть функции* $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *непрерывны в промежутке* $[a, b]$ *и при* $n \to \infty$ *равномерно стремятся к предельной функции*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

[очевидно, также непрерывной, **436**], *а* $g(x)$ — *функция с ограниченным изменением. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Доказательство. По заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ будет для всех x

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Тогда, в силу (25), для $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dg(x) \right| \leqslant \leqslant \varepsilon \bigvee_a^b g(x),$$

что, ввиду произвольности ε, и доказывает теорему.

2°. *Пусть теперь функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* $[a, b]$, *а функции* $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — *все с ограниченным изменением в этом промежутке. Если полные изменения этих функций в их совокупности ограничены:*

$$\bigvee_a^b g_n(x) \leqslant V \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и $g_n(x)$ *при* $n \to \infty$ *стремятся к предельной функции*

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x),$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Доказательство. Прежде всего убедимся в том, что предельная функция $g(x)$ сама также будет иметь ограниченное изменение. Разложив промежуток $[a, b]$ произвольным образом на части точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_m = b,$$

будем иметь (при любом n)

$$\sum_i |g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i)| \leqslant \bigvee_a^b g_n(x) \leqslant V.$$

Переходя к пределу здесь при $n \to \infty$, получим

$$\sum_i |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant V,$$

откуда и

$$\bigvee_a^b g(x) \leqslant V.$$

Составим суммы Стилтьеса

$$\sigma = \sum_i f(x_i)\, \Delta g(x_i), \quad \sigma_n = \sum_i f(x_i)\, \Delta g_n(x_i).$$

Если предположить, что промежуток $[a, b]$ при этом разложен на столь мелкие части, что колебание функции $f(x)$ в каждой из них будет уже меньше произвольного наперед взятого числа $\varepsilon > 0$, то, в силу оценки (26), при всех n

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f(x)\, dg_n(x)\right| \leqslant \varepsilon V, \quad \left|\sigma - \int_a^b f(x)\, dg(x)\right| \leqslant \varepsilon V. \tag{27}$$

С другой стороны, если разбиение, выбранное под указанным условием, фиксировать, то, очевидно, $\sigma_n \to \sigma$ при $n \to \infty$, так что найдется такое N, что для $n > N$ будет

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon. \tag{28}$$

Тогда для тех же значений n будем иметь, в силу (27) и (28),

$$\left|\int_a^b f\, dg_n - \int_a^b f\, dg\right| \leqslant \left|\int_a^b f\, dg_n - \sigma_n\right| + |\sigma_n - \sigma| +$$
$$+ \left|\sigma - \int_a^b f\, dg\right| < (2V + 1)\, \varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и следует требуемое заключение.

584. Примеры и дополнения. 1) *Предполагая функцию $g(x)$ монотонно возрастающей в строгом смысле, можно доказать относительно числа ξ, фигурирующего в формуле* (24), *более точное утверждение:* $a < \xi < b$.

Действительно, обозначив через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и считая $m < M$ *, легко найдем такую часть $[\alpha, \beta]$ этого промежутка, в которой границами $f(x)$ служат числа $m' > m$ и $M' < M$, так что [ср. (23)]

$$m[g(\beta)-g(\alpha)] < m'[g(\beta)-g(\alpha)] \leqslant (\mathrm{S})\int_\alpha^\beta \leqslant$$
$$\leqslant M'[g(\beta)-g(\alpha)] < M[g(\beta)-g(\alpha)].$$

Написав для промежутков $[a, \alpha]$ и $[\beta, b]$ неравенства вида (23) и складывая их с предыдущими, получим взамен (23) более точные неравенства:

$$m[g(b)-g(a)] < I < M[g(b)-g(a)],$$

так что число

$$\mu = \frac{I}{g(b)-g(a)}$$

лежит строго между m и M; а тогда найдется и ξ строго между a и b, для которого $\mu = f(\xi)$, и т. д.

2) Используя формулу (11) n° 579, формулу интегрирования по частям и теорему о среднем для интегралов Стилтьеса [577; 582, 1°], очень легко наново установить вторую теорему о среднем для обыкновенных интегралов [306].

Итак, пусть $f(x)$ интегрируема (в смысле Римана), а $g(x)$ монотонно возрастает ** в промежутке $[a, b]$. Введем функцию

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad (a \leqslant x \leqslant b);$$

она, как мы знаем, будет непрерывна [305, 11°].

Теперь последовательно имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,dg(x) =$$
$$= g(b)F(b) - F(\xi)[g(b)-g(a)] = g(a)F(\xi) + g(b)[F(b)-F(\xi)] =$$
$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b),$$

что и требовалось доказать.

Если $g(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле, то на основании сделанного в 1) замечания можно точнее сказать относительно ξ: $a < \xi < b$.

3) *Доказать, что, если в точке $x = c$ одна из функций f и g непрерывна, в то время как другая в окрестности этой точки ограничена, то существование интегралов* $(\mathrm{S})\int_a^c$ *и* $(\mathrm{S})\int_c^b$ *влечет за собой существование и* $(\mathrm{S})\int_a^b$ [см. 576, 5°].

---

* При $m = M$ функция $f(x)$ сводится к постоянной, и значение может быть вообще взято произвольно.

** Случай, когда $g(x)$ монотонно убывает, легко приводится к этому.

С этой целью заметим, что, если при составлении стилтьесовой суммы σ мы будем включать точку c в состав точек деления, то сумма σ будет слагаться из двух аналогичных сумм для частичных промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$; при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ она будет стремиться к сумме интегралов $\int\limits_a^c f dg + \int\limits_c^b f dg$.
Пусть теперь точка c не входит в число точек деления. Присоединяя к ним точку c, мы от σ перейдем к новой сумме $\bar{\sigma}$, про которую мы уже знаем, что при $\lambda \to 0$ она имеет указанный предел. Таким образом, достаточно показать, что разность $\sigma - \bar{\sigma}$ будет вместе с λ стремиться к 0.

Пусть точка c попадает в промежуток $[x_k, x_{k+1}]$; тогда сумма $\bar{\sigma}$ отличается от суммы σ лишь тем, что вместо слагаемого

$$f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

в ней имеется два слагаемых:

$$f(\xi')[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')[g(x_{k+1}) - g(c)],$$

где ξ' и ξ'' выбираются произвольно под условиями $x_k \leqslant \xi' \leqslant c$ и $c \leqslant \xi'' \leqslant x_{k+1}$. Положив для упрощения $\xi' = \xi'' = c$, сведем последнее выражение к

$$f(c)[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

так что

$$\sigma - \bar{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)][g(x_{k+1}) - g(x_k)]. \tag{29}$$

Когда $\lambda \to 0$, то один из множителей правой части бесконечно мал, в то время как второй ограничен; следовательно, $\sigma - \bar{\sigma} \to 0$, что и требовалось доказать.

4) *Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ оказываются разрывными в одной и той же точке $x = c$ $(a \leqslant c \leqslant b)$, то интеграл Стилтьеса*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) \tag{30}$$

заведомо не существует.

Для доказательства будем различать два случая. Пусть сначала $a < c < b$, и пределы $g(c-0)$ и $g(c+0)$ не равны. Тогда при построении суммы Стилтьеса мы точку c не станем вводить в число точек деления; пусть, скажем, $x_k < c < x_{k+1}$. Выбрав один раз $\xi_k \neq c$, а другой раз взяв c в качестве ξ_k, составим две суммы σ и $\bar{\sigma}$, разность которых сведется к выражению (29). Сближая точки деления, будем иметь

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \to g(c+0) - g(c-0) \neq 0.$$

Кроме того, точку ξ_k можно выбирать так, чтобы и разность $f(\xi_k) - f(c)$ была по абсолютной величине большей некоторого постоянного положительного числа. Тогда разность $\sigma - \bar{\sigma}$ не стремится к 0, так что интеграл существовать не может.

Если же $g(c-0) = g(c+0)$, но их общее значение отлично от $g(c)$ [«устранимый разрыв»]*, то, наоборот, включим c в число точек деления; пусть $c = x_k$. Если $f(x)$ имеет, например, разрыв в точке $x = c$ справа, то, как и только что, составим две суммы σ и $\bar{\sigma}$, разнящиеся лишь выбором ξ_k:

---

* Сюда относится и случай, когда либо $c = a$ и $g(a+0)$ отлично от $g(a)$, либо $c = b$ и $g(b-0)$ отлично от $g(b)$.

для σ точка ξ_k взята произвольно между $x_k = c$ и x_{k+1}, а для $\bar{\sigma}$ в качестве ξ_k взята c. Попрежнему имеем (29), и рассуждение завершается аналогично.

Упражнения 3) и 4) проливают свет на тот замечательный факт, о котором говорилось в конце n° **576**.

5) Пусть $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ имеет ограниченное изменение в промежутке $[a, b]$.

Опираясь на оценку (25), *доказать непрерывность интеграла Стильтьеса*

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t)$$

по переменному верхнему пределу x в точке x_0, где функция $g(x)$ непрерывна.

Заключение сразу вытекает из неравенства

$$|I(x_0 + \Delta x) - I(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f\,dg \right| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \cdot \bigvee_{x_0}^{x_0 + \Delta x} g(x),$$

если принять во внимание, что в точке x_0 должна быть непрерывна и вариация $\bigvee_a^x g(x)$ [**571**, 9°].

6) Если $\mathfrak{F}$ есть класс непрерывных в промежутке $[a, b]$ функций, а $\mathfrak{G}$ — класс функций с ограниченным изменением в этом промежутке, то, как известно, каждая функция одного класса интегрируема по каждой функции другого класса. *Доказать, что ни один, ни другой из этих классов не может быть расширен с сохранением упомянутого свойства.*

Это, ввиду 4), почти очевидно относительно класса $\mathfrak{F}$. Действительно, если функция $f(x)$ имеет точку разрыва x_0, то она заведомо не интегрируема, например, по функции с ограниченным изменением $\rho(x - x_0)$ [**573**], имеющей ту же точку разрыва.

Пусть теперь $g(x)$ в промежутке $[a, b]$ имеет бесконечное полное изменение; в этом предположении построим такую непрерывную функцию $f(x)$, для которой интеграл (30) не существует.

Если разделить промежуток $[a, b]$ пополам, то хоть в одной из половин полное изменение функции $g(x)$ тоже будет бесконечно; разделим эту половину снова пополам и т. д. По этому методу определится некоторая точка c, в каждой окрестности которой $g(x)$ не имеет ограниченного изменения. Для простоты пусть $c = b$.

В таком случае легко построить последовательность возрастающих и стремящихся к b значений $x = a_n$:

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < b, \; a_n \to b,$$

так, чтобы ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(a_{i+1}) - g(a_i)|$$

расходился. Для этого ряда затем можно подобрать такую последовательность стремящихся к 0 чисел $f_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, чтобы и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i\,|g(a_{i+1}) - g(a_i)| \tag{31}$$

все же расходился [ср. 375, 4) и 7)]. Теперь определим функцию $f(x)$, полагая

$$f(a_i) = f_i \operatorname{sign}[g(a_{i+1}) - g(a_i)]^* \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$
$$f(b) = 0,$$

а в промежутках $(a_i,\ a_{i+1})$ считая $f(x)$ линейной:

$$f(x) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(x - a_i) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Очевидно, $f(x)$ будет непрерывна. В то же время, ввиду расходимости ряда (31), при $n \to \infty$ и

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)[g(a_{i+1}) - g(a_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f_i\,|\,g(a_{i+1}) - g(a_i)\,| \to +\infty,$$

так что интеграл от f по g действительно не существует.

Доказанное утверждение можно сформулировать и так: *если интеграл Стилтьеса* (30) *для данной функции f существует по любой g из $\mathfrak{G}$, то f необходимо принадлежит $\mathfrak{F}$; аналогично, если этот интеграл по данной функции g существует для любой f из $\mathfrak{F}$, то g необходимо принадлежит $\mathfrak{G}$.*

7) В первой теореме о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса [583, 1°] мы поставили требование, чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ стремилась к предельной функции $f(x)$ равномерно. Можно, однако, заменить это требование более общим условием, что эти функции ограничены в их совокупности:

$$|f_n(x)| \leqslant M$$
$$(M = \text{const.},\ a \leqslant x \leqslant b,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

[Только при этом нужно еще наперед предположить непрерывность предельной функции $f(x)$.]

При доказательстве достаточно рассмотреть случай, когда $g(x)$ возрастает в строгом смысле [см. замечание в п° 570]. Но для этого случая можно воспользоваться преобразованием, проведенным в п° 578 [см. (10)]:

$$(\mathrm{S})\int_a^b f_n(x)\,dg(x) = (\mathrm{R})\int_{v_0}^{V} f_n(g^{-1}(v))\,dv,$$
$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,dg(x) = (\mathrm{R})\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,dv$$

и, имея дело уже с римановыми интегралами, просто применить теорему Арцела [526].

8) Укажем, в заключение, другую трактовку понятия интеграла Стилтьеса, связав его с понятием аддитивной функции от промежутка [ср. 348].

Пусть для каждой части $[\alpha, \beta]$ данного промежутка $[a, b]$ определено число $G([\alpha, \beta])$, причем, если промежуток $[\alpha, \beta]$ точкой γ разложен на части $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то и

$$G([\alpha, \beta]) = G([\alpha, \gamma]) + G([\gamma, \beta]).$$

Тогда $G([\alpha, \beta])$ есть аддитивная функция от переменного промежутка $[\alpha, \beta]$. Предположим, что кроме нее для промежутка $[a, b]$

* Напомним, что $\operatorname{sign} z$ есть $+1$, 0 или -1 в зависимости от того, будет ли $z > 0$, $= 0$ или < 0. Во всех случаях

$$z \operatorname{sign} z = |z|.$$

задана и функция точки $f(x)$. Разложим теперь, как обычно, промежуток $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на части $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, в каждой части произвольно выберем по точке ξ_i и, наконец, составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, G([x_i, x_{i+1}]). \tag{32}$$

Предел этой суммы при $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ и есть интеграл Стилтьеса, который естественно — учитывая процесс его построения — обозначить так:

$$\int_a^b f(x)\, G(dx). \tag{33}$$

Если определить вторую функцию точки $g(x)$, положив

$$g(x) = G([a, x]) \quad \text{для} \quad x > a, \; g(a) = 0,$$

то, ввиду аддитивности функции G, во всех случаях

$$G([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha), \tag{34}$$

так что сумма (32) сведется к обыкновенной стилтьесовой сумме

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)],$$

а предел (33) — к обыкновенному интегралу Стилтьеса

$$(S) \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Обратно, если существует последний интеграл, то, определив функцию от промежутка равенством (34) (причем легко проверить, что она окажется аддитивной), можно свести обыкновенный интеграл Стилтьеса к интегралу (33).

585. Сведе́ние криволинейного интеграла второго типа к интегралу Стилтьеса. После того как читатель освоился с интегралом Стилтьеса, полезно теперь вернуться к рассмотрению криволинейного интеграла второго типа [**546**]:

$$\int_{(AB)} f(x, y)\, dx \quad \left[\text{или} \quad \int_{(AB)} f(x, y)\, dy\right]. \tag{35}$$

Представим себе, что кривая (AB) задана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

и описывается именно в направлении от A к B, когда t монотонно изменяется от α до β. Пусть для определенности $\alpha < \beta$. Тогда точкам A_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, взятым на кривой для образования интегральной суммы, будут отвечать возрастающие значения параметра t:

$$t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \beta,$$

а выбранной на дуге $\overset{\smile}{A_iA_{i+1}}$ точке M_i — значение $t=\tau_i$, $t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}$ ($i=0, 1, \ldots, n-1$). Сама же интегральная сумма, например, для первого из интегралов, напишется в виде

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta\varphi(t_i).$$

Непосредственно ясно, что она представляет собою стилтьесову сумму, так что криволинейный интеграл второго типа по самому определению отождествляется с частным случаем интеграла Стилтьеса:

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx = (\mathrm{S}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,d\varphi(t).$$

Аналогично и

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dy = (\mathrm{S}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,d\psi(t).$$

Отсюда с легкостью получаются очень общие условия существования криволинейного интеграла (35); *достаточно предположить функцию* $f(x, y)$ *непрерывной, а функцию* $\varphi(t)$ [*или* $\psi(t)$, *смотря по случаю*] *имеющей ограниченное изменение* [**575**, 1°].

В частности, *если кривая* AB *спрямляема* [**572**], *а функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *непрерывны, то существует интеграл*

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\,d\varphi(t) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\,d\psi(t).$$

Теперь, если учесть сказанное в **579** о вычислении интегралов Стилтьеса [особенно, см. 2°], то можно наново получить формулы (4), (5) или (6) n° **547**, и даже при более общих предположениях, чем раньше.

Далее, легко обобщить теперь окончательный результат n° **551**: *площадь фигуры* (D), *ограниченной непрерывной спрямляемой кривой, выражается любой из формул* (9), (10) *или* (11) *указанного* n°. При этом ничего не придется менять в рассуждениях, ибо лемма n° **550** (и замечание к ней) непосредственно обобщается на случай спрямляемой кривой; см. также **572**, заключительное замечание.

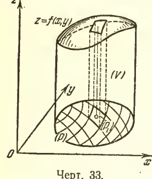
Наконец, и вся теория независимости криволинейного интеграла от пути [§ 3] также непосредственно распространяется на случай интегралов, взятых по любым спрямляемым путям.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Определение и простейшие свойства двойного интеграла

586. Задача об объеме цилиндрического бруса. Наподобие того, как задача о площади криволинейной трапеции привела нас к понятию простого определенного интеграла [**294**], аналогичная задача об объеме цилиндрического бруса приведет нас к новому понятию — д в о й н о г о (определенного) интеграла.



Черт. 33.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью

$$z = f(x, y), \qquad (1)$$

с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z, наконец, снизу — плоской фигурой (P) на плоскости xy (черт. 33). Требуется найти объем V тела *.

Для решения этой задачи мы прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему, состоящему в разложении искомой величины на элементарные части, приближенному подсчету каждой части, суммированию и последующему предельному переходу. С этой целью разложим область (P) сетью кривых на части (P_1), (P_2), ..., (P_n) и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело.

Для подсчета объема отдельных столбиков возьмем произвольно в каждой фигуре (P_i) по точке: (ξ_i, η_i). Если приближенно принять каждый столбик за настоящий цилиндр с высотой, равной апликате $f(\xi_i, \eta_i)$, то объем отдельного столбика оказывается приближенно равным

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i,$$

* Если функцию $f(x, y)$ предположить непрерывной, а плоскую область (P) — квадрируемой, то самое с у щ е с т в о в а н и е объема для данного случая легко вытекает из соображений, изложенных в пп° **341** и **337**.

где P_i означает площадь фигуры (P_i). В таком случае приближенное выражение объема всего тела будет

$$V \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры площадок (P_i), увеличивая их число. В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей (P_i), это равенство делается точным, так что

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i, \tag{2}$$

и поставленная задача решена.

Предел этого вида и есть *двойной интеграл от функции* $f(x, y)$ *по области* (P); он обозначается символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP,$$

так что формула (2) для объема принимает вид

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP\,*. \tag{2*}$$

Таким образом, двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого определенного интеграла на случай функции двух переменных. Он играет важную роль также при определении различных геометрических и физических величин.

587. Свед́ение двойного интеграла к повторному. Продолжая трактовать двойной интеграл геометрически, как объем цилиндрического бруса, мы дадим здесь же указания относительно его вычисления путем свед́ения к повторному интегралу.

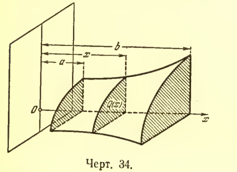
Во втором томе мы уже имели дело с задачей вычисления объема тела (V) по его поперечным сечениям [**342**]. Напомним относящуюся сюда формулу. Пусть тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$ (черт. 34). Допустим, что сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси x и отвечающей абсциссе x $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеет площадь $Q(x)$. Тогда объем тела, в предположении его существования, выразится формулой

$$V = \int_a^b Q(x)\, dx. \tag{3}$$

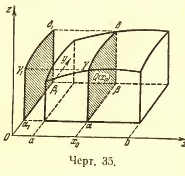
* Выводу этой формулы нетрудно придать и вполне строгую форму; см. замечание в п° 590.

Применим теперь эту формулу к вычислению объема цилиндрического бруса, о котором была речь в предыдущем n°. Начнем с простого случая, когда в основании бруса лежит прямоугольник $[a, b; c, d]$ (черт. 35).

Сечение бруса плоскостью $x = x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ есть криволинейная трапеция $\alpha\beta\gamma\delta$. Для нахождения ее площади спроектируем эту



Черт. 34.



Черт. 35.

фигуру на плоскость yz; мы получим конгруентную с ней трапецию $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (ибо проектирование происходит без искажения). Итак,

$$Q(x_0) = \text{пл. } \alpha\beta\gamma\delta = \text{пл. } \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1.$$

Но уравнение линии $\gamma_1\delta_1$ на плоскости yz, очевидно, будет

$$z = f(x_0, y) \qquad (c \leqslant y \leqslant d).$$

Пользуясь известным выражением площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла, будем иметь

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\,dy.$$

Так как наше рассуждение относится к любому сечению, то вообще для $a \leqslant x \leqslant b$

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy\,^*.$$

Подставляя это значение $Q(x)$ в формулу (3), получим

$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

* Эта функция от x к тому же непрерывна [503], что мы и предполагали при выводе формулы (3).

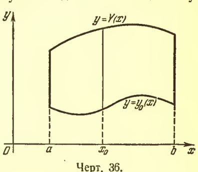
Но мы имеем для объема V и выражение (2), следовательно,

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy \tag{4}$$

— двойной интеграл приведен к повторному.

Аналогичный результат можно получить и для более общего случая, когда область (P) на плоскости xy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми:

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b)$$



Черт. 36.

и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$ (черт. 36). Разница по сравнению с рассмотренным случаем состоит в следующем: раньше при любом фиксированном $x = x_0$ изменение y происходило в одном и том же промежутке $[c, d]$, а теперь этот промежуток

$$[y_0(x_0),\ Y(x_0)]$$

сам зависит от x_0, так что

$$Q(x_0) = \int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y)\,dy.$$

Окончательно получим

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy\,^*. \tag{5}$$

Познакомив читателя с понятием двойного интеграла и с его вычислением в геометрической трактовке, мы перейдем теперь к более общему изложению вопроса с чисто аналитической точки зрения.

588. Определение двойного интеграла. Впрочем, и здесь нам не обойтись без геометрии или, по крайней мере, без геометрического языка [160—163]. Мы будем говорить о «двумерной области» (P), где определена рассматриваемая функция двух переменных, «кривыми» делить ее на частичные «области», будем брать «площади» этих «областей» и т. п. На деле это — «области» и «кривые» из арифметического двумерного пространства, их «точками» служат пары чисел. Но обыкновенно все эти «образы» заменяются для удобства соответствующими им настоящими геометрическими образами, не делая никакой разницы между ними. В частности,

* И здесь внутренний интеграл представляет собой непрерывную функцию от x [см. 509].

под «площадью области» из арифметического двумерного пространства разумеется всегда площадь соответствующей геометрической области.

Напомним, что для квадрируемости области, ограниченной какой-либо кривой, необходимо и достаточно, чтобы эта кривая имела площадь 0 [337]. Широкий класс таких кривых образуют гладкие кривые или кривые, состоящие из конечного числа гладких кусков (так называемые кусочно-гладкие кривые)*. *Мы будем предполагать впредь, что как контур области* (P), *так и кривые, которыми мы разлагаем ее на части, все имеют площадь* 0 (например, принадлежат к указанному классу); этим обеспечивается существование всех нужных нам площадей.

Вернемся теперь к понятию двойного интеграла, фактически уже введенному в n° **586**, и дадим в развернутом виде общее его определение.

Пусть в области (P) определена функция $f(x, y)$**. Разобьем область (P) сетью кривых на конечное число областей (P_1), (P_2), ... , (P_n), площади которых будут $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Хотя проще всего эти частичные области представлять себе связными, но для облегчения дальнейшего изложения выгодно не исключать для них возможности быть и несвязными. В пределах i-й элементарной области (P_i) возьмем по произволу точку (ξ_i, η_i), значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i)$ умножим на площадь P_i соответствующей области и все подобные произведения сложим. Полученную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$$

будем называть интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области (P).

Обозначим через λ наибольший из диаметров*** частичных областей (P_i).

Конечный предел[4*] I *интегральной суммы* σ *при* $\lambda \to 0$ *называется двойным интегралом функции* $f(x, y)$ *в области* (P) и обозначается символом

$$I = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

Функция, имеющая интеграл, называется *интегрируемой.*

---

* Можно, не нарушая указанного свойства, допустить даже наличие конечного числа особых точек.

** Никаких предположений о непрерывности ее мы при этом не делаем.

*** Напомним, что диаметром точечного множества называется точная верхняя граница расстояний между двумя произвольными точками множества. В случае плоской замкнутой области, ограниченной непрерывной кривой, диаметром служит попросту наибольшая хорда. См. **174**.

[4*] Читатель легко сам установит точный смысл этого нового «предела».

589. Условия существования двойного интеграла. Интегрируемая функция необходимо должна быть ограниченной. Действительно, в противном случае при любом заданном способе разложения области (P) на части можно было бы за счет выбора точек (ξ_i, η_i) сделать интегральную сумму произвольно большой.

Обращаясь к рассмотрению условий интегрируемости данной функции $f(x, y)$, мы будем поэтому наперед предполагать ее ограниченной:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Как и в случае функции от одной переменной, здесь также удобно ввести так называемые *нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:*

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

где m_i и M_i означают, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы значений функции $f(x, y)$ в области (P_i).

При данном способе разложения области (P) на части, независимо от выбора точек (ξ_i, η_i), будут выполняться неравенства

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Но за счет надлежащего выбора этих точек можно значения $f(\xi_i, \eta_i)$ сделать сколь угодно близкими к m_i (M_i), а вместе с этим сумму σ сделать сколь угодно близкой к s (S). Таким образом, *верхняя и нижняя суммы Дарбу являются, соответственно, точными верхней и нижней границами интегральных сумм,* отвечающих тому же способу разложения области.

Для сумм Дарбу, как и в линейном случае, могут быть установлены следующие свойства.

1-е свойство. *При дальнейшем дроблении частей (P_i), с добавлением к старым линиям деления новых, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя — не возрастает.*

2-е свойство. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому способу разложения области (P).*

Доказательство проводится аналогично прежнему [296]; лишь в тех случаях, когда там говорилось о точках деления, здесь приходится говорить о линиях деления.

Есть, однако, один момент, на котором нам хотелось бы задержать внимание читателя. В линейном случае каждая новая точка деления отчетливо разлагает один из старых промежутков на два; общей частью двух промежутков является тоже промежуток. В плоском случае положение усложняется тем, что две кривые могут пересекаться между собой во многих точках (и даже в бесконечном множестве точек). Поэтому связная частичная область может новой

кривой рассекаться и на не связные части; точно так же и общей частью двух связных областей может оказаться не связная область. Вот почему мы с самого начала не исключали из рассмотрения разложения основной области на несвязные части!

Далее устанавливаются понятия *нижнего и верхнего интегралов* Дарбу:

$$I_* = \sup\{s\}, \quad I^* = \inf\{S\},$$

причем оказывается, что

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

Наконец, путем буквального воспроизведения доказательства для линейного случая [297] и здесь получается

Теорема. *Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

или в других обозначениях

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0, \tag{6}$$

где ω_i есть колебание $M_i - m_i$ функции $f(x, y)$ в частичной области (P_i).

590. Классы интегрируемых функций. С помощью установленного выше признака интегрируемости легко доказать:

I. *Всякая непрерывная в области* (P) *функция* $f(x, y)$ *интегрируема.*

Действительно, если функция f непрерывна в (замкнутой) области (P), то по свойству равномерной непрерывности каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что в любой части области (P) с диаметром, меньшим чем δ, колебание функции будет меньше чем ε. Пусть теперь область (P) разложена на части (P_i), диаметры которых все меньше δ. Тогда все колебания $\omega_i < \varepsilon$, и

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

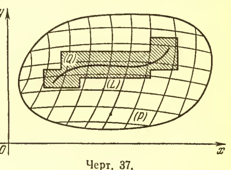
откуда и следует выполнение условия (6). Этим интегрируемость функции доказана.

Замечание. Теперь легко уже придать полную строгость выводу формулы (2*) для объема цилиндрического бруса. Это делается совершенно так же, как и при выводе интегральной формулы для площади криволинейной трапеции [329] — с привлечением входящих и выходящих тел, объемы которых выражаются суммами Дарбу.

Для того чтобы несколько расширить класс функций, для которых установлена интегрируемость, мы будем нуждаться в следующей лемме.

Лемма. *Пусть в области* (P) *задана некоторая кривая* (L), *имеющая площадь* 0. *Тогда каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что, лишь только область* (P) *разложена на части с диаметрами, меньшими* δ, *сумма площадей тех из них, которые имеют с* (L) *общие точки, будет меньше* ε.

По предположению, кривую (L) можно погрузить в многоугольную область (Q) с площадью, меньшей чем ε. Сделать это можно так, чтобы кривая (L) и контур (K) упомянутой области не имели общих точек. Тогда расстояние между переменными точками обеих кривых достигает своего наименьшего значения $\delta > 0$*.



Черт. 37.

Разложим теперь область (P) по произволу на части так, чтобы диаметры их были $< \delta$. Те из них, которые задевают кривую (L), необходимо целиком будут лежать в области (Q), следовательно, общая их площадь меньше ε.

II. *Если ограниченная функция* $f(x, y)$ *имеет разрывы разве лишь на конечном числе кривых с площадью* 0, *то она интегрируема.*

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. По предположению, все «линии разрыва» функции $f(x, y)$ можно заключить внутрь многоугольной области (Q) с общей площадью $< \varepsilon$. На черт. 37 эта область покрыта штриховкой. Границей ее служит конечное число ломаных (L), которые, очевидно, сами имеют площадь 0.

В замкнутой области, получающейся из (P) выделением внутренности области (Q), функция $f(x, y)$ сплошь непрерывна, значит и равномерно непрерывна. Следовательно, по заданному ε найдется такое число $\delta_1 > 0$, что во всякой части этой области, диаметр которой меньше δ_1, колебание функции $f(x, y)$ будет $< \varepsilon$.

Теперь, в силу леммы, можно найти и такое $\delta_2 > 0$, что всякий раз, как область (P) произвольными кривыми разлагается на части с диаметрами, меньшими чем δ_2, сумма площадей тех из них, которые задевают совокупность ломаных (L) — границу выделенной многоугольной области (Q), — наверное будет $< \varepsilon$.

---

* См. том второй, сноску на стр. 191.

Пусть δ будет наименьшее из двух чисел δ_1, δ_2. Разложим область (P) на части (P_1), (P_2), ..., (P_n), диаметры которых меньше δ, и рассмотрим соответствующую сумму

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

Разобьем ее на две суммы:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

предполагая, что значок i' отвечает таким областям $(P_{i'})$, которые целиком лежат вне выделенной области (Q), а значок i'' — всем прочим. Оценим каждую из этих сумм в отдельности.

Так как все $(P_{i'})$ лежат в области, полученной из (P) выделением (Q), и диаметры их $< \delta \leqslant \delta_1$, то все $\omega_{i'} < \varepsilon$, так что

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

С другой стороны, если через Ω обозначить колебание функции $f(x, y)$ во всей области (P), то будем иметь (так как $\omega_i \leqslant \Omega$)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqslant \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

Здесь $\sum P_{i''}$ есть сумма площадей тех из областей (P_i), которые 1) либо целиком лежат в выключенной области (Q), 2) либо задевают границу (L) этой области. Общая площадь первых меньше ε, ибо $Q < \varepsilon$; то же можно сказать и об общей площади вторых, поскольку область разложена на части с диаметрами, меньшими чем $\delta \leqslant \delta_2$. Итак, $\sum P_{i''} < 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon.$$

Окончательно, при $\lambda < \delta$, оказывается:

$$\sum_i \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\,\varepsilon.$$

Так как правая часть этого неравенства произвольно мала вместе с ε, то выполняется условие (6) и т. д.

591. Нижний и верхний интегралы, как пределы. В двумерном случае также имеет место

Теорема Дарбу. *Для любой ограниченной в (P) функции $f(x, y)$ выполняются предельные равенства*

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S$$

[ср. 301].

Мы наметим доказательство (например, для верхних сумм), так как оно в одном пункте существенно разнится от рассуждения, проведенного для линейного случая.

Как и там, по заданному $\varepsilon > 0$, сначала разложим с помощью сетки кривых область (P) на части так, чтобы для соответствующей суммы S' было

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Упомянутая только что сетка кривых — обозначим их в совокупности через (L) — имеет площадь 0. Тогда, по лемме предыдущего n°, найдется такое $\delta > 0$, что, как бы область (P) ни разложить на части (P_i) с диаметрами $< \delta$, сумма площадей тех из них, которые задевают хоть одну из кривых (L), будет $< \frac{\varepsilon}{2\Omega}$, где Ω — полное колебание функции f в области (P).

Обозначим через S сумму, отвечающую произвольному такому разложению, и сравним ее с суммой S'', которая получится, если мы к имеющимся налицо кривым деления присоединим целиком всю сетку (L). По 1-му свойству сумм Дарбу [589], $S'' \leqslant S'$, так что и подавно

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разнятся же суммы S и S'' лишь теми слагаемыми, которые отвечают частям (P_i), рассекаемым кривыми (L). Так как сумма площадей этих частей $< \frac{\varepsilon}{2\Omega}$, то легко сообразить, что

$$S - S'' < \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно,

$$I^* \leqslant S < I^* + \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Теперь критерий существования интеграла приводится к равенству

$$I_* = I^*.$$

С его помощью, как и в линейном случае, устанавливается, что для интегрируемости функции достаточно выполнения при любом $\varepsilon > 0$ неравенства

$$S - s < \varepsilon$$

хотя бы для одной пары сумм Дарбу.

592. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов.

1°. *Если произвольным образом изменить значения интегрируемой в (P) функции $f(x, y)$ вдоль какой-либо кривой (L) с площадью 0 (с тем лишь условием, чтобы и измененная функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в (P), и ее интеграл равен интегралу от $f(x, y)$.*

Для доказательства нужно составить интегральные суммы для измененной и исходной функций. Они могут разниться лишь теми слагаемыми, которые относятся к областям (P_i), задевающим кривую (L). Но, по лемме n° **590**, общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$, откуда уже легко заключить, что обе интегральные суммы стремятся к общему пределу.

Таким образом, *существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подинтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с площадью* 0.

2°. *Если область* (P), *в которой задана функция* $f(x, y)$, *кривой* (L) (*с площадью* 0) *разложена на две области* (P') *и* (P''), *то из интегрируемости функции* $f(x, y)$ *во всей области* (P) *следует ее интегрируемость в частичных областях* (P') *и* (P''), *и обратно — из интегрируемости функции в обеих областях* (P') *и* (P'') *вытекает интегрируемость в области* (P). *При этом*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dP + \iint\limits_{(P'')} f(x, y)\,dP.$$

Разложим области (P') и (P'') произвольным образом на части; тем самым и (P) разложится на части:

$$(P_1),\ (P_2),\ \ldots,\ (P_n).$$

Если значком i' отметить части, содержащиеся в (P'), а значком i'' — части, содержащиеся в (P''), то

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}.$$

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в (P), так что при $\lambda \to 0$ стремится к нулю сумма слева; тогда каждая из сумм справа и подавно стремится к нулю, так что наша функция интегрируема также в (P') и (P'').

Обратно, если имеет место последнее обстоятельство, так что при $\lambda \to 0$ стремятся к нулю обе суммы справа, то и сумма слева также стремится к нулю. Однако нужно помнить, что она построена не для произвольного разбиения области (P) на части: ведь мы исходили из разложения порознь областей (P') и (P'').

Чтобы от произвольного разложения области (P) перейти к разложению этого частного вида, достаточно присоединить к линиям деления кривую (L). Соответствующие им суммы будут разниться лишь слагаемыми, отвечающими тем элементарным областям, которые задевают кривую (L). Но, по лемме n° **590**, их общая площадь стремится к нулю при $\lambda \to 0$, и обе суммы разнятся на бесконечно малую. Таким образом, условие (6) выполняется в полной общности, и функция $f(x, y)$ оказывается интегрируемой в (P).

Наконец, доказываемая формула получается переходом к пределу при $\lambda \to 0$ из равенства

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)\,P_i = \sum f(\xi_{i'}, \eta_{i'})\,P_{i'} + \sum f(\xi_{i''}, \eta_{i''})\,P_{i''}.$$

Аналогично, из рассмотрения интегральных сумм с помощью перехода к пределу получаются и следующие три свойства:

3°. *Если умножить интегрируемую в (P) функцию $f(x, y)$ на постоянную k, то полученная функция также будет интегрируема, и при этом*

$$\iint_{(P)} k f(x, y)\, dP = k \iint_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

4°. *Если в области (P) интегрируемы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, то интегрируема и функция $f(x, y) \pm g(x, y)$, причем*

$$\iint_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dP = \iint_{(P)} f(x, y)\, dP \pm \iint_{(P)} g(x, y)\, dP.$$

5°. *Если для интегрируемых в (P) функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то*

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP \leqslant \iint_{(P)} g(x, y)\, dP.$$

Далее,

6°. *В случае интегрируемости функции $f(x, y)$ интегрируема и функция $|f(x, y)|$, и имеет место неравенство*

$$\left| \iint_{(P)} f(x, y)\, dP \right| \leqslant \iint_{(P)} |f(x, y)|\, dP.$$

Интегрируемость функции $|f|$ следует из простого замечания, что колебание $\tilde{\omega}_i$ этой функции в любой области P_i не превосходит соответствующего колебания ω_i функции f. Действительно, тогда

$$\sum \tilde{\omega}_i P_i \leqslant \sum \omega_i P_i,$$

и стремление к нулю второй суммы влечет за собой стремление к нулю первой.

Доказываемое же неравенство получается предельным переходом из неравенства

$$\left| \sum f(\xi_i, \eta_i) P_i \right| \leqslant \sum |f(\xi_i, \eta_i)| P_i.$$

7°. *Если интегрируемая в (P) функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

то

$$mP \leqslant \iint_{(P)} f(x, y)\, dP \leqslant MP. \tag{7}$$

Это получается предельным переходом из очевидного неравенства

$$mP \leqslant \sum f(\xi_i, \eta_i) P_i \leqslant MP.$$

Если разделить все части неравенств (7) на P:

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP}{P} \leqslant M$$

и через μ обозначить среднее отношение, то получим другую запись неравенства (7)

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \mu P \quad (m \leqslant \mu \leqslant M), \tag{8}$$

которая выражает так называемую теорему о среднем значении.

Предположим теперь, в частности, что функция $f(x, y)$ непрерывна в (P), и возьмем в качестве m и M ее наименьшее и наибольшее значения в области (P) — по теореме Вейерштрасса, **173**, они существуют! Тогда по известной теореме Больцано-Коши, **171**, непрерывная функция $f(x, y)$, принимающая значения m и M, должна пройти и через каждое промежуточное значение. Таким образом, во всяком случае в области (P) должна найтись такая точка $(\bar{x}, \bar{y})$, что $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$, и формула (8) принимает вид:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P. \tag{9}$$

Это — особенно употребительная форма теоремы о среднем.

Так же легко переносится на рассматриваемый случай и обобщенная теорема о среднем значении [**304**, 10°]; предоставляем это читателю.

593. Интеграл как аддитивная функция области; дифференцирование по области. Рассмотрим (замкнутую) плоскую область (P) и содержащиеся в ней частичные (замкнутые) области (p). Мы будем предполагать все области квадрируемыми (по обстоятельствам они могут подлежать и другим ограничениям). *Если каждой части* (p) *области* (P) *сопоставляется некоторое определенное число*

$$\Phi = \Phi((p)),$$

то этим определяется «функция от области (p)*» для указанных* (p). Примером такой функции от области может служить площадь области, непрерывно распределенная по ней масса, статические моменты этой массы, непрерывно распределенная нагрузка или вообще действующая на нее сила и т. п.

Если при произвольном разложении области (p) *на взаимно не налегающие части*

$$(p) = (p') + (p'')$$

всегда оказывается, что

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')),$$

то функцию $\Phi((p))$ *от области называют аддитивной.* Все функции, приведенные выше в виде примера, обладают этим свойством аддитивности. Аддитивные функции от области представляют особую важность, ибо часто встречаются при изучении явлений природы.

Пусть в квадрируемой области (P) задана интегрируемая функция точки $f(M)=f(x, y)$; тогда она будет интегрируема в любой квадрируемой же части (p) области (P), так что интеграл

$$\Phi((p))=\iint\limits_{(p)} f(x, y)\,dP \tag{10}$$

также есть функция от области (p). Ввиду **592**, 2° и она будет, очевидно, аддитивной функцией.

Обратимся теперь к «дифференцированию функции $\Phi((p))$ по области». Пусть M — фиксированная точка области (P), а (p) — любая содержащая эту точку частичная область. *Если отношение*

$$\frac{\Phi((p))}{p},$$

где p есть площадь области (p), стремится к определенному конечному пределу $f=f(M)$ при безграничном убывании диаметра области (p), то этот предел называется производной от $\Phi((p))$ по области в точке M. Если $\Phi((p))$, например, есть масса, непрерывно распределенная по плоской фигуре (p), то $f(M)$ есть не что иное, как плотность распределения масс в точке M; если $\Phi((p))$ означает силу, действующую на фигуру (p), то $f(M)$ выражает удельное давление в точке M, и т. п.

Особый интерес для нас представляет случай, когда функция от области выражается интегралом вида (10), где $f(x, y)$ — непрерывная в области (P) функция. Мы покажем, что *производной по области в точке M от интеграла будет подинтегральная функция, вычисленная именно в этой точке,* т. е.

$$f(M)=f(x, y).$$

Действительно, взяв область (p), о которой говорится в определении производной, имеем по теореме о среднем [см. (9)]

$$\Phi((p))=f(\bar{x}, \bar{y})\cdot p,$$

где $(\bar{x}, \bar{y})$ есть некоторая точка области (p). Если диаметр области (p) стремится к нулю, то точка $(\bar{x}, \bar{y})$ безгранично сближается с (x, y) и, по непрерывности,

$$\frac{\Phi((p))}{p}=f(\bar{x}, \bar{y})\to f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, двойной интеграл (10) по переменной области является в особом смысле «первообразной» для подинтегральной функции точки: он восстанавливает функцию области, для которой эта функция точки служит производной по области. Естественно встает вопрос, в какой мере однозначно вообще «первообразная» определяется своей производной.

В этом направлении можно доказать такое предложение: *две аддитивные функции от области, $\Phi_1((p))$ и $\Phi_2((p))$, имеющие во всех точках основной области (P) одну и ту же производную по области, тождественны.*

Если перейти к рассмотрению разности $\Phi((p)) = \Phi_1((p)) - \Phi_2((p))$, дело сведется к доказательству того, что *аддитивная функция области $\Phi((p))$, производная которой во всех точках области (P) равна нулю, и сама тождественно обращается в нуль.*

Действительно, по самому определению производной, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, каждую точку M области (P) можно окружить такой окрестностью, чтобы для любой заключенной в ней части (p) этой области, содержащей M, было

$$\left|\frac{\Phi((p))}{p}\right| < \varepsilon.$$

С помощью леммы Бореля [175], примененной к системе этих окрестностей, удается затем разложить область (P) на конечное число взаимно не налегающих областей:

$$(P) = (p_1) + (p_2) + \ldots + (p_k)$$

так, чтобы для каждой из них было ($i = 1, 2, \ldots, k$)

$$\left|\frac{\Phi((p_i))}{p_i}\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |\Phi((p_i))| < p_i\varepsilon.$$

Ввиду же предположенной аддитивности функции $\Phi((p))$ имеем

$$\Phi((P)) = \sum_i \Phi((p_i)).$$

Отсюда, в связи с предыдущим неравенством,

$$|\Phi((P))| \leqslant \sum_i |\Phi((p_i))| < P\varepsilon.$$

Но ε здесь произвольно, значит $\Phi((P)) = 0$. Этим и доказано наше утверждение, поскольку вместо (P) могла быть взята и любая частичная область (p).

Сопоставляя все сказанное, мы приходим к такому заключительному утверждению: *двойной интеграл* (10) *по переменной области представляет собой единственную аддитивную «первообразную» для стоящей под знаком интеграла функции точки*.*

* Эта функция предполагается, как и выше, непрерывной.

Поэтому, например, без вычислений ясно, что по заданной плотности $\rho(M)=\rho(x, y)$ распределения масс в точке M вся масса, распределенная по фигуре (P), выразится интегралом

$$m=\iint_{(P)} \rho(x, y)\, dP;$$

если $q(M)=q(x, y)$ есть удельное давление в точке M, то вся действующая на фигуру (P) сила будет

$$F=\iint_{(P)} q(x, y)\, dP,$$

и т. п.

Замечание. Выше нам приходилось уже говорить об аддитивных функциях от промежутка [348; 584, 8)]. Так как такая функция всегда представляет собой разность двух значений некоторой функции точки, то не было надобности для «линейного» случая развивать теорию вроде изложенной выше для «плоского» случая. Однако в теореме о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу [305, 12°] читатель легко усмотрит аналог доказанной только что теоремы о дифференцировании двойного интеграла по области, а рассуждения n° **348** можно трактовать как доказательство того, что интеграл есть единственная аддитивная функция от промежутка, служащая «первообразной» для данной функции точки.

§ 2. Вычисление двойного интеграла

594. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области. С этим вопросом в геометрической трактовке и при некоторых частных предположениях мы уже имели дело в n° **587**.

Рассмотрим теперь его средствами анализа и притом в самой общей форме; начнем мы с простого случая, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник $(P)=[a, b; c, d]$.

Теорема. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в прямоугольнике $(P)=[a, b; c, d]$, существуют двойной интеграл*

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP \qquad (1)$$

и — при каждом постоянном значении x из $[a, b]$ — простой интеграл

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\, dy \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \qquad (2)$$

то существует также повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{3}$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy^{*}. \tag{4}$$

Доказательство. Разобьем промежутки $[a, b]$ и $[c, d]$, определяющие прямоугольник (P), на части, вставляя точки деления

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$
$$y_0 = c < y_1 < \ldots < y_k < y_{k+1} < \ldots < y_m = d.$$

Тогда прямоугольник (P) разложится на частичные прямоугольники (черт. 38)



Черт. 38.

$$(P_{i,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Обозначим через $m_{i,k}$ и $M_{i,k}$, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $(P_{i,k})$, так что для всех точек (x, y) этого прямоугольника

$$m_{i,k} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{i,k}.$$

Фиксируя x в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ по произволу: $x = \xi_i$, и интегрируя по y от y_k до y_{k+1}, будем иметь [**304**, 8°]

$$m_{i,k}\, \Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\, dy \leqslant M_{i,k}\, \Delta y_k,$$

где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$; интеграл по y существует, так как предположено существование интеграла (2) по всему промежутку $[c, d]$. Суммируя подобные неравенства по k от 0 до $m-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\, \Delta y_k \leqslant I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\, \Delta y_k.$$

* Читатель легко усмотрит в этом утверждении видоизменение известной теоремы о двойном и повторном пределах [168].

Если умножить все части этих неравенств на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и просуммировать по значку i от 0 до $n-1$, то найдем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k.$$

Посредине мы получили интегральную сумму для функции $I(x)$. Что же касается до крайних членов, то они представляют собою не что иное, как суммы s и S Дарбу для двойного интеграла (1). Действительно, так как $\Delta x_i \Delta y_k$ есть площадь $P_{i,k}$ прямоугольника $(P_{i,k})$, то, например, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

Таким образом, окончательно

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i \leqslant S.$$

Если теперь все Δx_i и Δy_k одновременно устремить к нулю, то, ввиду существования двойного интеграла (1), обе суммы s и S будут стремиться к нему, как к пределу. В таком случае и

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP,$$

т. е. двойной интеграл (1) представляет собой в то же время и интеграл от функции $I(x)$:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

что и требовалось доказать.

Меняя роли переменных x и y, наряду с (4) можно доказать и формулу

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{4*}$$

в предположении, что при $y = \text{const.}$ существует интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Замечание. Если вместе с двойным интегралом (1) существуют оба простых интеграла:

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \quad (x = \text{const.}) \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x, y)\,dx \quad (y = \text{const.}),$$

то имеют место одновременно обе формулы (4), (4*), откуда

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Этот результат мы установили выше [528], не пользуясь предположением о существовании двойного интеграла.

Применение формулы (4) или (4*) обусловлено существованием двойного интеграла и одного из простых. Если функция $f(x, y)$ непрерывна (случай, который обычно встречается на практике), то существование всех упомянутых интегралов обеспечено; по отношению к двойному, например, это следует из **590**, I. В этом случае любой из упомянутых формул можно пользоваться для фактического вычисления двойного интеграла, так как вычисление простых интегралов представляет гораздо более простую задачу.

При доказательстве формулы (4) всего естественнее было разложить прямоугольник (P) прямыми, параллельными осям, на прямоугольные элементы с площадями $\Delta x_i \Delta y_k$. Желая в самом символе двойного интеграла указать на происхождение его от деления области на части прямыми, параллельными осям, вместо $\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP$ часто пишут

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy \quad \left[\text{или} \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dy\,dx\right].$$

Больше того, имея в виду сведе́ние двойного интеграла, распространенного на прямоугольник $(P) = [a, b; c, d]$, к повторному, и самый двойной интеграл часто обозначают символом, сходным с повторным:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx \quad \text{или} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy.$$

При этом обозначении друг другу соответствуют «внешний интеграл» и «внешний дифференциал», так что стоит лишь поставить скобки, чтобы получить тот или другой из повторных интегралов:

$$\int_a^b \left\{\int_c^d f(x, y)\,dy\right\} dx \quad \text{или} \quad \int_c^d \left\{\int_a^b f(x, y)\,dx\right\} dy.$$

595. Примеры. 1) Вычислить интеграл, распространенный на прямоугольник $(P)=[3, 4; 1, 2]$:

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \int\limits_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}.$$

Решение. По формуле (4*) пишем

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 dy \int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}.$$

Найдем сначала внутренний интеграл:

$$\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4},$$

отсюда

$$\iint\limits_{(P)} \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_1^2 \left[\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right] dy = \ln\frac{25}{24}.$$

2) Вычислить интегралы

(а) $I_1 = \int\limits_1^3 \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy,$ (б) $I_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2},$

(в) $I_3 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$

Решение.

(а) $I_1 = \int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx = \int\limits_1^3 (195y - 6y^3)\,dy = 660.$

(б) $I_2 = \int\limits_0^1 x^2 dx \cdot \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{12}.$

(в) Проще представить I_3 по формуле (4) в виде

$$I_3 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

ибо сразу получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

так что

$$I_3 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right) dx =$$

$$= \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_0^1 = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Если прибегнуть к другому повторному интегралу, то квадратуры окажутся несколько более сложными:

$$I_2=\int_0^1 y\,dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},\qquad \int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I_2=\int_0^1\frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Легко преобразовать этот ответ к прежнему виду.

3) Найти объем V тела, ограниченного снизу плоскостью xy, с боков плоскостями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, а сверху эллиптическим параболоидом

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}.$$

Решение. Прежде всего по формуле (2*)

$$V=\iint\limits_{[0,\,a;\,0,\,b]}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dP.$$

Самое же вычисление интеграла произведем по формуле (4*):

$$V=\int_0^b dy\int_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\int_0^b\left(\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right)dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

4) То же для тела, ограниченного плоскостью xy, поверхностью $x^2+z^2=R^2$ $(z>0)$ и плоскостями $y=0$ и $y=H$.

Решение. Если за основание тела принять прямоугольник $[-R,R;0,H]$ на плоскости xy, то

$$V=\int_0^H\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy=2H\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2H}{2}.$$

[Конечно, проще было бы рассматривать тело, как цилиндр, имеющий основанием полукруг на плоскости xz.]

5) То же для тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ $(b>a>0,\ d>c>0)$ и гиперболическим параболоидом $z=\frac{xy}{m}$ $(m>0)$.

Ответ. $V=\frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}$.

6) Доказать, что

$$\int_0^1\int_0^1(xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_0^1 y^y\,dy.$$

Подинтегральная функция в двойном интеграле, если при $xy=0$ приписать ей значение 1, будет непрерывна во всем квадрате [0, 1; 0, 1].

Имеем

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 dy\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx.$$

Делая во внутреннем интеграле подстановку $xy=t$ (при $y=\text{const.}>0$), а затем интегрируя по частям, последовательно получим для двойного интеграла выражение

$$\int_0^1 \frac{dy}{y}\int_0^y t^t\,dt = \ln y\cdot\int_0^y t^t\,dt\Big|_0^1 - \int_0^1 y^y\ln y\,dy.$$

Двойная подстановка обращается в 0, так как интеграл $\int_0^y t^t\,dt$ при $y\to 0$ есть бесконечно малая первого порядка *. Что же касается последнего интеграла, то, ввиду тождества

$$(y^y)' = y^y\ln y + y^y,$$

он приводится к интегралу $\int_0^1 y^y\,dy$.

7) Доказать, что (при любом $z=\text{const.}$)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\lambda)\,d\lambda\right\}^2.$$

Для этой цели каждый из интегралов разложим в ряд по степеням z. По отношению к простому интегралу это уже было сделано в **440**, 13):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\lambda)\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right\}.$$

Подинтегральная функция в двойном интеграле разлагается в ряд

$$\cos(2z\sin\varphi\sin\theta) = 1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{(2z)^{2i}}{2i!}\sin^{2i}\varphi\sin^{2i}\theta,$$

* Ведь $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\int_0^y t^t\,dt = \lim\limits_{t\to 0} t^t = 1.$

равномерно сходящийся для всех значений φ и θ в квадрате $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$. Интегрируя его почленно в этом квадрате, получим *

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{2i!} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Но [см. **312** (8)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\right]^2,$$

так что после простых преобразований

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi^2}{4}\left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!}{2^{2i}[i!]^4}\right\}.$$

Легко проверить теперь [см. **390**, 3)], что, действительно,

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i} \cdot (2i)!}{2^{2i}[i!]^4} = \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right\}^2.$$

Таким образом, значение предложенного двойного интеграла может быть выражено через бесселеву функцию с нулевым значком:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi^2}{4}[J_0(z)]^2.$$

8) Доказать, что при любом k $(0 < k < 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\theta}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\lambda}} = \frac{\pi}{2} F(k).$$

---

* Без дальнейших пояснений читатель распространит и понятие равномерно сходящегося ряда и теорему о почленном его интегрировании на случай, когда члены ряда зависят от двух переменных.

Указание. Оба интеграла разложить по степеням k; для интеграла справа это разложение нам уже встречалось [440, 13)].

9) Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$, а функция $g(y)$ интегрируема в промежутке $[c, d]$, то функция $f(x)g(y)$ от двух переменных будет интегрируема в прямоугольнике $(P)=[a, b; c, d]$.

Указание. Вопрос можно свести к интегрируемости в (P) порознь функций $f(x)$ и $g(y)$, рассматриваемых как функции от двух переменных*. Для того же, чтобы установить это, удобно воспользоваться облегченным критерием интегрируемости, указанным в конце п° **591**.

Заметим, что при этом

$$\iint\limits_{(P)} f(x)g(y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\left\{\int\limits_a^b f(x)g(y)\,dx\right\}=$$
$$=\int\limits_c^d g(y)\left\{\int\limits_a^b f(x)\,dx\right\}dy=\int\limits_a^b f(x)\,dx\cdot\int\limits_c^d g(y)\,dy,$$

так что двойной интеграл приводится здесь к произведению двух простых интегралов.

Иной раз, наоборот, оказывается полезным представить произведение двух простых интегралов в виде двойного интеграла. Ниже мы приводим некоторые примеры применения этой идеи.

10) Доказать неравенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\cdot\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2,$$

где $f(x)$ — положительная непрерывная функция.

Без умаления общности можно предположить, что $a<b$. Так как интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, и можно в любом из интегралов букву x заменить буквой y, то левая часть неравенства перепишется так:

$$I=\iint\limits_{(P)}\frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy=\iint\limits_{(P)}\frac{f(y)}{f(x)}\,dx\,dy,$$

где $(P)=[a, b; a, b]$. Отсюда

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)}\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dx\,dy=\iint\limits_{(P)}\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}\,dx\,dy.$$

В силу очевидного неравенства $2AB\leqslant A^2+B^2$ подинтегральная функция $\geqslant 1$, так что [см. **592**, 7°]

$$I\geqslant(b-a)^2,$$

что и требовалось доказать.

11) *Неравенство Буняковского.* Мы уже имели дело с этим неравенством [**321**]. В виде упражнения дадим новый вывод его для случая функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых в $[a, b]$ в собственном смысле.

Рассмотрим интеграл

$$B=\iint\limits_{(P)}[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\,dx\,dy,$$

---

* Если теорему п° **299**, II распространить на функции от двух переменных.

где (P) есть квадрат $[a, b; a, b]$. Раскрывая скобки, имеем [см. 9)]

$$B=\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(y)\,dy-2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\cdot\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy+$$
$$+\int_a^b f^2(y)\,dy\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

или, наконец, снова пользуясь независимостью интеграла от обозначения независимой переменной:

$$B=2\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx-\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\right\}.$$

Так как в интеграле B подинтегральное выражение неотрицательно, то и $B\geqslant 0$, откуда и следует требуемое неравенство

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Замечание. Из него, в частности, вытекает и неравенство предыдущего упражнения (если f заменить на $\sqrt{f}$, а g на $\frac{1}{\sqrt{f}}$).

12) *Неравенство Чебышева*. Сходными рассуждениями доказывается неравенство

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,g(x)\,dx\leqslant\int_a^b p(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx,$$

которое принадлежит П. Л. Чебышеву. Здесь $p(x)$ есть положительная интегрируемая функция, а $f(x)$ и $g(x)$ — монотонно возрастающие функции.

Пусть $a<b$. Рассмотрим разность

$$\Delta=\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,dx-\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,g(x)\,dx.$$

Заменяя во вторых множителях обоих членов букву x на y, представим эту разность Δ в виде

$$\Delta=\int_a^b\int_a^b p(x)\,p(y)\,f(x)\,[g(x)-g(y)]\,dx\,dy.$$

Обменяем теперь ролями x и y:

$$\Delta=\int_a^b\int_a^b p(x)\,p(y)\,f(y)\,[g(y)-g(x)]\,dx\,dy.$$

Наконец, если взять полусумму обоих выражений, получим

$$\Delta=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,dx\,dy.$$

Так как обе функции f и g монотонно возрастают, то обе квадратные скобки одного знака, т. е. подинтегральное выражение всегда неотрицательно, а тогда и $\Delta\geqslant 0$, чем и доказано требуемое неравенство.

Легко видеть, что оно остается в силе и в том случае, когда обе функции f и g убывают. В случае, когда одна из них убывает, а другая возрастает, неравенство меняет смысл.

13) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $(P)=[a, b; c, d]$. Обозначая через (x, y) произвольную точку в этом прямоугольнике, рассмотрим функцию, выраженную двойным интегралом:

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(u, v)\,dv\,du.$$

Если представить его в виде повторного интеграла:

$$F(x,y)=\int_a^x du\int_c^y f(u, v)\,dv,$$

то, дифференцируя сначала по x, затем по y, последовательно получим *

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_c^y f(x,v)\,dv,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=f(x, y).$$

Мы пришли к аналогу теоремы о дифференцировании простого интеграла по переменному верхнему пределу. Точно так же установим, что и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=f(x, y).$$

14) Пусть $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике $(P)=[a, b; c, d]$. Если для этой функции (которую на этот раз мы не предполагаем обязательно непрерывной) существует «первообразная» функция $\Phi(x, y)$, в том смысле, что

$$\frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x\,\partial y}=f(x, y),$$

то

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy=\Phi(b, d)-\Phi(b, c)-\Phi(a, d)+\Phi(a, c).$$

Это — аналог формулы, выражающей обыкновенный определенный интеграл через первообразную.

---

* Следует учесть, что подинтегральная функция $\int_c^y f(u, v)\,dv$ для внешнего интеграла есть непрерывная функция от u [506].

Наметим доказательство. Разложим прямоугольник $[a, b; c, d]$, как и в n° **594**, на частичные прямоугольники

$$[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \quad (i=0, 1, \ldots, n-1;\ k=0, 1, \ldots, m-1).$$

Дважды применяя к выражению

$$\Phi(x_{i+1}, y_{k+1}) - \Phi(x_{i+1}, y_k) - \Phi(x_i, y_{k+1}) + \Phi(x_i, y_k)$$

формулу конечных приращений *, представим его в виде

$$\Phi''_{xy}(\xi_{ik}, \eta_{ik})\,\Delta x_i \Delta y_k = f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\,\Delta x_i \Delta y_k,$$

где $x_i \leqslant \xi_{ik} \leqslant x_{i+1}$, $y_k \leqslant \eta_{ik} \leqslant y_{k+1}$. Суммируя по i и k, получим

$$\sum_{i,\,k} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\,\Delta x_i \Delta y_k = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c).$$

Наконец, перейдем к пределу.

Как видим, схема рассуждений — та же, что и при доказательстве основной формулы интегрального исчисления, выражающей простой определенный интеграл через первообразную [**310**].

В заключение приведем два поучительных примера, устанавливающих взаимную *независимость* условий теоремы n° **594**.

15) Если x — рациональное число, то, представив его в виде несократимой дроби с положительным знаменателем, будем обозначать последний через q_x. Определим в квадрате $(P) = [0, 1; 0, 1]$ функцию $f(x, y)$, положив:

$$f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}, \text{ если } x \text{ и } y \text{ оба рациональны,}$$
$$f(x, y) = 0 \quad \text{— в прочих случаях.}$$

Функция будет разрывна во всех точках квадрата, имеющих рациональные координаты, а в остальных — непрерывна.

Так как, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, лишь в *конечном* числе точек может быть $f > \varepsilon$, то условие интегрируемости, установленное в n° **589**, выполняется, и *двойной* интеграл

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP$$

существует; он равен 0.

При иррациональном значении y функция $f(x, y)$ обращается в 0 для всех x, так что и

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx = 0.$$

Если же y рационально, то $f(x, y) = 0$ для иррациональных значений x, а для рациональных x имеем: $f(x, y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}$. Эта функция от переменной x в любом промежутке ее изменения имеет колебание $> \frac{1}{q_y}$, следовательно, *для нее по x не существует интеграла*. Значит, не может быть речи и о повторном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\,dx.$$

---

* Ср. преобразование выражения W при доказательстве теоремы о перестановке двух дифференцирований в n° **190**.

Аналогично устанавливается, что не существует и интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$$

16) Положим теперь $f(x, y) = 1$ во всех точках квадрата, для которых обе координаты x, y рациональны и притом $q_x = q_y$, и $f(x, y) = 0$ в прочих точках.

Так как в любой части квадрата колебание функции f равно 1, то двойной интеграл

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP$$

на этот раз не существует.

В то же время при постоянном y функция $f(x, y)$ либо тождественно равна 0 (если y иррационально), либо может быть отлична от 0 лишь для конечного числа значений x (если y рационально). В обоих случаях

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = 0,$$

значит, существует и повторный интеграл

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx = 0.$$

Точно так же существует и интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = 0.$$

[Ср. 528!]

Черт. 39.

596. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области. Рассмотрим область (P), ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми:

$$y = y_0(x), \quad y = Y(x)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b),$$

а с боков — двумя ординатами: $x = a$ и $x = b$ (черт. 39). Тогда аналогично теореме n° **594** имеет место следующая

Теорема. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в области (P), существует двойной интеграл*

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP$$

и — при каждом постоянном значении x из $[a, b]$ — простой интеграл

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy,$$

то существует также повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy$$

и выполняется равенство

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy. \tag{6}$$

Доказательство строится на сведéнии этого случая к рассмотренному в n° **594**. Именно, заключим область (P) в прямоугольник

$$(R) = [a, b; c, d],$$

полагая $c = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} y_0(x)$, а $d = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} Y(x)$ (см. черт. 39), и определим в этом прямоугольнике функцию $f^*(x, y)$ следующим образом:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если точка } (x, y) \text{ принадлежит области } (P), \\ 0 & \text{в прочих точках прямоугольника } (R). \end{cases}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы n° **594**.

Прежде всего, она интегрируема в области (P), ибо здесь она совпадает с интегрируемой по условию функцией $f(x, y)$; очевидно, поэтому

$$\iint_{(P)} f^*(x, y)\, dP = \iint_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

С другой стороны, $f^*(x, y) = 0$ вне (P) и, следовательно, интегрируема и в остальной части $(Q) = (R) - (P)$ прямоугольника (R)*, причем

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y)\, dQ = 0.$$

Тогда, в силу **592**, 2°, функция f^* интегрируема во всем прямоугольнике (R) и

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)\, dR = \iint_{(P)} f(x, y)\, dP. \tag{7}$$

При постоянном значении x в $[a, b]$ существует интеграл

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_c^{y_0(x)} f^* dy + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^* dy + \int_{Y(x)}^{d} f^* dy,$$

* Значения ее на границе этой области роли не играют, см. **592**, 1°.

ибо существует каждый из трех интегралов справа. Действительно, так как в промежутках $[c, y_0(x))$ и $(Y(x), d]$ изменения y функция $f^*(x, y) = 0$, то первый и третий интегралы существуют, будучи равны нулю. Второй же интеграл совпадает с интегралом от функции $f(x, y)$:

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)\,dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy,$$

поскольку $f^*(x, y) = f(x, y)$ для y в $[y_0(x), Y(x)]$. Окончательно,

$$\int_c^d f^*(x, y)\,dy = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy. \tag{8}$$

В силу упомянутой теоремы, для функции f^* существует и повторный интеграл, который равен двойному [см. 594 (4)]:

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)\,dR = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\,dy.$$

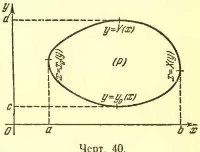
Принимая же во внимание (7) и (8), видим, что эта формула равносильна формуле (6).

Если область (P) представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена кривыми

$$x = x_0(y),\ x = X(y)\ \ (c \leqslant y \leqslant d)$$

и прямыми $y = c$, $y = d$, то вместо (6) придём к формуле

$$\iint_{(P)} f(x, y)\,dP = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,dx, \tag{6*}$$



Черт. 40.

в предположении, что, наряду с двойным интегралом, при $y = \text{const}$. существует простой интеграл по x.

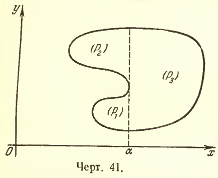
Замечание. Если контур области (P) пересекается лишь в двух точках как параллелями оси ординат, так и параллелями оси абсцисс (как, например, в случае, изображенном на черт. 40), то при выполнении указанных условий применимы обе упомянутые формулы. Из сопоставления их получается равенство

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,dx, \tag{9}$$

которое представляет и самостоятельный интерес. Это — аналог формулы (5) n° **594**.

Если функция $f(x, y)$ в области (P) непрерывна, то интегралы, двойной и простой, существуют, и формулу (5) или (5*), смотря по типу области (P), можно использовать для вычисления двойного интеграла.

В случае более сложного контура область (P) обычно разлагается на конечное число частей рассмотренного типа. [Например, фигура (P) на черт. 41 рассекается прямою $x = \alpha$ на три такие части: (P_1), (P_2) и (P_3).] Тогда и искомый интеграл, в силу **592**, 2°, представляется суммой интегралов, распространенных в отдельности на эти части; каждый из них вычисляется как указано.



Черт. 41.

В общем случае также, поскольку мы свели дело к теореме n° **594**, в основе умозаключений лежит разбиение рассматриваемой фигуры на прямоугольные элементы. В связи с этим и здесь для обозначения двойного интеграла пользуются часто символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy;$$

произведение $dx\,dy$ напоминает о площади элементарного прямоугольника.

Само собою понятны и обозначения

$$\int\limits_a^b \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f\,dy\,dx \quad \text{или} \quad \int\limits_c^d \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f\,dx\,dy.$$

597. Примеры. 1) Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dP,$$

где (P) есть круг радиуса R с центром в начале координат (черт. 42).

Решение. Контур области (P) имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, откуда $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Очевидно, $y = + \sqrt{R^2 - x^2}$ есть уравнение верхней полуокружности, а $y = - \sqrt{R^2 - x^2}$ является уравнением нижней полуокружности. Таким образом, при постоянном x из промежутка $[-R, R]$ переменная y изменяется от $-\sqrt{R^2 - x^2}$ до $+\sqrt{R^2 - x^2}$. По формуле (6) (с учетом четности по y подинтегральной функции)

$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dy = 2 \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Затем (снова с учетом четности)

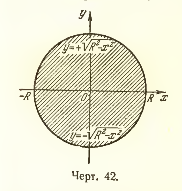
$$I = \frac{2}{3}\int_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^2 dx = \frac{32}{45}R^5.$$

Совершенно аналогично проводится и вычисление по формуле (6*).

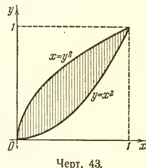
2) Вычислить

$$K = \iint\limits_{(A)} (x^2+y)\,dx\,dy,$$

если область (A) ограничена двумя параболами: $y = x^2$ и $y^2 = x$.



Черт. 42.



Черт. 43.

Решение. Полезно сделать чертеж хотя бы грубо, чтобы получить общее представление об области. Решая совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения: (0, 0) и (1, 1) (черт. 43).

Если внешнее интегрирование производить по y, то промежутком изменения y будет, очевидно, $[0, 1]$. Взяв произвольное значение y в этих пределах, видим по чертежу, что x изменяется от $x = y^2$ до $x = \sqrt{y}$. По формуле (6*),

$$K = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx = \frac{x^3}{3} + yx \Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3,$$

а затем — и внешний:

$$K = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3\right) dy = \frac{33}{140}.$$

3) Вычислить интеграл

$$J = \iint_{(D)} xy\,dx\,dy,$$

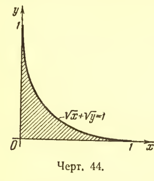
где (D) есть область, ограниченная осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (черт. 44)

Решение. Имеем:

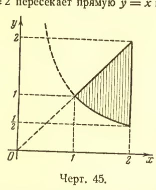
$$J = \int_0^1 x\,dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4\,dx = \frac{1}{280}.$$

4) Вычислить интеграл $I = \iint_{(C)} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, где (C) есть область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

Решение. Нанесем эти линии на чертеж (черт. 45). Совместным решением уравнений легко получить, что прямая $x = 2$ пересекает прямую $y = x$ в точке



Черт. 44.



Черт. 45.

$(2, 2)$, а гиперболу $xy = 1$ — в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, прямая же $y = x$ и гипербола (в пределах первого квадранта, где и лежит рассматриваемая область) пересекаются в точке $(1,1)$.

Если остановиться для вычисления интеграла I на формуле (6), то внешнее интегрирование по x придется произвести в промежутке $[1, 2]$. При фиксированном x в этом промежутке пределы изменения y суть $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$. Итак,

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy.$$

Но

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy = -\frac{x^2}{y}\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x,$$

так что

$$I = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \frac{9}{4}.$$

В то время как в предыдущих примерах вычисление по обеим формулам (6) или (6*) представлялось одинаково простым, в данном случае дело обстоит иначе: вычисление по формуле (6*) здесь было бы сложнее. Тем не менее мы выполним его, ибо поучительно дать себе отчет в причине указанного обстоятельства.

Прямая, параллельная оси x, пересекает контур области в двух точках, так что формула (6*) приложима. Но кривая, ограничивающая нашу область слева, — она отвечает кривой $x = x_0(y)$ общей теории, — здесь состоит из двух частей: куска прямой и куска гиперболы, которые выражаются различными уравнениями. Иными словами, упомянутая функция $x_0(y)$ задается различными формулами в различных частях промежутка $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ изменения y. Именно,

$$x_0(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & \text{если } \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \\ y, & \text{если } 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Справа область ограничена прямой $x = 2$.

Поэтому интегрирование по y удобнее разбить и представить I в виде

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\, dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\, dx.$$

Так как

$$\int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\, dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}, \quad \int\limits_{y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\, dx = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

то

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}\right) dy + \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3}\right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

С подобными обстоятельствами приходится считаться; из двух возможных путей вычисления двойного интеграла, естественно, выбирают более простой.

5) Вычислить интегралы:

$$\text{(а)}\quad I_1 = \iint\limits_{(Q_1)} \cos(x + y)\, dx\, dy, \quad \text{(б)}\quad I_2 = \iint\limits_{(Q_2)} (2x + y)\, dx\, dy,$$

$$\text{(в)}\quad I_3 = \iint\limits_{(Q_3)} (x + 6y)\, dx\, dy,$$

где (Q_1) есть треугольник, ограниченный прямыми

$$x = 0,\ y = x,\ y = \pi,$$

(Q_2) — треугольник, ограниченный осями координат и прямою $x + y = 3$, а (Q_3) — треугольник, ограниченный прямыми

$$y = x,\ y = 5x,\ x = 1.$$

Указание. В случаях (а), (б) безразлично, какой из формул (6), (6*) пользоваться; в случае же (в) удобнее пользоваться формулой (6) (почему? сделать чертеж!)

Ответ. (а) $I_1 = -2$; (б) $I_2 = \frac{27}{2}$; (в) $I_3 = 25\frac{1}{3}$.

6) Вычислить интеграл

$$I = \iint \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

распространенный на треугольник, который образован прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

Решение. По формуле (6) $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy$; внутренний интеграл равен

$$\int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x}\Bigg|_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) x^2,$$

и окончательно $I = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

Можно было бы вести вычисления и по формуле (6*), но в этом случае мы натолкнулись бы на более трудные квадратуры. Подобное обстоятельство также следует учитывать при выборе пути для вычисления.

В связи с трудностями, которые иной раз представляет расстановка пределов интегрирования в случае криволинейной области, полезны следующие упражнения:

7) Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле [по формуле (9)]:

$$\text{(а)} \int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy, \qquad \text{(б)} \int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

$$\text{(в)} \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy, \qquad \text{(г)} \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

считая $f(x, y)$ непрерывной функцией.

(а) Решение. Область интегрирования определяется совместными неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant 4, \quad 3x^2 \leqslant y \leqslant 12x.$$

Отсюда прежде всего ясно, что крайними значениями y будут 0 и 48. Решая же последние неравенства относительно x, при фиксированном y найдем, что x меняется от $\frac{1}{12}y$ до $\sqrt{\frac{y}{3}}$ *.

* Оба эти числа не выходят за пределы промежутка [0, 4]!

Еще проще усмотреть этот результат из черт. 46, где изображена область, ограниченная прямой $y = 12x$ и параболой $y = 3x^2$, которые пересекаются в точках с абсциссами 0 и 4. Отметим, что по оси x взят другой масштаб, чем по оси y.

Ответ. $\displaystyle\int_0^{48} dy \int_{\frac{1}{12}y}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f dx.$

Черт. 46.

(б) Указание. Область интегрирования ограничена окружностью

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2.$$

Ответ. $\displaystyle\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f dy.$

(в) Решение. Область интегрирования определяется совместными неравенствами:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 2x \leqslant y \leqslant 3x,$$

откуда выясняются крайние значения для y: 0 и 3.

Решая последние неравенства, видим, что $\frac{y}{3} \leqslant x \leqslant \frac{y}{2}$. Но для $y > 2$ предел $\frac{y}{2}$ уже выходит из промежутка [0, 1], которым во всяком случае ограничено изменение x. Следовательно, при $0 \leqslant y \leqslant 2$ переменная x изменяется от $\frac{y}{3}$ до $\frac{y}{2}$, а при $2 \leqslant y \leqslant 3$ — от $\frac{y}{3}$ до 1.

Значительно проще этот результат получается геометрически, если сообразить, что область интегрирования есть треугольник, ограниченный прямыми $y = 3x$, $y = 2x$ и $x = 1$ (сделать чертеж!).

Ответ. Получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{1}{3}y}^{1} f dx \text{ (Ср. 4) и 5) (в)).}$$

(г) *Ответ.* Получаем сумму трех повторных интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f dy.$$

8) Записать в виде о д н о г о повторного интеграла выражение:

$$(\text{а}) \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x, y)\,dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x, y)\,dx,$$

$$(\text{б}) \int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^{a} f(x, y)\,dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y)\,dx.$$

Ответ.

$$(\text{а}) \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f\,dy; \qquad (\text{б}) \int_1^3 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f\,dy.$$

(Рекомендуется во всех случаях делать чертежи.)

9) Показать, что употребительная формула интегрального исчисления

$$P = \int_a^b f(x)\,dx,$$

выражающая площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью x, ординатами $x = a$, $x = b$ и кривою $y = f(x)$ (где $f \geqslant 0$), является следствием очевидного равенства

$$P = \iint_{(P)} dx\,dy.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (6).

10) Установить формулу

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\,dx, \quad (10)$$

где $f(x, y)$ есть произвольная функция, непрерывная в треугольнике (Δ), ограниченном прямыми $y = a$, $x = b$, $y = x$.

Черт. 47.

У к а з а н и е. См. черт. 47; воспользоваться формулой (9), т. е. приравнять оба п о в т о р н ы х интеграла, к которым приводится д в о й н о й интеграл по области (Δ).

Доказанная формула обычно связывается с именем Д и р и х л е; она имеет различные приложения, особенно — в теории так называемых *интегральных уравнений* В о л ь т е р р а (G. Volterra).

11) С помощью формулы (10) легко доказать, что

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-2} f(t)\,dt = \frac{1}{n-1} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Последовательное применение этой формулы приводит к результату:

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_a^{t_1} f(t)\,dt}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt,$$

который выше [511, 13)] был установлен другим путем.

12) Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy,$$

в предположении, что $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$ *.

Имеем по формуле (5)

$$I=\int_0^1 x^{p-1}\,dx\int_0^{1-x} y^{q-1}\,dy=\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx=\frac{1}{q}\,\mathrm{B}(p,\ q+1).$$

Окончательно,

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

Эта формула принадлежит Дирихле.

13) Аналогично вычисляется более общий интеграл

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,dx\,dy,$$

в предположении, что $p\geqslant 1,\ q\geqslant 1,\ r\geqslant 1$ *.

Сначала, как и выше,

$$J=\int_0^1 x^{p-1}\,dx\int_0^{1-x} y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,dy.$$

Затем внутренний интеграл преобразуем подстановкой $y=(1-x)\,t$ в результате:

$$J=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}\,dx\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\,dt=$$

$$=\mathrm{B}(p,\ q+r)\,\mathrm{B}(q,\ r)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

14) Вычислить интеграл, представляющий дальнейшее обобщение предыдущего:

$$K=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,dx\,dy}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}$$

(где $\alpha,\ \beta\geqslant 0,\ \gamma>0$ и, кроме того, $p\geqslant 1,\ q\geqslant 1,\ r\geqslant 1$).*

* Это ограничение мы устанавливаем здесь лишь для того, чтобы избегнуть обращения подинтегральной функции в бесконечность; впоследствии [617, 14)] оно будет ослаблено.

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$K=\int_0^1 x^{p-1}\,dx\int_0^{1-x}\frac{y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}\,dy,$$

а затем, после подстановки $y=(1-x)t$, изменяем порядок интегрирований:

$$K=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\,dt\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}}{[\alpha x+\beta t(1-x)+\gamma]^{p+q+r}}\,dx.$$

Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся уже известным результатом [534, 2)]. Тогда

$$K=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p}\int_0^1\frac{t^{q-1}(1-t)^{r-1}}{(\beta t+\gamma)^{q+r}}\,dt$$

и, снова прибегая к тому же результату, окончательно:

$$K=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p}\cdot\frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\cdot\frac{1}{(\beta+\gamma)^q\gamma^r}=$$
$$=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q\gamma^r}.$$

15) Пусть функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области (D), причем наименьшее и наибольшее значения функции g пусть будут m и M; пусть $\varphi(u)$ означает функцию, непрерывную для $m\leqslant u\leqslant M$.

Обозначим через $\psi(u)$ интеграл

$$\iint\limits_{m\leqslant g\leqslant u} f(x, y)\,dx\,dy,$$

распространенный на ту часть области (D), в которой выполняется указанное внизу неравенство *.

Тогда имеет место *формула Каталана* (E. Catalan)

$$\iint\limits_{m\leqslant g\leqslant M} f(x, y)\,\varphi(g(x, y))\,dx\,dy=\int_m^M\varphi(u)\,d\psi(u),$$

где интеграл справа понимается в смысле Стилтьеса.

Так как непрерывную функцию f всегда можно рассматривать как разность двух положительных непрерывных функций, то при доказательстве этой формулы мы можем просто считать функцию f положительной.

Разложив произвольно промежуток $[m, M]$ на части:

$$m=u_0<u_1<\ldots<u_i<u_{i+1}<\ldots<u_n=M,$$

---

* Мы предполагаем, что уравнение $g(x, y)=u$ выражает замкнутую кривую, так что упоминаемая в тексте часть области ограничена двумя такими кривыми.

соответственно этому разложим и предложенный интеграл (обозначим его через I):

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \iint\limits_{u_i \leqslant g \leqslant u_{i+1}} f \cdot \varphi(g)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*)) \iint\limits_{u_i \leqslant g \leqslant u_{i+1}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Мы воспользовались здесь обобщенной теоремой о среднем значении; (ξ_i^*, η_i^*) есть некоторая точка области, где $u_i \leqslant g \leqslant u_{i+1}$, так что, полагая $g(\xi_i^*, \eta_i^*) = u_i^*$, будем иметь $u_i \leqslant u_i^* \leqslant u_{i+1}$. Итак, окончательно,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(u_i^*)\, [\psi(u_{i+1}) - \psi(u_i)].$$

В сумме справа узнаем сумму Стилтьеса. Переходя к пределу при $\max \Delta u_i \to 0$, установим требуемый результат:

$$I = (\mathrm{S}) \int_m^M \varphi(u)\, d\psi(u).$$

Если для функции $\psi(u)$ существует непрерывная (или хотя бы абсолютно интегрируемая) производная $\psi'(u)$, то интеграл Стилтьеса заменяется обыкновенным:

$$I = \int_m^M \varphi(u)\, \psi'(u)\, du.$$

16) Для примера покажем, как по методу Каталана, из элементарной формулы Дирихле [см. 12)] может быть выведена более общая формула, принадлежащая Лиувиллю (J. Liouville).

Возьмем, в частности,

$$f(x, y) = x^{p-1} y^{q-1}, \quad g(x, y) = x + y,$$

а за область (D) выберем треугольник $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1$. Тогда по формуле Дирихле при $0 < u \leqslant 1$

$$\psi(u) = \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant u}} x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy = u^{p+q} \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 1}} x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)}\, u^{p+q}$$

и, воспользовавшись преобразованием Каталана, будем иметь

$$\iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 1}} x^{p-1} y^{q-1} \varphi(x + y)\, dx\, dy = \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q + 1)} \int_0^1 \varphi(u)\, du^{p+q} =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \int_0^1 \varphi(u)\, u^{p+q-1}\, du.$$

Это и есть *формула Лиувилля.*

17) Найти объем тела, ограниченного

(а) плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и гиперболическим параболоидом $z=xy$ (в первом октанте);

(б) плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y=1$ и поверхностью $z=x^2+y+1$;

(в) плоскостями $y=1$, $z=0$, параболическим цилиндром $y=x^2$ и параболоидом $z=x^2+y^2$;

(г) плоскостями $y=0$, $z=0$, $y=\frac{b}{a}x$ и эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Ответ. (а) $V=\int\limits_0^R x\,dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy=\frac{1}{8}R^4$;

(б) $V=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy\int\limits_0^{1-2y}(x^2+y+1)\,dx=\frac{1}{3}$;

(в) $V=\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy=\frac{88}{105}$;

(г) $V=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}x}\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dy=\frac{abc}{3}$.

18) То же для тела, ограниченного:

(а) эллиптическим цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и плоскостями $z=0$ и $z=\lambda x+\mu y+h$ $(h>0)$;

(б) цилиндрами $az=y^2$, $x^2+y^2=r^2$ и плоскостью $z=0$;

(в) частью поверхности $xyz=a^3$, вырезанной из нее плоскостями $z=p$, $z=q$ $(0<p<q)$, $x=r$, $x=s$ $(0<r<s)$, проекцией этой части на плоскость xy и проектирующим цилиндром.

Ответ. (а) $V=\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}(\lambda x+\mu y+h)\,dy=\pi abh=Ph,$

(если P есть площадь эллипса; результат геометрически очевиден);

(б) $V=\frac{4}{a}\int\limits_0^r dy\int\limits_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y^2\,dx=\frac{4}{a}\int\limits_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\frac{\pi r^4}{4a}$;

(в) $V=\int\limits_r^s dx\int\limits_{\frac{a^3}{qx}}^{\frac{a^3}{px}}\frac{a^3}{xy}\,dy=a^3\ln\frac{q}{p}\ln\frac{s}{r}$.

19) Найти объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=2ax$ из параболоида вращения $y^2+z^2=4ax$.

Решение. Имеем:

$$V=4\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,dy.$$

Полагая $b^2=4ax$ в известной формуле

$$\int\sqrt{b^2-y^2}\,dy=\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b}+\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2},$$

вычислим первообразную функцию $\int\sqrt{4ax-y^2}$, а с ее помощью найдем внутренний интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,dy=2ax\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}+\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}.$$

Путем интегрирования по частям получим далее:

$$2a\int_0^{2a}x\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}\,dx=\frac{a}{2}\int_0^{2a}\frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}}\,dx=$$

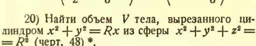
$$=\frac{a}{2}\left(2a^2\arcsin\frac{x}{2a}-\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}\right)\Bigg|_0^{2a}=\frac{\pi a^3}{2}.$$

Наконец,

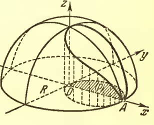
$$\frac{1}{2}\int_0^{2a}x\sqrt{4a^2-x^2}\,dx=\frac{4}{3}a^3$$

и

$$V=4\left(\frac{\pi a^3}{2}+\frac{4}{3}a^3\right)=a^3\left(2\pi+\frac{16}{3}\right).$$



20) Найти объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (черт. 48) *.



Черт. 48.

Решение. Имеем:

$$V=4\iint_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где (P) есть полукруг в первом квадранте плоскости xy, ограниченный линиями $x=0$ и $x^2+y^2=Rx$, или

$$V=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy.$$

* Это тело иногда называется телом Вивиани (Viviani), по имени итальянского математика XVII в., который впервые его рассматривал.

Но

$$\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} + \frac{y}{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{Rx-x^2}} =$$

$$= \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}} + \frac{1}{2}\sqrt{R}\,(R-x)\sqrt{x}.$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx = \frac{\pi R^3}{12} - \frac{\sqrt{R}}{12}\int_0^R \frac{3R^2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{R+x}\,dx.$$

С помощью, например, подстановки $x = Rt^2$ легко найти значение последнего интеграла

$$\frac{\sqrt{R}}{12}\cdot 2R^2\sqrt{R}\cdot\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{16}{45}-\frac{\pi}{12}\right)R^3,$$

так что

$$\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx = \left(\frac{\pi}{6}-\frac{16}{45}\right)R^3.$$

Далее, без труда найдем

$$\frac{1}{2}\sqrt{R}\int_0^R (R-x)\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{15}R^3,$$

так что, окончательно,

$$V = 4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3\,*.$$

Замечание. Так как объем полусферы есть $\frac{2}{3}\pi R^3$, то объем ее части, получающейся после удаления тела Вивиани, равен $\frac{8}{9}R^3$. Любопытно, что он выражается через радиус R без привлечения каких бы то ни было иррациональностей.

21) Вычислить интегралы

$$I_1 = \iint\limits_{(A)} y\,dx\,dy, \quad I_2 = \iint\limits_{(A)} x\,dx\,dy,$$

где (A) есть область, ограниченная аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

и осью x.

---

* Ниже мы укажем гораздо более простой способ вычисления этого объема [611, 6)].

Решение. Своеобразие этой задачи состоит в том, что контур области задан параметрическими уравнениями. Однако ордината y точки циклоиды представляет собой все же однозначную и непрерывную функцию абсциссы x: $y = y(x)$, так что, переходя к повторному интегралу, по общей формуле имеем

$$I_1 = \int_0^{2\pi R} dx \int_0^{y(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} y^2(x)\,dx.$$

Чтобы освободиться от неизвестной нам функции $y(x)$ и вернуться к известным функциям, сделаем подстановку $x = a(t - \sin t)$. Тогда $y(x)$ надлежит заменить на $a(1 - \cos t)$, и мы получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,da\ (t - \sin t) = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = \frac{5}{2}\pi a^3.$$

Аналогично,

$$I_2 = 3\pi^2 a^3.$$

22) Вычислить интеграл

$$K = \iint_{(B)} xy\,dx\,dy,$$

где область (B) ограничена осями координат и частью астроиды

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ. $K = \frac{1}{80}R^4$.

598. Механические приложения. Все геометрические и механические величины, связанные с плоским непрерывным распределением масс вдоль некоторой фигуры (P) и представляющие аддитивные функции области, в принципе выражаются двойными интегралами, распространенными на эту фигуру. В п° **593** мы уже подробно останавливались на этом вопросе. В частности, мы видели, что сама величина распространенной массы выражается по заданной плотности распределения $\rho(M) = \rho(x, y)$ так:

$$m = \iint_{(P)} \rho\,dP. \tag{11}$$

Здесь мы имеем в виду дать краткие указания относительно того, как обычно получают формулы подобного типа. Порядок идей здесь тот же, что и при применении простого определенного интеграла [см. **348**].

Выделяя элементарную часть (dP) фигуры (P), делают упрощающее выкладки предположение, — например, что масса всего элемента сосредоточена в одной точке или что плотность распределения масс в пределах элемента постоянна, — которое позволяет дать для элемента dQ искомой величины Q приближенное выражение вида

$$dQ = q(M)\,dP,$$

верное до бесконечно малой порядка, высшего чем dP. Тогда точное значение Q выразится формулой

$$Q = \iint_{(P)} q(M)\,dP.$$

Обосновать это можно двояко (как и в **348**).

Прежде всего, суммируя приближенные выражения для элементов dQ, можно получить приближенное же значение величины Q в виде интегральной суммы, а переходя к пределу — точное значение Q уже в виде предела суммы, т. е. интеграла.

С другой стороны, самое выражение для элемента dQ позволяет заключить, что $q(M)$ есть «производная по области» величины Q (в точке M), а отсюда, в силу изложенного в n° **593**, снова вытекает тот же результат.

Легко сообразить, например, что элементарные статические моменты и моменты инерции относительно осей координат будут

$$dM_x = y\rho\, dP, \quad dM_y = x\rho\, dP,$$
$$dI_x = y^2\rho\, dP, \quad dI_y = x^2\rho\, dP;$$

отсюда для самих моментов сразу получаем

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_{(P)} y\rho\, dP, \quad M_y = \iint\limits_{(P)} x\rho\, dP, \\ I_x &= \iint\limits_{(P)} y^2\rho\, dP, \quad I_y = \iint\limits_{(P)} x^2\rho\, dP. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Теперь обычным образом получаются координаты центра тяжести фигуры:

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x\rho\, dP}{m}, \quad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\rho\, dP}{m}. \tag{13}$$

В случае однородной фигуры: $\rho = \text{const}$ эти формулы упрощаются:

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x dP}{P}, \quad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\, dP}{P}. \tag{14}$$

В отдельных простых случаях удается с помощью двойных интегралов исчерпать подобные же вопросы по отношению к *телам*, именно — к цилиндрическим брусам.

Пусть дан такой брус, ограниченный поверхностью $z = z(x, y)$, ее проекцией (P) на плоскость xy и проектирующим цилиндром, образующие которого параллельны оси z. Если, например, требуется определить статический момент M_{xy} *однородного* бруса (для простоты предположим объемную плотность равной единице), то мы представляем себе этот брус состоящим из ряда элементарных столбиков, с основанием dP и высотой z. Статический момент столбика относительно плоскости xy равен его массе или — что в данном случае то же — объему $z\, dP$, умноженному на расстояние его центра тяжести от этой плоскости, т. е. на $\frac{1}{2} z$. Итак, элементарный статический момент есть

$$dM_{xy} = \frac{1}{2} z^2\, dP,$$

откуда, суммируя по всем столбикам, получаем

$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{(P)} z^2\, dP. \tag{15}$$

Аналогично могут быть установлены и формулы

$$M_{zx} = \iint\limits_{(P)} yz\,dP, \quad M_{yz} = \iint\limits_{(P)} xz\,dP. \tag{15a}$$

Отсюда легко получить выражение для координат ξ, η, ζ центра тяжести бруса:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\iint\limits_{(P)} xz\,dP}{V}, \text{ и т. д.}$$

Точно так же выводятся и формулы для моментов инерции бруса I_z относительно оси z и I_{yz}, I_{zx} относительно плоскостей координат:

$$I_z = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,z\,dP, \quad I_{zx} = \iint\limits_{(P)} y^2 z\,dP, \quad I_{yz} = \iint\limits_{(P)} x^2 z\,dP, \tag{16}$$

причем ясно, что $I_z = I_{zx} + I_{yz}$.

Если бы пространственная плотность ρ распределения масс, не сводясь к постоянной, зависела бы лишь от x, y (т. е. все же вдоль столбика была бы постоянной), то по-прежнему можно было бы обойтись двойным интегралом. Однако, в общем случае, при зависимости ρ и от z, двойного интеграла уже было бы недостаточно и пришлось бы обратиться к тройному интегралу [см. 649].

599. Примеры. 1) Пусть фигура (P) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y = f(x)$, отрезком оси x и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$, и пусть плотность распределенных по этой фигуре масс будет 1. Определить статические моменты M_x и M_y.

Переходя в формулах (12) к повторным интегралам, будем иметь:

$$M_x = \iint\limits_{(P)} y\,dP = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

$$M_y = \iint\limits_{(P)} x\,dP = \int_a^b x\,dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b x f(x)\,dx$$

или, короче,

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b xy\,dx,$$

и мы возвращаемся к выражениям статических моментов, уже полученным нами раньше [351].

Предоставляем читателю повторить эти выкладки для моментов инерции I_x и I_y.

2) Цилиндрический брус (V) имеет в основании плоскую фигуру (P), а сверху ограничен произвольной плоскостью (K). Доказать, что объем V тела равен произведению площади P основания на длину h перпендикуляра к основанию, проходящего через центр тяжести тела до пересечения с плоскостью (K).

Если оси расположены, как обычно (черт. 49), и уравнение плоскости (K) имеет вид

$$z = ax + by + c,$$

то по формуле (2*) n° 586

$$V = \iint\limits_{(P)} (ax + by + c)\,dP = a \iint\limits_{(P)} x\,dP + b \iint\limits_{(P)} y\,dP + c \iint\limits_{(P)} dP = \\ = (a\xi + b\eta + c)\,P = Pk.$$

3) Доказать, что, если в плоскости фигуры (P) взяты две параллельные оси x и x' на расстоянии h, причем первая из них проходит через центр тяжести фигуры, то моменты инерции фигуры относительно этих осей связаны соотношением

$$I_{x'} = I_x + h^2 m,$$

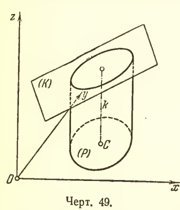
где m — масса фигуры.

Выбрав ось x за ось абсцисс, имеем

$$I_{x'} = \iint\limits_{(P)} (y - h)^2 \rho\,dP = I_x - 2hM_x + h^2 m.$$

Так как, по предположению, $M_x = 0$, то мы и приходим к требуемому равенству.

4) *Полярным моментом инерции* материальной точки называется произведение массы точки на квадрат расстояния до полюса. Легко понять, что́ разуметь под полярным моментом инерции плоской фигуры.



Черт. 49.

Черт. 50.

Поместив полюс в начале координат O, доказать, что полярный момент

$$I_O = I_x + I_y.$$

5) Пусть в плоскости xy задана произвольная фигура (P). Найти общее выражение для момента инерции этой фигуры относительно любой оси Ou, составляющей с осью Ox угол θ (черт. 50).

Если принять ось Ou и перпендикулярную к ней ось Ov за новые координатные оси, то, как известно, новые координаты u, v будут связаны со старыми x, y зависимостями

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad v = -x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Поэтому

$$I_u=\iint\limits_{(P)} v^2\rho\, dP=\cos^2\theta\cdot\iint\limits_{(P)} y^2\rho\, dP-2\sin\theta\cos\theta\cdot\iint\limits_{(P)} xy\rho\, dP+$$
$$+\sin^2\theta\cdot\iint\limits_{(P)} x^2\rho\, dP.$$

Коэффициентами при $\cos^2\theta$ и $\sin^2\theta$ являются, как мы видим, моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат, но кроме них здесь встречается еще величина

$$K_{xy}=\iint\limits_{(P)} xy\rho\, dP,$$

которую называют *центробежным моментом* [см. ниже, зад. 7)] или *произведением инерции*. Итак,

$$I_u=I_x\cos^2\theta-2K_{xy}\sin\theta\cos\theta+I_y\sin^2\theta. \tag{17}$$

Для наглядной иллюстрации изменения момента инерции фигуры при вращении оси Ou поступают следующим образом. На оси Ou откладывают отрезок

$$ON=\frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

(см. черт. 50) и рассматривают геометрическое место полученных таким путем точек N. Если координаты точки N обозначить через x, y, то

$$x=ON\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{I_u}},\quad y=ON\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{I_u}}.$$

Деля соотношение (17) на I_u, получим уравнение упомянутого геометрического места:

$$I_xx^2-2K_{xy}xy+I_yy^2=1. \tag{18}$$

Распространяя неравенство Буняковского на случай двойных интегралов, легко видеть, что дискриминант

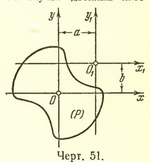
$$I_xI_y-K_{xy}^2>0,$$

так что кривая (18) есть эллипс. Его называют *эллипсом инерции*.

Если $K_{xy}=0$, уравнение (18) получает форму

$$I_xx^2+I_yy^2=1,$$

которая показывает, что в этом случае оси координат служат осями эллипса инерции (*главными осями инерции*).



Черт. 51.

6) Относительно центробежного момента K_{xy} установить:

а) если одна из осей, например ось y, будет осью симметрии для самой фигуры (P) и для расположенных на ней масс *, то $K_{xy}=0$;

(б) если начало координат является центром тяжести фигуры и через точку $O_1(a, b)$ проведены оси O_1x_1 и O_1y_1, параллельные прежним (черт. 51), то

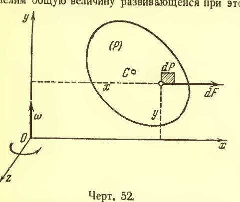
$$K_{x_1y_1}=K_{xy}+ab\cdot P.$$

* Так что $\rho(-x, y)=\rho(x, y)$.

Формула приобретает особенно простой вид, если $K_{xy}=0$, именно:

$$K_{x_1y_1}=ab\cdot P. \tag{19}$$

7) Пусть плоская фигура (P) (черт. 52), по которой непрерывным образом расположены массы, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси y. Определим общую величину развивающейся при этом центробежной силы F и ее момент M относительно оси z *.



Черт. 52.

Для элемента $\rho\,dP$ центробежная сила равна

$$dF=\omega^2 x\rho\,dP$$

(направлена в одну сторону при $x>0$ и в другую при $x<0$), а момент ее относительно оси z

$$dM=\omega^2 xy\,\rho\,dP.$$

Отсюда, суммируя:

$$F=\omega^2\iint\limits_{(P)}x\,\rho\,dP=\omega^2 M_y,$$

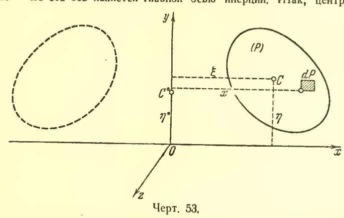
$$M=\omega^2\iint\limits_{(P)}xy\,\rho\,dP=\omega^2 K_{xy}.$$

Таким образом, при $\omega=1$, величина K_{xy} является моментом центробежной силы; отсюда и название «центробежный момент».

Для того чтобы действие центробежной силы на ось вращения было равно нулю, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$M_y=0,\quad K_{xy}=0.$$

Первое означает, что центр тяжести нашей фигуры лежит на оси y, а второе — что эта ось является главной осью инерции. Итак, центробежная



Черт. 53.

сила не производит никакого действия на ось вращения лишь при условии, что осью вращения служит одна из главных центральных осей инерции фигуры.

8) Рассмотрим тело, полученное от вращения плоской фигуры (P) (черт. 53) вокруг оси y, которая ее не пересекает. Определить его объем V и положение центра тяжести C^*.

---

* Моменты относительно других осей очевидно равны 0.

Решение. Возьмем сначала элементарное кольцо, описанное элементом dP фигуры, его объем можно принять равным объему цилиндра высоты $2\pi x$ с основанием dP, так что

$$dV = 2\pi x \cdot dP$$

и

$$V = 2\pi \iint\limits_{(P)} x\, dP = 2\pi M_y = 2\pi\xi \cdot P,$$

где M_y — статический момент нашей фигуры относительно оси y, а ξ — расстояние центра тяжести C фигуры от этой оси. Таким образом, мы снова получили теорему Гульдина [351], но на этот раз для фигуры, ограниченной любым контуром.

Статический момент элементарного кольца, о котором только что была речь, относительно плоскости xz, очевидно, равен

$$dM = y\, dV = 2\pi xy\, dP,$$

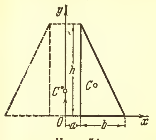
так что

$$M = 2\pi \iint\limits_{(P)} xy\, dP = 2\pi K_{xy}.$$

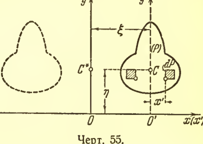
Следовательно, координата $y = \eta^*$ центра тяжести C^* равна

$$\eta^* = \frac{M}{V} = \frac{K_{xy}}{M_y}. \tag{20}$$

9) Применить эту формулу к частному случаю, когда фигура (P) является прямоугольным треугольником (черт. 54).



Черт. 54.



Черт. 55.

При обозначениях чертежа

$$M_y = \frac{bh}{2}\left(a + \frac{1}{3}b\right) = \frac{bh(3a+b)}{6}$$

(так как положение центра тяжести треугольника известно). Учитывая уравнение наклонной стороны треугольника:

$$y = \frac{h}{b}(a + b - x),$$

найдем и $K_{xy} = \dfrac{bh^2(4a+b)}{24}$. Отсюда, в силу (20), $\eta^* = \dfrac{h}{4} \cdot \dfrac{4a+b}{3a+b}$.

Как видим, эта координата отлична от координаты $\eta = \dfrac{h}{3}$ центра тяжести самого треугольника.

10) Показать, что если вращающаяся фигура имеет ось симметрии, параллельную оси вращения (черт. 55), то необходимо

$$\eta^* = \eta,$$

т. е. центры тяжести тела и плоской фигуры лежат на одной высоте.

Указание. Это следует из (20) и (19), если учесть, что $K_{x'y'}=0$ [см. 6) (а)].

11) Показать, что при тех же предположениях момент инерции I тела, полученного от вращения рассматриваемой фигуры, относительно оси вращения выразится формулой $I=2\pi\xi(\xi^2P+3I_{y'})$.

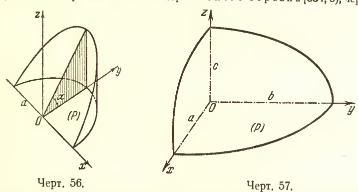
12) Применить формулы (15) и (15а) к следующему частному случаю: пусть основанием бруса служит прямоугольник $[0,\ a;\ 0,\ b]$, сверху же брус ограничен эллиптическим параболоидом:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}.$$

Ответ. $$\xi=\frac{3a^2q+2b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{a}{4},\qquad \eta=\frac{2a^2q+3b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{b}{4},$$

$$\zeta=\frac{9a^4q^2+10a^2b^2pq+9b^4p^2}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{1}{60pq}.$$

13) Найти центр тяжести цилиндрического отрезка [334, 8); черт. 56].



Черт. 56. Черт. 57.

Решение. При обозначениях чертежа уравнение секущей плоскости будет $z=ky$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Роль (P) здесь играет полукруг радиуса a, ограниченный полуокружностью $x^2+y^2=a^2$. Имеем:

$$M_{zx}=\iint\limits_{(P)} yz\,dP=k\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2dx\,dy=\frac{2k}{3}\int\limits_{0}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{\pi}{8}ka^4,$$

$$M_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2dP=\frac{k}{2}\iint\limits_{(P)} yz\,dP=\frac{\pi}{16}k^2a^4,\quad M_{yz}=0.$$

Так как объем

$$V=\frac{2}{3}ka^3,$$

то

$$\xi=0,\ \eta=\frac{3}{16}\pi a,\quad \zeta=\frac{3}{32}\pi ka.$$

14) То же для части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

содержащейся в первом октанте (черт. 57).

Решение. Область (P) ограничена координатными осями и эллипсом

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$(0\leqslant x\leqslant a)$; уравнение поверхности эллипсоида в явном виде будет

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

По формуле (15),

$$M_{xy}=\frac{1}{2}c^2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=\frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{\pi}{16}\,abc^2.$$

Аналогично

$$M_{yz}=\frac{\pi}{16}\,a^2bc,\quad M_{zx}=\frac{\pi}{16}\,ab^2c.$$

В то же время объем

$$V=\frac{\pi}{6}\,abc,$$

так что

$$\xi=\frac{3}{8}\,a,\quad \eta=\frac{3}{8}\,b,\quad \zeta=\frac{3}{8}\,c.$$

15) Для кругового цилиндра высоты h и радиуса a найти момент инерции относительно любой плоскости, проходящей через его ось (черт. 58).

Решение. Выбрав координатные оси, как указано на чертеже, по второй из формул (16) имеем

$$I_{xz}=\iint y^2z\,dP=h\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dy=$$

$$=\frac{4}{3}\,h\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{\pi}{4}\,ha^4.$$

Черт. 58.

16) Найти момент инерции I_z для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

Решение. Можно ограничиться одним октантом эллипсоида (черт. 57), с тем, чтобы результат умножить на 8. В таком случае областью (P) будет квадрант эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

Имеем

$$I_{zx}=8\iint\limits_{(P)} y^2z\,dP=\frac{8c}{a}\int\limits_0^b y^2dy\int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}dx=$$

$$=2\pi ac\int\limits_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

Аналогично

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$$

и, наконец,

$$I_z=I_{zx}+I_{yz}=\frac{4}{15}\pi\,abc\,(a^2+b^2).$$

§ 3. Формула Грина

600. Вывод формулы Грина. В настоящем n° мы установим формулу, связывающую двойной и криволинейный интегралы.

Рассмотрим область (D) — «криволинейную трапецию» (черт. 59), ограниченную контуром (L), состоящим из кривых

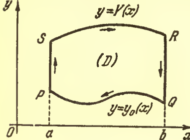
$$(PQ):\quad y=y_0(x)\qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

и

$$(RS):\quad y=Y(x)\qquad (a\leqslant b\leqslant x)$$

и двух отрезков PS и QR, параллельных оси y.

Предположим, что в области (D) задана функция $P(x, y)$, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial y}$.



Черт. 59.

Вычислим теперь двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

по формуле (6) n° 596; мы получим

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy.$$

Внутренний интеграл здесь легко вычисляется с помощью первообразной функции $P(x, y)$, именно:

$$\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy=P(x,\ y)\Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)}=P(x,\ Y(x))-P(x,\ y_0(x)).$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{(P)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_a^b P(x,\ Y(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x,\ y_0(x))\, dx.$$

Каждый из этих двух интегралов может быть заменен теперь криволинейным интегралом. В самом деле, вспоминая формулу (7) n° **547**, видим, что

$$\int\limits_a^b P(x,\ Y(x))\, dx = \int\limits_{(SR)} P(x,\ y) dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x,\ y_0(x))\, dx = \int\limits_{(PQ)} P(x,\ y)\, dx.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{(SR)} P(x,\ y)\, dx - \int\limits_{(PQ)} P(x,\ y)\, dx =$$

$$= \int\limits_{(SR)} P(x,\ y)\, dx + \int\limits_{(QP)} P(x,\ y)\, dx.$$

Желая ввести в рассмотрение интеграл по всему контуру (L) области (D), прибавим к правой части полученного равенства еще интегралы

$$\int\limits_{(PS)} P(x,\ y)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{(RQ)} P(x,\ y)\, dx,$$

очевидно, равные нулю, ибо отрезки (PS) и (RQ) перпендикулярны к оси x [см. **547**]. Мы получим

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{(PS)} P\, dx + \int\limits_{(SR)} P\, dx + \int\limits_{(RQ)} P\, dx + \int\limits_{(QP)} P\, dx.$$

Правая часть этого равенства представляет собой интеграл, взятый по всему замкнутому контуру (L), ограничивающему область (D), но в отрицательном направлении. В соответствии с соглашением, установленным нами насчет обозначения криволинейных интегралов по замкнутому контуру [**548**], мы можем окончательно переписать полученную формулу так:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{(L)} P(x,\ y)\, dx. \tag{1}$$

Хотя формула эта выведена в предположении правой ориентации осей, но, как легко убедиться, она сохраняется без изменения и при

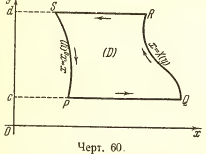
левой ориентации (лишь положительное направление обхода контура станет иным).

Выведенная формула справедлива и для областей более сложного вида, чем рассмотренная: достаточно предположить, что область (D) разлагается прямыми, параллельными оси y, на конечное число криволинейных трапеций указанного вида. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого, ибо оно проводится совершенно так же, как и в n° **551** при обобщении формулы, выражающей площадь криволинейным интегралом.

Аналогично устанавливается и формула

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy \qquad (2)$$

в предположении, что функция Q непрерывна в области (D) вместе со своей частной производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$. При этом сначала за область (D) принимается криволинейная трапеция вида, изображенного на черт. 60. Она ограничена кривыми



Черт. 60.

$$(PS):\quad x = x_0(y)\ (c \leqslant y \leqslant d)$$

и

$$(QR):\quad x = X(y)\quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

и двумя отрезками (PQ) и (RS), параллельными оси x. Затем формула обобщается, как и выше, на случай области, которая разлагается прямыми, параллельными оси x, на конечное число криволинейных трапеций этого вида.

Наконец, если область (D) одновременно удовлетворяет условиям обоих случаев, т. е. разлагается как на конечное число трапеций первого типа, так и (независимо от этого) на конечное число трапеций второго типа, то для нее справедливы обе формулы (1) и (2), конечно, в предположении непрерывности функций P, Q и их производных $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Вычитая формулу (1) из (2), получаем

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (3)$$

Это и есть *формула Грина* (G. Green)*.

Формулы n° **551**, выражающие площадь криволинейными интегралами, легко получаются отсюда, как частные случаи. Например, по-

* Иногда ее связывают с именами Гаусса или Римана.

лагая $P=-y$, $Q=0$ и воспользовавшись очевидным равенством $\iint\limits_{(D)} dx\,dy=D$, придем к формуле (7) n° **551**.

Как и в n° **551**, и здесь можно придать условиям, при которых справедлива формула (3), более обозримую форму. Именно, можно доказать, что *формула Грина имеет место для любой области* (D), *ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами.*

Пусть (L) будет общий контур нашей области. Повторяя рассуждения n° **551**, впишем в (L) ломаную (Λ) (имеющую две наперед фиксированные вершины) и рассмотрим ограниченную ею многоугольную область (Δ). Предположим, для простоты, что функции P и Q определены, непрерывны и имеют непрерывные же производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и вне области (D), скажем, в некотором — содержащем (D) внутри себя — прямоугольнике (R)*. Можно считать, что и (Δ) содержится в (R). Так как многоугольная область, очевидно, может быть разложена на трапеции как одного, так и другого типа, то к ней формула Грина приложима:

$$\int\limits_{(\Lambda)} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=\iint\limits_{(\Delta)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (4)$$

Когда длина наибольшей из сторон ломаной Λ стремится к нулю, левая часть равенства (4) стремится к левой части равенства (3), в силу леммы n° **550** (и замечания к ней).

С другой стороны, как мы видели в n° **551**, ломаную (Λ) можно выбрать так, чтобы она лежала вне многоугольной области (A) и внутри многоугольной области (B), соответственно, входящей и выходящей по отношению к (D), площади которых разнятся произвольно мало:

$$B-A<\varepsilon.$$

Можно считать, что (A) и (B) содержатся в упомянутом раньше прямоугольнике (R). Имеем, полагая для краткости $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f$:

$$\left|\iint\limits_{(D)} f\,dx\,dy-\iint\limits_{(\Delta)} f\,dx\,dy\right|=\left|\iint\limits_{(D)-(A)} f\,dx\,dy-\iint\limits_{(\Delta)-(A)} f\,dx\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant\iint\limits_{(D)-(A)}|f|\,dx\,dy+\iint\limits_{(\Delta)-(A)}|f|\,dx\,dy\leqslant 2\iint\limits_{(B)-(A)}|f|\,dx\,dy<2M\varepsilon,$$

* На деле для верности формулы это предположение несущественно.

где M есть наибольшее значение $|f|$ в (R). Отсюда ясно, что и правая часть равенства (4) при упомянутом предельном переходе стремится к правой части формулы (3). Таким образом, справедливость этой формулы установлена.

601. Приложение формулы Грина к исследованию криволинейных интегралов. Рассмотрим односвязную [559] открытую область (G) и предположим, что в ней заданы функции P и Q, непрерывные вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Поставим вновь [561] вопрос:

какому условию должны удовлетворять функции P и Q, чтобы обращался в нуль криволинейный интеграл

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy, \tag{5}$$

взятый по любому простому замкнутому контуру (L), лежащему целиком в (G)?

Так как мы предположили основную область (G) односвязной, то область (D), ограниченная извне контуром (L), сама также принадлежит (G), так что мы можем применить к ней формулу Грина*; тогда криволинейный интеграл (5) заменится двойным интегралом

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{6}$$

Для того чтобы подобный интеграл всегда был равен нулю, очевидно, достаточно предположить, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

Необходимость же условия (A) может быть установлена проще всего, если, предположив интеграл (6) равным нулю, прибегнуть к дифференцированию по области [593]: подинтегральная функция, как «производная» от интеграла (6), и сама тождественно обращается в нуль.

Таким образом, с учетом леммы п° **561**, мы получили новое доказательство того, что *условие* (A) *необходимо и достаточно для обращения в нуль интегралов вида* (5), *взятых по любому замкнутому контуру, если только основная область G односвязна* [**561**, теорема 5]. В силу теоремы 4 п° **561** *при том же предположении относительно области условие* (A) *оказывается также необходимым и достаточным для того, чтобы криволинейный интеграл*

$$\int_{(AB)} P\,dx + Q\,dy$$

* Обращаем внимание читателя на то, как здесь использована односвязность области (G).

по кривой (AB), *соединяющей точки* A *и* B, *не зависел от формы пути интегрирования* [**560**, теорема 3].

Формула Грина позволила установить это непосредственно, минуя все рассмотрения, связанные с интегрированием точных дифференциалов. При этом по новому освещена и роль предположения об односвязности основной области.

Теперь, наоборот, отсюда с помощью рассмотрений n° **556** может быть вновь установлена достаточность условия (А) (необходимость его ясна непосредственно!) для интегрируемости выражения $P\,dx + Q\,dy$ (теорема 2, n° **560**).

602. Примеры и дополнения. 1) Проверить формулу Грина на функциях

$$\text{(а)}\quad P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\text{(б)}\quad P = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Q = \frac{y}{x^2+y^2}$$

в круге радиуса 1 с центром в начале координат.

Указание. В обоих случаях $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, так что двойной интеграл обращается в нуль. Криволинейный же интеграл, взятый по окружности

$$x = \cos t,\ y = \sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

лишь в случае (б) равен нулю, а в случае (а) равен 2π.

Дело в том, что формула Грина выведена в предположении непрерывности рассматриваемых функций и их производных, а здесь — в обоих случаях — это условие в начале координат нарушается. В случае (а) формула Грина оказалась на деле неприложимой; любопытно, что в случае (б), несмотря на указанное обстоятельство, она все же верна [ср. **565**, 13)].

2) Преобразовать формулу Грина к виду

$$\text{(а)}\quad \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{(L)} P\,dy - Q\,dx,$$

либо же

$$\text{(б)}\quad \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{(L)} [P\cos(x, \nu) + Q\sin(x, \nu)]\,ds$$

(где ν означает направление внешней нормали).

Указание. Заменить P на $-Q$, а Q на P; использовать формулу (15) n° **553** для преобразования криволинейного интеграла второго типа в криволинейный интеграл первого типа. Обратить внимание на направление нормали!

3) С помощью формулы Грина доказать формулы:

$$\text{(а)}\quad \iint\limits_{(D)} \Delta u\,dx\,dy = \int\limits_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(б)}\quad \iint\limits_{(D)} v\Delta u\,dx\,dy = -\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int\limits_{(L)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(в)}\quad \iint\limits_{(D)} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy = \int\limits_{(L)} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds,$$

если положить

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, \nu) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(x, \nu).$$

Указание. (б) получается из 2) (б), если положить там $P = v\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = v\frac{\partial u}{\partial y}$; (а) есть частный случай (б) при $v = 1$; переменив в (б) роли u, v и вычитая результат из (б), получим (в).

4) Функция u, непрерывная вместе со своими производными и удовлетворяющая в рассматриваемой области (G) уравнению $\Delta u = 0$, называется гармонической в этой области.

В предположении, что функция u в области (G) имеет непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, доказать следующее утверждение: *для того чтобы функция $u = u(x, y)$ была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы, каков бы ни был простой замкнутый контур (L), выполнялось условие*

$$\int\limits_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0.$$

Указание. Воспользоваться формулой 3) (а).

5) *Если функция $u = u(x, y)$ — гармоническая в замкнутой области (D), то ее значения внутри области однозначно определяются ее значениями на контуре (L).*

Иными словами, если две гармонические в области (D) функции u_1, u_2 имеют на контуре (L) области одни и те же значения, то они тождественны во всей области.

Вводя в рассмотрение разность $u = u_1 - u_2$, сведем вопрос к доказательству того, что *гармоническая в области (D) функция, обращающаяся в нуль на контуре (L) области, тождественно равна нулю во всей области.*

Положим в формуле 3) (б) $v = u$. Учитывая наложенные на u условия, получим

$$\iint\limits_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0.$$

Отсюда следует, что во всей области (D)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

значит, u сводится к постоянной и, обращаясь в 0 на (L), равна 0 повсюду, что и требовалось доказать.

6) Пусть u есть гармоническая функция в области (G), (x_0, y_0) — какая-либо внутренняя точка этой области и (K_R) — окружность радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) *. Тогда имеет место важная формула:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{(K_R)} u(x, y)\, ds, \tag{7}$$

так что *значение гармонической функции в центре равно «среднему» ее значению на окружности.* Докажем это.

---

* Радиус R предполагается настолько малым, чтобы окружность (K_R) целиком лежала в области (G).

Положим $v = \ln r$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$; нетрудно проверить, что v является гармонической функцией в области, полученной из плоскости исключением точки (x_0, y_0). В этой же точке функция обращается в бесконечность.

Окружив точку (x_0, y_0) окружностью k_ρ радиуса ρ $(\rho < R)$, применим к области (D), содержащейся между окружностями (K_R) и (k_ρ), формулу 3) (6); контур (L) составляется из (K_R) и (k_ρ) вместе. Так как в этой области обе функции u, v — гармонические, то слева имеем нуль. Справа уничтожается интеграл

$$\int\limits_{(L)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

ибо, например, на окружности (K_R) $v = \ln R = \text{const.}$, а [ввиду 4)]

$$\int\limits_{(K_R)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0.$$

С другой стороны имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{d \ln r}{dr}\Bigg|_{r=R} = \frac{1}{R} \quad \text{на } (K_R)$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{d \ln r}{dr}\Bigg|_{r=\rho} = -\frac{1}{\rho} \quad \text{на } (k_\rho),$$

так что окончательно получаем:

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_{(k_\rho)} u\,ds = \frac{1}{R}\int\limits_{(K_R)} u\,ds.$$

При достаточно малом ρ функция u на окружности (k_ρ) сколь угодно мало отличается от значения $u(x_0, y_0)$ в центре, так что при $\rho \to 0$ левая часть имеет предел $2\pi \cdot u(x_0, y_0)$. Переходя к пределу, установим требуемое равенство.

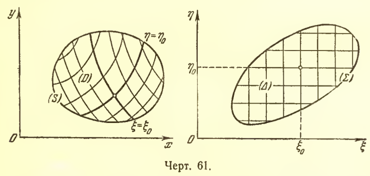
7) Из результата, доказанного в 6), вытекает интересное следствие: *если функция $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области (D), ограниченной контуром (L), и является гармонической внутри этой области, то своего наибольшего (наименьшего) значения функция не может достигать* в н у т р и *области*, за исключением случая, когда она сводится к постоянной.

Действительно, если бы упомянутая функция $u(x, y)$, не сводясь к постоянной, достигала, скажем, наибольшего своего значения во в н у т р е н н е й точке (x_0, y_0), то легко бы было бы придти к противоречию с формулой (7).

Теперь мы можем усилить и результат в 5), предположив, что функция u непрерывна в замкнутой области (D) и гармонична лишь в н у т р и области. И здесь достаточно установить, что функция u тождественно равна 0, если обращается в нуль на контуре. А это вытекает из того соображения, что в противном случае она достигла бы своего наибольшего или наименьшего значения в н у т р и области вопреки сделанному выше замечанию.

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле

603. Преобразование плоских областей. Предположим, что нам даны две плоскости, отнесенные одна — к прямоугольным осям x и y, а другая — к таким же осям ξ и η. Рассмотрим в этих плоскостях две замкнутые области: область (D) на плоскости xy и область (Δ) на плоскости $\xi\eta$. Каждая из этих областей может быть и неограниченной, в частности может охватывать и всю плоскость. Контур или границу области (если область не охватывает всей плоскости) мы будем предполагать простой кусочно-гладкой кривой; обозначим его символом (S) для области (D) и символом (Σ) для области (Δ) (черт. 61).



Черт. 61.

Допустим, что в области (Δ) дана система непрерывных функций:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которая каждой точке (ξ, η) области (Δ) относит одну определенную точку (x, y) области (D), причем ни одна точка (x, y) из (D) не будет пропущена, так что каждая такая точка отнесена хоть одной точке (ξ, η) из (Δ). Если различным точкам (ξ, η) отвечают различные же точки (x, y) (что мы впредь и будем предполагать), так что каждая точка (x, y) отнесена лишь одной точке (ξ, η), то формулы (1) *однозначно разрешимы относительно* ξ *и* η. Переменные ξ, η в свою очередь являются однозначными функциями от x, y в области (D):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Таким образом, между областями (D) и (Δ) устанавливается *взаимно однозначное* или *одно-однозначное* соответствие. Говорят также, что формулы (1) осуществляют *преобразование области* (Δ) *в область* (D), а формулы (1a) дают *обратное преобразование области* (D) *в область* (Δ).

Если названные области заполняют соответствующие плоскости, то мы имеем дело с *преобразованием одной плоскости в другую*. Наконец, если обе плоскости совпадают, т. е. если точки (x, y) и (ξ, η) рассматриваются как точки одной и той же плоскости, то налицо *преобразование плоскости в самое себя*.

Мы будем предполагать, далее, что функции (1) и (1а) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные (первого порядка). Тогда, как известно [п° **203**, (4)],

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 1,$$

так что оба функциональных определителя отличны от нуля и, по непрерывности, сохраняют постоянный знак.

Из того факта, что определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля в области (Δ), уже следует, что внутренней точке (ξ_0, η_0) области (Δ) отвечает в силу формул (1) внутренняя же точка (x_0, y_0) области (D), ибо — по теореме о существовании неявных функций [п° **208**] — этими формулами в целой окрестности точки (x_0, y_0) переменные ξ и η определяются как однозначные функции от x и y. Аналогично, внутренней точке области (D) отвечает всегда внутренняя точка области (Δ). Отсюда уже ясно, что точкам контура (Σ) отвечают именно точки контура (S), и обратно.

Если взять в области (Δ) простую кусочно-гладкую кривую (Λ), то с помощью преобразования (1) она перейдет в подобную же кривую (L) в области (D). Действительно, пусть уравнения кривой (Λ) будут:

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t) \\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta \quad \text{или} \quad \alpha \geqslant t \geqslant \beta), \tag{3}$$

причем (ограничиваясь гладким куском кривой) можно функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ считать имеющими непрерывные производные не обращающиеся одновременно в нуль. Подставляя эти функции в формулы преобразования (1), мы получим параметрические уравнения соответствующей кривой (L):

$$x = x(\xi(t), \eta(t)) = x(t), \; y = y(\xi(t), \eta(t)) = y(t). \tag{4}$$

Легко видеть, что эти функции также имеют непрерывные производные:

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta}\eta'(t), \; y'(t) = \frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t), \tag{5}$$

которые к тому же не могут одновременно обратиться в нуль, так что особых точек на кривой (L) нет. Действительно, в противном случае, ввиду неравенства нулю определителя $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$, из (5) следовало бы, что одновременно $\xi' = 0$ и $\eta' = 0$, что невозможно.

Если точка (ξ, η) на плоскости $\xi\eta$ описывает замкнутый контур (Λ), скажем, в положительном направлении, то соответствующая точка (x, y) опишет также некоторый замкнутый же контур (L) на плоскости xy, но *направление его может оказаться как положительным, так и отрицательным*. Вопрос этот зависит, как мы увидим ниже [**606**, 1°], от знака якобиана (2).

Задание пары значений переменных ξ и η из области (Δ) однозначно определяет некоторую точку в области (D) на плоскости xy (и обратно). Это дает основание и числа ξ, η называть *координатами точек области* (D). По сути дела, уравнения (1)* дают нам *параметрическое представление плоской фигуры* (D), являющееся частным случаем параметрического представления поверхностей, о котором уже была речь [**228**].

Как и там, кривую, составленную из точек области (D), у которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называют *координатной линией*. Например, полагая в (1) $\eta = \eta_0$, мы получим параметрическое представление координатной линии:

$$x = x(\xi, \eta_0), \quad y = y(\xi, \eta_0)$$

(роль параметра здесь играет ξ). Неявное уравнение той же линии получим, полагая $\eta = \eta_0$ во втором из уравнений (1а):

$$\eta(x, y) = \eta_0.$$

В связи с тем, что координатные линии, вообще говоря, будут кривыми, числа ξ, η, характеризующие положение точки на плоскости xy, и в этом случае (как и в случае кривой поверхности) называют *криволинейными координатами точки*.

Придавая координате η различные (возможные для нее) постоянные значения, мы получим целое семейство координатных линий на плоскости xy. Фиксируя значение координаты ξ, мы получим другое семейство координатных линий. При наличии взаимно однозначного соответствия между рассматриваемыми областями различные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой, и через любую точку области (D) проходит по одной линии из каждого семейства.

Вся сетка координатных линий на плоскости xy является изображением сетки прямых $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$ на плоскости $\xi\eta$ (черт. 61).

604. Примеры. 1) Простейшим и важнейшим примером криволинейных координат являются *полярные координаты* r, θ. Они имеют наглядное геомет-

* Если присоединить к ним еще уравнение $z = 0$.

рическое истолкование, как полярный радиус-вектор и полярный угол, но могут быть введены и формально, с помощью известных соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \qquad (r \geqslant 0).$$

Если значения r и θ откладывать по двум взаимно перпендикулярным осям, считая, скажем, r — абсциссой, а θ — ординатой (при правой ориентации осей), то каждой точке полуплоскости $r \geqslant 0$ по указанным формулам отвечает одна определенная точка на плоскости xy.

Читателю наверное приходилось иметь дело с относящимися к этому случаю координатными линиями: прямым $r = \text{const}$. отвечают круги радиуса r с центром в начале, а прямым $\theta = \text{const}$. отвечают лучи, исходящие из начала под углом θ к оси x (черт. 62).

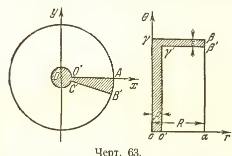
Черт. 62.

Однако в данном случае формулы преобразования, вообще, не будут однозначно разрешимы: изменение величины угла θ на $2k\pi$ (где k — целое) не отразится на значениях x и y. Для того чтобы получить все точки плоскости xy, достаточно ограничиться значениями

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Каждой точке (x, y), отличной от начала, отвечает одно значение $r > 0$ и одно значение θ в указанных пределах. Но неустранимое нарушение однозначности соответствия связано с началом координат: точке $x = y = 0$ отвечает на плоскости $r\theta$ вся ось θ (или, если угодно, отрезок ее от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$).

Рассмотрим на плоскости $r\theta$ замкнутый прямоугольник $[0, R; 0, 2\pi]$ или $o\alpha\beta\gamma$ (черт. 63); легко видеть, что на плоскости xy ему отвечает замкнутый круг, описанный вокруг начала O радиусом $R = OA$. Но весь контур этого круга отвечает одной лишь стороне $\alpha\beta$ упомянутого прямоугольника; сторонам $o\alpha$ и $\beta\gamma$ (обеим!) отвечает один и тот же радиус OA круга; наконец, всей стороне $o\gamma$ отвечает лишь точка O. Здесь явно не соблюдены указанные в предыдущем n° условия!



Черт. 63.

Однако если сдвинуть сторону $o\gamma$ на малую величину $\rho = oo'$, а сторону $\gamma\beta$ на $\varepsilon = \beta\beta'$, то новому прямоугольнику $o'\alpha\beta'\gamma'$ будет отвечать на плоскости xy фигура $O'AB'C'$, полученная из круга удалением малого круга радиуса ρ и сектора с центральным углом ε, с соблюдением уже всех требований. При перемещении точки на плоскости $r\theta$ по отрезкам $\alpha\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'o'$, $o'\alpha$ соответствующая точка на плоскости xy опишет по порядку неполную окружность $\overset{\frown}{AB'}$ (радиуса R), отрезок $B'C'$, неполную окружность $\overset{\frown}{C'O'}$ (радиуса ρ) и отрезок $O'A$. Заметим попутно, что положительному обходу на плоскости $r\theta$ отвечает положительный же обход на плоскости xy.

Якобиан в данном случае равен

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

он сохраняет (если исключить начало) положительный знак.

2) Рассмотрим преобразование плоскости в самое себя, определяемое формулами

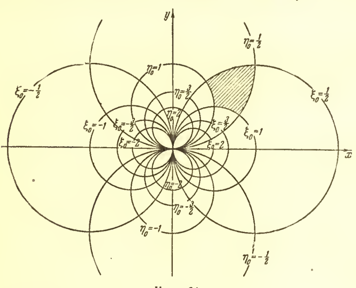
$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

(ξ и η не равны одновременно нулю).

Если совместить оси x и ξ, y и η, то преобразование это имеет наглядное геометрическое истолкование. Так как

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta},$$

то ясно, что соответствующие точки лежат всегда на одном луче из начала, причем их расстояния от начала в произведении дают единицу.



Черт. 64.

Преобразование это называется *инверсией*. Оно однозначно обратимо:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(снова x и y не равны одновременно нулю).

Координатными линиями будут окружности, проходящие через начало:

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{\xi_0} x = 0, \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{\eta_0} y = 0,$$
$$(\xi_0 \neq 0) \qquad\qquad (\eta_0 \neq 0)$$

центры которых лежат, соответственно, на осях x и y (черт. 64). При $\xi_0 = 0$ получается ось y $(x = 0)$, а при $\eta_0 = 0$ — ось x $(y = 0)$.

Квадрату $\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1\right]$ на плоскости $\xi\eta$, например, отвечает заштрихованная область на черт. 64. Направления обхода контуров здесь не совпадают.

Так как

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{2\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2},$$

то якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2} < 0.$$

3) Если исходить из формул преобразования

$$x = \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta,$$

то при любых ξ, η отсюда однозначно получаются x, y. Разрешая же эти формулы относительно ξ, η, найдем:

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}},$$

где знаки ξ и η связаны условием $\xi\eta = \frac{1}{2}y$. Таким образом, каждой точке (x, y), исключая начало, отвечают две точки (ξ, η), симметричные относительно начала. Чтобы восстановить однозначность, можно, например, ограничиться верхней частью плоскости $\xi\eta$ (со включением положительной части оси ξ, но без ее отрицательной части).

Координатными линиями здесь будут софокусные (с фокусом в начале) и соосные параболы:

$$y^2 = 4\xi_0^2(\xi_0^2 - x) \quad \text{и} \quad y^2 = 4\eta_0^2(x + \eta_0^2)$$
$$(\xi_0 \neq 0) \qquad\qquad (\eta_0 \neq 0)$$

(черт. 65). Значению $\xi_0 = 0$ отвечает отрицательная часть оси x, а значению $\eta_0 = 0$ — ее положительная часть. Якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{vmatrix} = 4(\xi^2 + \eta^2) > 0,$$

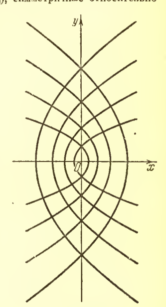
если исключить начало.

4) Иногда удобно наперед задаться сеткой координатных линий и по ним установить систему криволинейных координат.

Рассмотрим, например, два семейства парабол (черт. 66):

$$y^2 = 2px \quad \text{и} \quad x^2 = 2qy;$$

каждое из них в отдельности заполняет всю плоскость xy (если исключить оси координат).



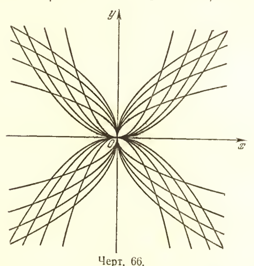
Черт. 65.

Естественно ввести $\xi = 2p$ и $\eta = 2q$ в качестве криволинейных координат. Из равенств $y^2 = \xi x$ и $x^2 = \eta y$ имеем

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \quad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{y^2}{x}, \quad \eta = \frac{x^2}{y} \ (x, y \neq 0).$$

Якобиан здесь равен

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}.$$



Черт. 66.

5) Будем исходить из семейства софокусных и соосных конических сечений

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1 \tag{6}$$

(эллипсов — при $\lambda > c$, гипербол — при $0 < \lambda < c$; черт. 67).

Через каждую точку $(x,\ y)$ плоскости, не лежащую на осях, проходят один эллипс и одна гипербола из этого семейства. Действительно, левая часть получаемого из (6) уравнения

$$(\lambda^2)^2-\lambda^2(x^2+y^2+c^2)+c^2x^2=0$$

имеет знак $+$ при $\lambda=0$, знак $-$ при $\lambda=c$ и снова знак $+$ при больших λ. Следовательно, уравнение это имеет **два положительных** корня: один $\lambda > c$ и другой $\mu < c$*; это доказывает наше утверждение.

Если предыдущее уравнение рассматривать как квадратное уравнение относительно λ^2, то по известному свойству корней имеем

$$\lambda^2+\mu^2=x^2+y^2+c^2, \quad \lambda^2\mu^2=c^2x^2,$$

а отсюда легко выразить x и y через λ и μ:

$$x=\pm\frac{\lambda\mu}{c},\ \ y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\ (c^2-\mu^2)}}{c}.$$

---

* Чтобы не путать этих корней, мы для бо́льшего сохраняем обозначение λ, а меньший обозначаем через μ.

Ограничиваясь первым координатным углом, мы должны сохранить здесь лишь положительные знаки. Числа λ, μ можно рассматривать, как криволинейные координаты точек этого угла; их называют *эллиптическими координатами.* Координатными линиями в этом случае будут как раз исходные конические сечения.

Подчеркнем, что λ изменяется от c до $+\infty$, а μ — от 0 до c. Для крайних значений мы получим:

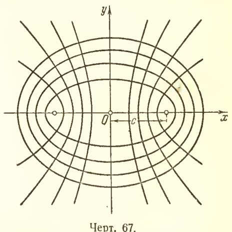
при $\lambda = c$ — отрезок оси x от $x=0$ до $x=c$,

при $\mu = c$ — отрезок оси x от $x=c$ до $x=+\infty$,

при $\mu = 0$ — положительную часть оси y.

Наконец, легко вычислить якобиан:

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\lambda,\ \mu)} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}} < 0.$$



Черт. 67.

605. Выражение площади в криволинейных координатах. Предположим, что на плоскости xy задана некоторая область (D), ограниченная кусочно-гладким контуром (S) без кратных точек. Пусть формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между этой областью и областью (Δ) на плоскости $\xi\eta$, ограниченной подобным же контуром (Σ).

Мы сохраним все предположения n° **603** относительно этого преобразования областей и, сверх того, еще предположим, что существуют и непрерывны в области (Δ) смешанные производные второго порядка для какой-либо из функций (1), скажем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial\xi}$$

(в силу непрерывности, они будут иметь равные значения, **190**) *.

При этих предположениях поставим себе задачей выразить площадь D рассматриваемой области на плоскости xy в виде двойного интеграла, распространенного на область (Δ) на плоскости $\xi\eta$.

Мы будем исходить из формулы, выражающей площадь (D) криволинейным интегралом, взятым по контуру (S) области (D)

$$D = \int\limits_{(S)} x\,dy \tag{7}$$

[см. **551**, (10)].

* Отметим здесь же, что эти дополнительные предположения несущественны для справедливости окончательного результата и введены лишь для облегчения доказательства.

План дальнейших преобразований таков: сначала мы перейдем, пользуясь параметрическими уравнениями контура, от криволинейного интеграла (7) к обыкновенному определенному интегралу. Затем преобразуем этот последний опять к криволинейному интегралу, но взятому на этот раз уже по контуру (Σ) области (Δ). Наконец, пользуясь формулой Грина, заменим полученный криволинейный интеграл двойным интегралом по области (Δ).

Во исполнение этого плана нам нужны параметрические уравнения контура (S). Так как в дальнейшем мы имеем в виду перейти к контуру (Σ), то и сейчас мы предпочитаем исходить именно из уравнений этого контура. Пусть (3) дает параметрическое представление кривой (Σ); тогда (4) даст, очевидно, такое же представление для кривой (S), поскольку [как мы упоминали в n° **603**] именно она соответствует на плоскости xy контуру (Σ). Пределы α и β изменения t мы выберем так, чтобы при переходе от α к β кривая (S) описывалась в положительном направлении.

Тогда, согласно формуле (5) n° **547**

$$D=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt$$

или, если принять во внимание (4) и (5),

$$D=\int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t),\ \eta(t))\left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial \eta}\,\eta'(t)\right]dt. \tag{8}$$

Сопоставим этот интеграл с криволинейным интегралом

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi,\ \eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta\right), \tag{9}$$

взятым по контуру (Σ) в положительном направлении. Если пожелать свести последний по обычному правилу к обыкновенному определенному интегралу, то пришлось бы подставлять сюда вместо ξ и η функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ из параметрических уравнений кривой (Σ), и мы вернулись бы к интегралу (8).

Впрочем, нужно иметь в виду еще одно обстоятельство. При изменении t от α до β описывается в положительном направлении контур (S) — так мы выбрали эти пределы. Но контур (Σ) при этом может описываться как в положительном, так и в отрицательном направлении; таким образом, интегралы (8) и (9) могут на деле разниться знаками. Во всяком случае,

$$D=\pm\int_{(\Sigma)} x\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi+x\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta, \tag{10}$$

причем (подчеркнем это еще раз) *знак плюс имеет место, если положительному обходу контура* (S) *отвечает положительный же обход контура* (Σ), *и знак минус — в противном случае.*

Остается, наконец, преобразовать полученный криволинейный интеграл в двойной. Для этого надлежит воспользоваться формулой Грина

$$\int\limits_{(\Sigma)} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

где полагаем

$$P(\xi, \eta) = x\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q(\xi, \eta) = x\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\, \partial \xi},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta},$$

а смешанные производные второго порядка от y равны между собой, то

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)},$$

и мы приходим к формуле

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta.$$

Мы видели в n° **603**, что при сделанных предположениях якобиан

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

сохраняет в области (Δ) определенный знак. Этот же знак имеет и интеграл. Но перед ним еще стоит двойной знак $\pm$; так как в результате должно получиться существенно положительное число D, то ясно, что *знак перед интегралом совпадает со знаком якобиана.* Если ввести этот знак в подинтегральную функцию, то там получится, очевидно, абсолютная величина якобиана, так что окончательное выражение для площади будет

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta. \tag{11}$$

Это и есть та формула, которую мы желали установить. Подинтегральное выражение

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta = |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta$$

обычно называют *элементом площади в криволинейных координатах*. Мы видели, например, что в случае перехода к полярным координатам якобиан равен r; следовательно, элемент площади в полярных координатах есть $r\,dr\,d\theta$.

606. Дополнительные замечания. 1°. Если сопоставить правило, по которому выбирался знак, плюс или минус, в формуле (10), с тем фактом, что этот знак необходимо совпадает со знаком якобиана, то получится интересное следствие: *если якобиан сохраняет положительный знак, то положительные направления обхода контуров* (S) и (Σ) *соответствуют друг другу по формулам преобразования; если же якобиан имеет отрицательный знак, то положительному направлению на одном контуре соответствует отрицательное направление на другом.*

Очевидно, это же имеет место и по отношению к любой паре взаимно соответствующих простых замкнутых контуров (L) и (Λ), лежащих в областях (D) и (Δ). Полученный результат легко проверяется на примерах, приведенных в n° **604**.

2°. Применяя к формуле (11) теорему о среднем [**592**,(9)], получим соотношение

$$D = |J(\bar{\xi},\ \bar{\eta})| \cdot \Delta, \tag{12}$$

где $(\bar{\xi},\ \bar{\eta})$ есть некоторая точка из области (Δ), а Δ — площадь этой области.

Сопоставим это соотношение с формулой Лагранжа

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\bar{\xi})(\beta - \alpha) \qquad (\alpha < \bar{\xi} < \beta).$$

Если $x = f(\xi)$ есть монотонная функция, то она взаимно однозначно связывает промежуток $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ с промежутком $f(\alpha) \leqslant x \leqslant f(\beta)$ (или $f(\beta) \leqslant x \leqslant f(\alpha)$, если $f(x)$ — убывающая функция). Обозначим длины этих промежутков через δ и d; тогда формула Лагранжа приводит к равенству

$$d = |f'(\bar{\xi})| \cdot \delta, \tag{13}$$

сходному с равенством (12).

Если в формуле (13) «сжимать» промежуток (δ) в точку ξ, то в результате получим соотношение

$$|f'(\xi)| = \lim \frac{d}{\delta},$$

так что абсолютная величина производной является как бы *коэффициентом искажения* (или *коэффициентом растяжения*) прямой ξ в данной ее точке при преобразовании ее в прямую x.

Точно так же из формулы (12) путем «сжатия» области (Δ) в точку (ξ, η) получаем

$$|J(\xi, \eta)| = \lim \frac{D}{\Delta}\,^*,$$

так что абсолютная величина якобиана играет роль *коэффициента искажения* или *коэффициента растяжения* плоскости $\xi\eta$ (в данной ее точке) при преобразовании ее в плоскость xy.

Это замечание указывает на глубокую аналогию между производной и якобианом [ср. главу шестую].

3°. Формула (11) показывает, что при безграничном уменьшении площади Δ также безгранично уменьшается и соответствующая ей площадь D. Отсюда уже легко установить, что преобразование областей, изученное в п° **603**, обладает и следующим важным свойством: *кривую* (Λ) *с площадью нуль в области* (Δ) *оно переводит в некоторую кривую* (L) *в области* (D), *также имеющую площадь нуль.*

4°. Формула (11) выведена в предположении взаимно однозначного соответствия между областями (D) и (Δ), а также непрерывности функций (1), (2) и их частных производных. Однако на практике обычно приходится сталкиваться со случаями, когда эти предположения нарушаются в отдельных точках или вдоль отдельных кривых.

Если упомянутые точки и кривые на обеих плоскостях могут быть заключены в произвольно малые по площади области (d) и (δ), то по выделении их формула уже становится применимой:

$$D - d = \iint\limits_{(\Delta)-(\delta)} |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta. \qquad (11^*)$$

Пусть якобиан в области (Δ) сохраняет ограниченность:

$$|J(\xi, \eta)| \leqslant M;$$

тогда интеграл в (11^*) разнится от интеграла в (11) на величину

$$\iint\limits_{(\delta)} |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta \leqslant M\delta.$$

Переходя в (11^*) к пределу при d и $\delta \to 0$, восстановим формулу (11).

Для иллюстрации вернемся к примеру 1) в п° **604** и к фигурам, изображенным на черт. 63. Непосредственно к прямоугольнику $(\Delta) = [0, R; 0, 2\pi]$ и к кругу (D) радиуса R с центром в начале формулы (11), которая для этого случая принимает вид

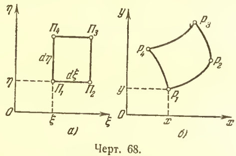
$$D = \iint\limits_{(\Delta)} r\, dr\, d\theta,$$

* По сути дела мы дифференцируем интеграл (11) по области в точке (ξ, η) [**593**].

применить нельзя. Но если выключить заштрихованные области (площади которых вместе с ρ и ε стремятся к нулю), то к получающимся областям эту формулу применить можно; остается перейти к пределу.

607. Геометрический вывод. Формула (11) выведена нами с помощью хотя и простых, но формальных и не наглядных рассуждений. Мы считаем полезным привести другой вывод этой формулы, не вполне строгий, но зато совершенно прозрачный с геометрической стороны. Этот вывод принадлежит М. В. Остроградскому.

Рассмотрим снова преобразование плоскости $\xi\eta$ в плоскость xy, которое задается формулами (1). Выделим на плоскости $\xi\eta$ бесконечно



Черт. 68.

малый прямоугольник $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ со сторонами $d\xi$ и $d\eta$, параллельными осям ξ и η (черт. 68, *а*). Изображением этого прямоугольника в плоскости xy служит криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ (черт. 68, *б*); определим его площадь.

Вершины прямоугольника имеют координаты

$$\Pi_1(\xi,\ \eta),\ \ \Pi_2(\xi+d\xi,\ \eta),\ \ \Pi_3(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta),\ \ \Pi_4(\xi,\ \eta+d\eta);$$

в таком случае соответствующие вершины криволинейного четырехугольника будут иметь такие координаты:

$$\begin{aligned}&P_1(x(\xi,\ \eta),\ y(\xi,\ \eta)),\\&P_2(x(\xi+d\xi,\ \eta),\ y(\xi+d\xi,\ \eta)),\\&P_3(x(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta),\ y(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta)),\\&P_4(x(\xi,\ \eta+d\eta),\ y(\xi,\ \eta+d\eta)).\end{aligned}$$

Если ограничиться членами первого порядка относительно $d\xi$, $d\eta$, то приближенно можно взять точки:

$$P_1(x,\ y),\quad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}\,d\xi,\quad y+\frac{\partial y}{\partial\xi}\,d\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial\xi}\,d\xi+\frac{\partial x}{\partial\eta}\,d\eta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial\xi}\,d\xi+\frac{\partial y}{\partial\eta}\,d\eta\right),$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial\eta}\,d\eta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial\eta}\,d\eta\right),$$

где $x=x(\xi,\ \eta)$, $y=y(\xi,\ \eta)$ и, вообще, все производные вычислены в точке $(\xi,\ \eta)$. Так как проекции отрезков P_1P_2 и P_3P_4 на обе оси

соответственно равны, то отрезки эти равны и параллельны, так что (с точностью до малых высшего порядка) четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ есть параллелограмм.

Его площадь равна удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$. Из аналитической же геометрии известно, что удвоенная площадь треугольника, вершины которого находятся в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Применяя эту формулу к нашему случаю, получим, что искомая площадь (снова — с точностью до малых высшего порядка) равна абсолютной величине определителя

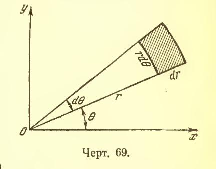
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta.$$

Итак,

$$\text{площ. } P_1P_2P_3P_4 \doteq \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta.$$

Разлагая фигуру (Δ) на плоскости $\xi\eta$ прямыми, параллельными осям, на бесконечно малые прямоугольники (и пренебрегая «неправильными» элементами у контура), мы одновременно разложим и фигуру (D) на плоскости xy на криволинейные четырехугольники рассмотренного вида. Суммируя полученные выражения для площадей их, вновь приходим к формуле (11).

Приведенное рассуждение, таким образом, подчеркивает важную геометрическую идею: *сущность формулы* (11) *состоит в том, что для определения площади фигуры* (D) *эта фигура разлагается не на прямоугольные, а на криволинейные элементы с помощью сетки координатных линий.*



Черт. 69.

В некоторых простых случаях эта идея позволяет находить выражение «элемента площади» в криволинейных координатах почти без вычислений.

Например, в случае перехода к полярным координатам можно рассуждать так. Элементарному прямоугольнику со сторонами dr и $d\theta$ в плоскости $r\theta$ на плоскости xy отвечает фигура, ограниченная дугами окружностей радиусов r и $r + dr$ и двумя лучами, исходящими из начала под углами θ и $\theta + d\theta$ к оси x (черт. 69). Принимая прибли-

женно эту фигуру за прямоугольник со сторонами dr и $r\,d\theta$, сразу получаем искомое выражение $r\,dr\,d\theta$ элемента площади.

608. Примеры. Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

(а) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$
(лемниската),

(б) $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$,

(в) $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$.

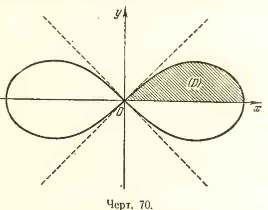
Решение. Наличие двучлена x^2+y^2 во всех случаях наталкивает на мысль перейти к полярным координатам, полагая

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

и вычисляя искомую площадь по формуле

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} r\,dr\,d\theta. \tag{14}$$

(а) Вид лемнискаты нам знаком (черт. 70). Кривая симметрична относительно координатных осей (это легко усмотреть и из уравнения кривой, ибо оно не



Черт. 70.

меняет вида при замене x на $-x$ или y на $-y$). Поэтому достаточно определить площадь части (D) фигуры, содержащейся в первом координатном угле, а затем учетверить ее.

Полярным уравнением лемнискаты служит

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta,$$

причем (если ограничиться первым координатным углом) θ надлежит изменять лишь от 0 до $\frac{\pi}{4}$ ввиду того, что $\cos 2\theta$ должен быть положительным. Таким образом, область (Δ) на плоскости $r\theta$, отвечающая (D), ограничена кривой

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(образ лемнискаты), отрезком оси r (который отвечает отрезку оси x) и отрез-

ком оси θ, от $\theta=0$ до $\theta=\frac{\pi}{4}$ (образ одной лишь начальной точки — с нарушением взаимной однозначности соответствия) *.

Имеем

$$D=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2},$$

так что вся искомая площадь есть $2a^2$.

(б) Полезно наперед составить себе общее представление о виде кривой. Кривая симметрична относительно оси x (уравнение не меняется от замены y на $-y$), расположена вправо от оси y (x не может быть отрицательным); пересекает ось x при $x=0$ и $x=2a$. К тому же кривая ограничена: из самого уравнения ясно, что

$$x^4 \leqslant 2ax^3,$$

так что

$$x \leqslant 2a,$$

а так как и $y^4 \leqslant 2ax^3$, то и $|y| \leqslant 2a$. Эскиз кривой дан на черт. 71.

Черт. 71.

Полярное уравнение кривой будет: $r=2a\cos^3\theta$, где θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Ввиду симметрии можно написать

$$D=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos^3\theta} r\,dr = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{8}\pi a^2.$$

(в) Кривая симметрична относительно обеих осей. Хотя начальная точка $x=y=0$ формально «принадлежит» кривой, ибо удовлетворяет уравнению, но эта точка является и з о л и р о в а н н о й; действительно, при $x \geqslant y > 0$ легко получаем из уравнения кривой

$$(2x^2)^3 \geqslant 2a^2x^4, \text{ откуда } x \geqslant \frac{a}{2},$$

так что вблизи начала точек кривой нет **. Исключим начало из рассмотрения. Легко видеть, что кривая ограничена: при $x \geqslant y$, очевидно, $x^6 \leqslant 2a^2x^4$, $x^2 \leqslant 2a^2$ и т. д. Кривая имеет примерно вид, изображенный на черт. 72.

* См. по этому поводу замечание 4° в n° **406**.

** В этом, разумеется, можно было бы убедиться и с помощью критерия n° **236**.

Полярное уравнение кривой: $r^2 = a^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$. Учитывая симметрию, имеем

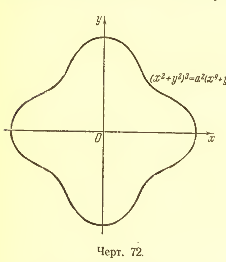
$$D = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}} r\,dr = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta + \sin^4\theta)\,d\theta =$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

2) Показать, что формула (14) непосредственно приводит к уже известной формуле для вычисления площади сектора в полярных координатах [338]:

$$D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta,$$

где под r разумеется та функция от θ, которая фигурирует в полярном уравнении кривой.



Черт. 72.

Все задачи 1) можно было бы решить и непосредственно по этой формуле.

3) Найти площади фигур, ограниченных кривыми:

(а) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$,

(б) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$,

(в) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$,

(г) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^2y}{c^3}$.

Решение. В тех случаях, когда в уравнении кривой фигурирует двучлен $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, рекомендуется вводить «обобщенные» полярные координаты, которые с декартовыми связаны формулами

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta\,^*.$$

Геометрический смысл этого преобразования сводится к сжатию плоскости к координатным осям с последующим переходом к полярным координатам.

Якобиан преобразования равен abr.

(а) Кривая ограничена, симметрична относительно начала (ибо ее уравнение не изменяет вида при одновременной замене x на $-x$ и y на $-y$); две симметричные петли лежат одна в первом координатном угле, а другая — в третьем ($xy \geqslant 0$); начало есть единственная точка пересечения с осями.

* При применении этих координат мы сталкиваемся с таким же нарушением однозначности соответствия, как и в случае полярных координат. См. 606, 4°.

Уравнение образа нашей кривой на плоскости $r\theta$ будет

$$r^2 = \frac{ab}{c^2} \sin\theta\cos\theta \,*.$$

С учетом симметрии имеем

$$D = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}} abr\, dr = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

(б) Кривая ограничена, симметрична относительно осей; начало служит лишь изолированной ее точкой. Имеем

$$D = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} r\, dr = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\, ab\,(a^2 + b^2).$$

(в) Кривая ограничена, симметрична относительно осей; начало есть единственная ее точка пересечения с осью y, но с осью x она пересекается еще в точках $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Для петли, лежащей вправо от оси y, будем иметь $r = \frac{a}{c}\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, так что

$$D = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{c}\cos\theta} r\, dr = \frac{2a^3b}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^3b}{c^2}.$$

(г) Кривая ограничена, симметрична относительно оси y, лежит вверх от оси x. Начало есть единственная точка пересечения с осями, так что кривая состоит из двух петель, лежащих в первом и во втором координатных углах. Уравнение кривой в новых координатах:

$$r = \frac{a^2b}{c^3}\cos^2\theta\sin\theta.$$

Ответ. $D = \frac{\pi}{32}\frac{a^5b^3}{c^6}$.

4) Найти площадь петли кривой:

(а) $(x+y)^4 = ax^2y$, (б) $(x+y)^3 = axy$, (в) $(x+y)^5 = ax^2y^2$.

Решение. Если рассматривать лишь части кривых, содержащиеся в первом координатном угле (так что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), то все они оказываются ограниченными, в чем можно убедиться подобно 1) (б). Кривые проходят через начало, не имея других точек пересечения с осями. Отсюда ясно, что именно эти части представляют собой петли, о которых говорится в задаче.

В предыдущих примерах переход от сложного уравнения кривой в декартовых координатах к простому уравнению в криволинейных координатах строился по существу на использовании тождества $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Двучлен $x + y$

---

* Легко усмотреть, что кривая является как бы сдавленной лемнискатой.

тоже подсказывает мысль об использовании этого же тождества: положим (только для $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$!)

$$x = r\cos^2\theta, \quad y = r\sin^2\theta.$$

Якобиан преобразования будет:

$$J = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & 2r\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 2r\sin\theta\cos\theta\,*.$$

(а) Уравнение петли в новых координатах

$$r = a\cos^4\theta\sin^2\theta.$$

Далее,

$$D = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{a\cos^4\theta\sin^2\theta} r\,dr = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\theta\sin^5\theta\,d\theta = \frac{a^2}{210}.$$

(б) $D = \frac{a^2}{60}$. (в) $D = \frac{a^2}{1260}$.

5) Укажем теперь другой подход к выбору системы криволинейных координат, который часто оказывается полезным при определении площади *криволинейного четырехугольника*. Если обе пары кривых представляющих противоположные стороны этого четырехугольника, входят в состав каждая — своего *семейства кривых*, заполняющих плоскость (и зависящих от одного параметра), то именно эти *два* семейства естественно принять за сетку координатных линий. Их параметры обычно и дают удобную для данного случая систему криволинейных координат.



Черт. 73.

Разъясним этот прием на примере. Пусть требуется найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by,$$

где $0 < p < q$ и $0 < a < b$ (черт. 73).

Здесь удобно рассмотреть два семейства парабол:

$$y^2 = \xi x \quad (p \leqslant \xi \leqslant q) \text{ и}$$
$$x^2 = \eta y \quad (a \leqslant \eta \leqslant b),$$

каждое из которых заполняет нашу фигуру, и из них составить сетку координатных линий. Это равносильно тому, что параметры их ξ и η мы принимаем за криволинейные координаты. Все это уже нам знакомо по n° 579, 4); из написанных уравнений имеем: $x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}$ и $y = \sqrt[3]{\xi^2\eta}$, так что якобиан

$$J = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда сразу получаем

$$D = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

* Здесь снова находит себе применение сказанное в **606**, 4°.

6) Подобным же методом предлагается определить площадь четырехугольника, ограниченного

(а) гиперболами $xy = p$, $xy = q$ и прямыми $y = ax$, $y = bx$;
(б) гиперболами $xy = p$, $xy = q$ и параболами $y^2 = ax$, $y^2 = bx$;
(в) параболами $x^2 = py$, $x^2 = qy$ и прямыми $y = ax$, $y = bx$;
(г) прямыми $x + y = p$, $x + y = q$ и $y = ax$, $y = bx$.

При этом во всех случаях предполагается, что $0 < p < q$ и $0 < a < b$.

(а) Решение. Сетка координатных линий:

$$xy = \xi \quad (p \leqslant \xi \leqslant q), \ y = \eta x \quad (a \leqslant \eta \leqslant b).$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}$$

и

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\eta}.$$

Наконец,

$$D = \frac{1}{2}\int_p^q d\xi \int_a^b \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2}(q - p)\ln\frac{b}{a}.$$

(б) Указание. Положить $xy = \xi$, $y^2 = \eta x$ $(p \leqslant \xi \leqslant q,\ a \leqslant \eta \leqslant b)$; якобиан $J = \frac{1}{3\eta}$. *Ответ.* $D = \frac{1}{3}(q - p)\ln\frac{b}{a}$.

(в) *Ответ.* $D = \frac{1}{6}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)$.

(г) *Ответ.* $D = \frac{1}{2}\frac{(b - a)(q^2 - p^2)}{(1 + a)(1 + b)}$.

7) Найти площадь астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Параметрические уравнения астроиды:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Если заменить здесь a через r $(0 \leqslant r \leqslant a)$, то получим семейство подобных астроид, заполняющих нашу фигуру:

$$x = r\cos^3 t, \quad y = r\sin^3 t.$$

При постоянном t, очевидно, эти уравнения дадут пучок лучей из начала. Воспользуемся же этими формулами, как формулами, преобразования; очевидно, в основе здесь лежит по существу та же идея, что и в двух предыдущих задачах. Якобиан

$$J = 3r\sin^2 t\cos^2 t.$$

Окончательно,

$$D = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

8) Рассмотрим преобразование, которое определяется формулами

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \sqrt{uv} \qquad (u \geqslant 0,\ v \geqslant 0).$$

Очевидно, всегда $x \geqslant y \geqslant 0$, так что точка (x, y) лежит в угловом пространстве между положительным направлением оси x и биссектрисой $y = x$ первого координатного угла. Обратно, каждой точке (x, y) из этого углового пространства отвечают вообще д в е пары неотрицательных значений u, v, являющиеся корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 2xz + y^2 = 0.$$

Можно восстановить однозначность соответствия, если условиться всегда считать $u \geqslant v$, т. е. и точку (u, v) брать в пределах аналогичного углового пространства на плоскости uv; тогда

$$u = x + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad v = x - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Легко вычислить якобиан преобразования

$$J = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}\right).$$

Любопытную особенность имеют здесь координатные линии. При $u = \text{const.}$ получаем:

$$y^2 = u(2x - u) = 2u\left(x - \frac{u}{2}\right),$$

и аналогично при $v = \text{const.}$

$$y^2 = v(2x - v) = 2v\left(x - \frac{v}{2}\right).$$

Таким образом, мы в обоих случаях получаем одно и то же (!) семейство парабол

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

ось которых совпадает с осью x, а директриса — с осью y. Каждая такая парабола касается прямой $y = x$ в точке (p, p).

Кажущийся парадокс разрешается просто: при $u = p$ и v, меняющемся от 0 до p, описывается ч а с т ь этой параболы от ее вершины до упомянутой точки касания, а при $v = p$ и u, меняющемся от p до $+\infty$, описывается о с т а л ь н а я ч а с т ь параболы, простирающаяся в бесконечность (черт. 74).

Черт. 74.

Если на плоскости xy взять фигуру (D_1), ограниченную осью x и д в у м я параболами:

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right), \quad y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$$
$$(0 < p < q),$$

то на плоскости uv ей будет отвечать прямоугольник $(\Delta_1) = [p, q; 0, p]$, причем отрезкам прямых $u = p$ и $v = p$ будут отвечать две дуги первой параболы, смыкающиеся в точке касания. Аналогично, фигуре (D_2) (на плоскости xy), ограниченной т р е м я параболами, а именно, кроме указанных двух еще параболой

$$y^2 = 2r\left(x - \frac{r}{2}\right)$$
$$(r > q),$$

будет отвечать на плоскости uv прямоугольник $(\Delta_2) = [q, r; p, q]$, и снова — отрезкам прямых $u = q$ и $v = q$ будут отвечать две дуги одной и той же параболы.

С помощью указанного преобразования теперь, например, легко определить площадь фигуры (D_2). Имеем

$$D_2 = \frac{1}{4} \int\limits_p^q \int\limits_q^r \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}} \right) du\, dv =$$

$$= \frac{1}{3} [(\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r^3} - \sqrt{q^3}) - (\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{q^3} - \sqrt{p^3})] =$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{q} - \sqrt{p})(\sqrt{r} - \sqrt{q})(\sqrt{r} - \sqrt{p})(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}).$$

Аналогично можно было бы попытаться найти и D_1, но мы встретимся в этом случае с несобственным двойным интегралом, у которого подинтегральная функция обращается в ∞ вдоль отрезка оси u. О подобных интегралах — речь впереди [см. 617, 8)].

9) Для того чтобы площади фигур (Δ) и (D), получаемых одна из другой с помощью преобразования (1), всегда были равны между собой, очевидно, необходимо и достаточно условие

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| = 1.$$

Поставим себе задачей *найти общий вид преобразований плоскости, сохраняющих площадь.*

При этом мы можем в предыдущем условии отбросить знак абсолютной величины и написать его в виде

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 1, \tag{15}$$

ибо к этому случаю всегда можно свести дело, обменяв в случае необходимости ролями ξ и η.

Кроме того, для простоты мы будем предполагать, что одна из входящих в якобиан четырех частных производных, например $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, отлична от нуля во всей рассматриваемой области. Тогда можно разрешить второе из уравнений (1) относительно η и, подставив полученное выражение в первое уравнение (1), представить рассматриваемое преобразование в виде

$$\left.\begin{aligned} \eta &= f(\xi, y), \\ x &= x(\xi, f(\xi, y)) = g(\xi, y). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Характеристикой функций f и g мы и займемся. Именно, мы докажем, что условие (15) равносильно такому:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \xi}. \tag{17}$$

Прежде всего, по правилу дифференцирования неявных функций получаем

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \tag{18}$$

Затем, дифференцируя g, как сложную функцию, находим

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Отсюда и из второго равенства (18) исключаем $\frac{\partial f}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

Наконец, вычитая почленно первое равенство (18), придем к тождеству

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} - 1,$$

которое и доказывает наше утверждение.

На основании теоремы 2 n° **560** теперь мы видим, что общий вид функций f и g, при которых преобразование (16) сохраняет площадь, дается формулами

$$f(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial \xi}, \quad g(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y}$$

при произвольной функции U.

609. Замена переменных в двойных интегралах. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{19}$$

где область (D) ограничена кусочно-гладким контуром (S), а функция $f(x, y)$ непрерывна в этой области или, самое большее, допускает разрывы вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых (сохраняя и в этом случае ограниченность).

Предположим теперь, что область (D) связана формулами (1):

$$x = x(\xi, \eta), \; y = y(\xi, \eta)$$

с некоторой областью (Δ) на плоскости $\xi\eta$, с соблюдением всех условий, при которых мы выводили в n° **605** формулу (11), выражающую площадь фигуры (D) в криволинейных координатах*. Поставим себе целью, заменяя переменные в интеграле (19), представить его в виде интеграла, распространенного на область (Δ).

Для этого разобьем область (Δ) с помощью некоторой сетки кусочно-гладких кривых на части (Δ_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$; тогда область (D) соответствующими (тоже кусочно-гладкими) кривыми разобьется на части (D_i) (черт. 75, *а*, *б*). В каждой части (D_i) выберем п р о и з в о л ь н о по точке (x_i, y_i); наконец, составим интегральную сумму для интеграла (19):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,D_i,$$

* Мы предполагаем, таким образом, также существование и непрерывность смешанных производных второго порядка $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial \eta}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\,\partial \xi}$. Ср. сноску на стр. 189.

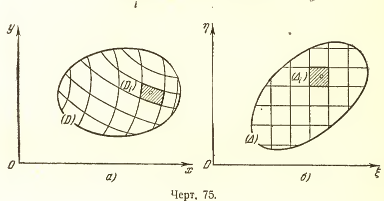
которая имеет этот интеграл своим пределом при стремлении наибольшего из диаметров областей (D_i) к нулю.

Применив к каждой части (D_i) формулу (12) n° **606**, будем иметь

$$D_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \cdot \Delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где (ξ_i^*, η_i^*) есть некоторая определенная точка области (Δ_i). Заменяя в сумме σ каждое D_i этим выражением, получим

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i) \, |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \, \Delta_i.$$



Черт. 75.

В то время как точка (ξ_i^*, η_i^*) дается теоремой о среднем и в ее выборе мы не вольны, точка (x_i, y_i) берется в области (D_i) совершенно произвольно. Пользуясь этим произволом, положим

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*), \quad y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*),$$

т. е. выберем в качестве точки (x_i, y_i) ту точку области (D_i), которая отвечает точке (ξ_i^*, η_i^*) области (Δ_i). Тогда сумма σ примет вид

$$\sigma = \sum_i f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), \, y(\xi_i^*, \eta_i^*)) \, |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \, \Delta_i;$$

в этом виде она, очевидно, является интегральной суммой для интеграла

$$\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), \, y(\xi, \eta)) \, |J(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta. \tag{20}$$

Существование этого интеграла вытекает из того, что подинтегральная функция либо непрерывна, либо же (сохраняя ограниченность) допускает разрывы лишь вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых, которые служат на плоскости $\xi\eta$ изображениями кривых разрыва функции $f(x, y)$.

Если заставить теперь диаметры всех областей (Δ_i) стремиться к нулю, то по непрерывности функций (1) и диаметры всех областей (D_i) также будут стремиться к нулю. Тогда сумма σ должна стремиться как к интегралу (19), так и к интегралу (20), ибо для обоих одновременно служит интегральной суммой. Таким образом,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta))\,|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta. \quad (21)$$

Эта формула и решает поставленную задачу — о замене переменных в двойном интеграле. Формула (11), очевидно, является ее частным случаем и получается отсюда при $f(x, y) \equiv 1$.

Итак, *для того чтобы осуществить замену переменных в двойном интеграле* (19), *нужно не только подставить в функцию f вместо x и y их выражения* (1), *но и заменить элемент площади $dx\,dy$ его выражением в криволинейных координатах.*

С помощью соображений, аналогичных приведенным в n° **606**, 4°, и здесь легко установить, что формула (21) сохраняет справедливость в ряде случаев, когда условия, наложенные на преобразование (1), нарушаются в отдельных точках или вдоль отдельных линий.

610. Аналогия с простым интегралом. Интеграл по ориентированной области. Формула замены переменных в двойном интеграле весьма сходна с формулой замены переменной в обыкновенном определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(\xi))\,x'(\xi)\,d\xi. \quad (22)$$

Однако в формуле (22) отсутствует знак абсолютной величины, что уже несколько нарушает аналогию. Это расхождение объясняется просто. Обыкновенный определенный интеграл берется по ориентированному промежутку **302**: ведь a может быть и меньше и больше b, равно как и α может быть и меньше и больше β. В то же время двойной интеграл мы до сих пор рассматривали лишь по неориентированной области.

Можно, однако, и в случае двойного интеграла перейти к рассмотрению ориентированных областей. Ориентация области создается тем, что ее контуру придается определенное направление обхода — положительное или отрицательное [**548**]; одновременно такое же направление обхода придается и всем замкнутым простым кривым в пределах области. Если выбирается положительное направление обхода, то говорят, что область положительно ориентирована, в противном же случае — что она отрицательно ориентирована.

Естественно условиться для ориентированной области (D) в качестве площади брать ее обыкновенную площадь со знаком плюс,

если область ориентирована положительно, и со знаком минус — в противном случае. При разложении области (D) на части (D_i) эти части, как указывалось, ориентируются согласно с ориентацией всей области; соответственным образом снабжаются знаками и их площади.

Теперь для ориентированной области (D) можно по образцу n° 588 построить понятие двойного интеграла

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

причем этот интеграл совпадает с определенным раньше, если область имеет положительную ориентацию, и отличается от него знаком в случае отрицательной ориентации.

Эта новая точка зрения на двойной интеграл позволяет прежде всего формулу (11) n° 605, выражающую площадь в криволинейных координатах, переписать без знака абсолютной величины при якобиане:

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} J(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

если только ориентацию областей (D) и (Δ) производить согласованно. Это прямо следует из замечания 606, 1°.

При том же условии формулу (12) n° 606 можно написать также без знака абсолютной величины:

$$D = J(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot \Delta,$$

и в такой форме она служит естественным обобщением формулы Лагранжа.

Наконец, теперь и общая формула (21) может быть написана для согласованно ориентированных областей (D) и (Δ) в виде

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,J(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом, стоило лишь поставить простые и двойные интегралы в одинаковые условия, чтобы аналогия стала полной!

Впрочем, в дальнейшем изложении мы все же вернемся к обычной точке зрения и будем рассматривать двойные интегралы, распространенные на неориентированные области.

611. Примеры. Так как преобразование переменных в двойном интеграле часто имеет целью упрощение области интегрирования, то здесь снова находят себе приложение все указания, сделанные по этому поводу в n° 608. Наряду с этим естественной целью преобразования является также упрощение подинтегрального выражения.

1) Если область представляет собой круг (с центром в начале) или его сектор, то выгодно перейти к полярным координатам. Для примера предлагается наново решить задачи: 1); 17) (а); 18) (б) п° **597**.

Для второй из них имеем

$$V = \iint\limits_{(D)} xy\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} r^3 \cos\theta\,\sin\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta \cdot \int\limits_0^{R} r^3\,dr = \frac{R^4}{8}.$$

Если при этом и в состав подинтегрального выражения входит сумма $x^2 + y^2$, то тем больше оснований ждать упрощений от применения полярных координат.

2) Найти объем части шара (радиуса R), вырезаемой из него прямым круговым цилиндром (радиуса $r < R$), ось которого проходит через центр шара.

Решение. Принимая центр шара за начало координат, а ось цилиндра за ось z, будем иметь

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r} \sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

3) Найти объем тела, ограниченного параболоидом вращения $az = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = a$.

Ответ. $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$.

4) Найти положение центра тяжести для кругового сектора радиуса R с центральным углом 2α.

Решение. Выбрав за полярную ось (и ось x) биссектрису центрального угла, будем иметь

$$M_y = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_0^{R} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha.$$

Если разделить это выражение на площадь сектора $P = R^2\alpha$, то найдется абсцисса ξ центра тяжести:

$$\xi = \frac{2}{3}R\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Так как центр тяжести, ввиду симметрии, лежит на биссектрисе, то положение его установлено.

5) Найти массу круга (радиуса R), плотность которого в каждой точке равна расстоянию этой точки от контура круга.

Ответ. $m = \dfrac{\pi}{3}R^3$.

Приведем еще ряд примеров, где выгодно использовать полярные координаты.

6) Найти объем «тела Вивиани» [597, 20)].

Решение. Мы имели уже

$$V = 4\iint\limits_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где (P) есть полукруг в первом квадранте плоскости xy, построенный на радиусе R сферы, как на диаметре (черт. 48). Наличие выражения x^2+y^2 в подинтегральной функции подсказывает переход к полярным координатам.

Полярное уравнение контура (P), т. е. полуокружности, будет $r=R\cos\theta$ при изменении θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Как видим, выкладки здесь, действительно, очень упростились *.

7) Найти (а) положение центра тяжести и (б) полярный момент инерции для одного лепестка лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

Решение. (а) Полярное уравнение кривой:

$$r^2=2a^2\cos 2\theta \quad \left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$$

Имеем последовательно:

$$M_y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cdot\cos^{\frac{3}{2}}2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

и далее, полагая $\sqrt{2}\sin\theta=\sin\omega$:

$$M_y=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\omega\,d\omega=\frac{\pi}{4}a^3.$$

Так как площадь одного лепестка $P=a^2$ [339, 12)], то $\xi=\frac{\pi a}{4}$, чем и определяется положение центра тяжести.

(б) Имеем

$$I_0=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3dr\,d\theta=\frac{\pi a^4}{4}.$$

---

* Не исключена возможность и того, что упрощение подинтегрального выражения оказывается связанным с таким усложнением области интегрирования, что переход к полярным координатам в конечном счете невыгоден.

8) Найти полярный момент инерции кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$ относительно полюса.

Ответ. $I_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$.

9) Установить для «тела Вивиани» положение центра тяжести. [См. 6).]

Решение. Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести лежит на оси x. Вычислим статический момент:

$$M_{yz} = 4 \iint\limits_{(P)} xz\,dx\,dy = 4 \iint\limits_{(P)} x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2\,dr.$$

Внутренний интеграл:

$$\int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2\,dr = \frac{r}{8}(2r^2 - R^2)\sqrt{R^2 - r^2} +$$

$$+ \frac{R^4}{8} \arcsin\frac{r}{R}\Bigg|_{r=0}^{r=R\cos\theta} = \frac{R^4}{8}\left[\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)\sin\theta + \frac{\pi}{2} - \theta\right],$$

так что

$$M_{yz} = \frac{R^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2\cos^4\theta - \cos^2\theta)\sin\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left[-\frac{2}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\theta - \cos\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}R^4.$$

Отсюда, наконец,

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{12}{5(3\pi - 4)}R.$$

10) Найти объем тела, ограниченного эллиптическим цилиндром

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

плоскостью $z = 0$ и одной из следующих поверхностей:

(а) плоскостью $z = \lambda x + \mu y + h \quad (h > 0)$,

(б) эллиптическим параболоидом $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \quad (c > 0)$,

(в) гиперболическим параболоидом $cz = xy \quad (c > 0)$.

Решение. Вопрос сводится к вычислению интеграла, распространенного на эллипс в плоскости xy, в связи с чем целесообразно перейти к обобщенным полярным координатам, положив

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta;$$

якобиан преобразования при этом будет $J = abr$.

Например, для случая (б) получим

$$V=\frac{c}{2}\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)dx\,dy=2abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1\left(\frac{a^2\cos^2\theta}{p^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{q^2}\right)r^3dr\,d\theta=$$
$$=\frac{\pi}{8}abc\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right).$$

Аналогично найдем и для других случаев:

(а) $V=\pi abh$, (в) $V=\frac{a^2b^2}{2c}$ *.

11) Найти объем трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Указание. Прибегнуть к обобщенным полярным координатам. *Ответ.* $\frac{4}{3}\pi abc$.

12) Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{(D)}xy\,dx\,dy,$$

распространенный на петлю кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$$

в первом координатном угле [Ср. 608, 3) (г).]

Указание то же. *Ответ.* $\frac{1}{840}\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}$.

13) Вычислить интегралы:

(а) $I_1=\iint\limits_{(A)}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy$, (б) $I_2=\iint\limits_{(A)}x^ny^ndx\,dy$

(n — натуральное), где (A) есть область, ограниченная осями координат и параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

Решение. Параметрические уравнения кривой: $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$ $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Естественно рассмотреть семейство парабол, подобно расположенных (относительно начала): $x=\rho\cos^4 t$, $y=\rho\sin^4 t$ $(0\leqslant\rho\leqslant 1)$. Вводя ρ и t в качестве новых переменных, будем иметь $J=4\rho\cos^3 t\sin^3 t$, так что

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1\sqrt{\rho}\cdot 4\rho\cos^3 t\sin^3 t\,d\rho\,dt=\frac{2}{15},$$

$$I_2=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,d\rho\,dt=$$

$$=\frac{2}{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,dt=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{[(4n+2)!!]^2}{(8n+6)!!}.$$

* В случае (в) тело состоит из четырех симметричных частей, из которых две расположены над плоскостью xy, а две — под нею.

Последнее выражение может быть преобразовано к виду

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)(2n+2)(2n+3)\ldots(4n+3)}.$$

При $n=1$ отсюда, в частности, получается решение задачи 3) п° **597.**

14) Вычислить интеграл

$$K=\iint\limits_{(B)}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dx\,dy,$$

где (B) есть область, ограниченная осями координат и параболой

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1.$$

Указание. Положить $x=a\rho\cos^4 t, y=b\rho\sin^4 t\left(0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. $K=\frac{2}{21}ab$.

15) Найти интеграл

$$L=\iint\limits_{(D)}\frac{x^2\sin xy}{y}\,dx\,dy,$$

где (D) есть область, ограниченная четырьмя параболами $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

Решение. Прибегнув к замене переменных, указанной в **604**, 4) [ср. **608**, 5)], преобразуем интеграл к виду

$$L=\int\limits_a^b\int\limits_p^q \eta\sin\xi\eta\,d\xi\,d\eta.$$

Теперь легкое вычисление дает:

$$L=\frac{\sin pb-\sin pa}{p}-\frac{\sin qb-\sin qa}{q}.$$

Аналогично угадывается подходящая система криволинейных координат и в следующих случаях:

16) Найти интеграл

$$I=\iint\limits_{(A)} xy\,dx\,dy,$$

если (A) есть четырехсторонник, ограниченный кривыми:

$$\text{(а)}\ \ y=ax^3,\quad y=bx^3,\quad y^2=px,\quad y^2=qx;$$
$$\text{(б)}\ \ y^3=ax^2,\quad y^3=bx^2,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x.$$

Указание. Ввести новые координаты ξ, η, положив

$$\text{(а)}\ \ y=\xi x^3,\quad y^2=\eta x;$$
$$\text{(б)}\ \ y^3=\xi x^2,\quad y=\eta x.$$

Ответ.

(а) $I=\frac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)$;

(б) $I=\frac{1}{40}(b^4-a^4)(\alpha^{-10}-\beta^{-10})$.

17) Пусть (D) будет треугольник, определяемый неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$. Предполагая $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$, непосредственно установить формулу Лиувилля [597, 16)] *

$$\iint\limits_{(D)}\varphi(x+y)\,x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy=\mathrm{B}(p,q)\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du,$$

где $\varphi(u)$ есть непрерывная функция в промежутке $[0,1]$.

Доказательство. Положим

$$x=u(1-v),\quad y=uv$$

или

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x+y}.$$

Этими формулами устанавливается взаимно однозначное соответствие между треугольником (D) на плоскости xy и квадратом $(\Delta)=[0,1;\,0,1]$ на плоскости uv. [Исключение составляет лишь точка $x=0$, $y=0$, которой отвечает отрезок оси v.] При этом

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=u.$$

Заменяя переменные, получим, что двойной интеграл равен

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}v^{q-1}(1-v)^{p-1}\,du\,dv$$

или

$$\int\limits_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}dv\cdot\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du.$$

Так как первый множитель как раз и есть $\mathrm{B}(q,p)=\mathrm{B}(p,q)$, то требуемый результат установлен.

18) С помощью той же замены переменных можно доказать и более общую формулу:

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}}\varphi(x+y)\,\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q}}\,dx\,dy=$$

$$=\mathrm{B}(p,q)\int\limits_0^1\frac{\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du}{(\alpha u+\gamma)^p(\beta u+\gamma)^q}$$

(где $p,q\geqslant 1$; $\alpha,\beta\geqslant 0$, $\gamma>0$; $\varphi(u)$ непрерывна). При этом надлежит воспользоваться известным результатом: 534, 2).

---

* Выше она была выведена из формулы Дирихле, которая является ее частным случаем (при $\varphi\equiv 1$).

19) К формуле Лиувилля приводится формула

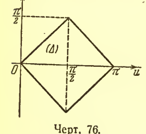
$$\int_0^1\int_0^1 f(\alpha\beta)(1-\alpha)^{p-1}\beta^p(1-\beta)^{q-1}d\alpha\, d\beta = \mathrm{B}(p, q)\int_0^1 f(v)(1-v)^{p+q-1}dv,$$

если применить подстановку

$$\alpha = \frac{1-x-y}{1-y}, \quad \beta = 1-y,$$

причем $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 1$. Якобиан $J = \frac{1}{1-y}$ *.

20) Доказать с помощью замены переменных тождество (при любом $z = \text{const}$).



Черт. 76.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\, d\varphi\, d\theta = \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\lambda)\, d\lambda\right\}^2$$

[ср. 595, 7)].

Доказательство. Замена переменных в двойном интеграле по формулам

$$\varphi = \frac{u+v}{2}, \quad \theta = \frac{u-v}{2}$$

приводит его к виду

$$\frac{1}{2}\iint_{(\Delta)}[\cos(z\cos u)\cos(z\cos v) + \sin(z\cos u)\sin(z\cos v)]\, du\, dv,$$

где (Δ) есть косо поставленный квадрат, изображенный на черт. 76. Но интеграл от второго слагаемого равен нулю (подстановка $u = \pi - u'$), а интеграл от первого слагаемого, распространенный на квадрат (Δ), непосредственно приводится к удвоенному подобному же интегралу, взятому по квадрату $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда уже легко получить требуемый результат.

§ 5. Несобственные двойные интегралы

612. Интегралы, распространенные на неограниченную область. Понятие двойного интеграла обобщается на случай неограниченной, т. е. простирающейся в бесконечность области, или на случай неограниченной функции, подобно тому, как это сделано в главе тринадцатой по отношению к простым интегралам.

Остановимся сначала на случае неограниченной области (P). Примером такой области может служить вся плоскость или часть ее, лежащая вне некоторого круга или другой ограниченной плоской фигуры, какой-либо угол и т. п. Что касается границы этой области,

* Впрочем, точка $x = 0$, $y = 1$ здесь требует оговорок.

то она предполагается имеющей площадь 0 (например, состоящей из кусочно-гладких кривых) в каждой ограниченной своей части. Пусть в области (P) задана некоторая функция $f(x, y)$, которую будем предполагать интегрируемой в обычном смысле слова в каждой ограниченной и квадрируемой части области (P).

Проведя вспомогательную кривую (K') (тоже с площадью 0), отсечем от области (P) ограниченную и связную ее часть (P'), в которой интеграл

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy \tag{1}$$

по предположению существует. Станем теперь удалять кривую (K) всеми её точками в бесконечность, так, чтобы наименьшее расстояние R от начала до точек этой кривой возрастало до бесконечности. Тогда отсекаемая ею переменная область (P') постепенно будет охватывать все точки области (P): каждая точка из (P) будет принадлежать (P') при достаточно большом R.

Предел (конечный или бесконечный) интеграла (1) при $R\to\infty$ *называют (несобственным) интегралом от функции* $f(x, y)$ *в неограниченной области* (P) и обозначают символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

В случае существования конечного предела интеграл (2) называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. Функция, для которой интеграл (2) сходится, называется *интегрируемой* (в несобственном смысле) в области (P).

В случае положительной функции $f(x, y)$ достаточно, рассмотрев какую-нибудь определенную последовательность удаляющихся в бесконечность кривых

$$(K_1),\ (K_2),\ \ldots,\ (K_n), \ldots$$

и отсекаемых ими областей

$$(P_1),\ (P_2),\ \ldots,\ (P_n), \ldots,$$

предположить существование конечной границы

$$I = \sup_n \left\{ \iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\,dx\,dy \right\},$$

чтобы отсюда уже вытекала сходимость интеграла (2).

Действительно, какую бы область (P') ни отделить кривой (K') от (P), при достаточно большом n эта область целиком будет содержаться в (P_n), так что

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\,dx\,dy$$

и, тем более,

$$\iint_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant I. \tag{3}$$

С другой стороны, по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0 чтобы было

$$\iint_{(P_{n_0})} f(x, y)\,dx\,dy > I - \varepsilon.$$

При достаточно большом R*, в свою очередь, область (P') охватит (P_{n_0}), следовательно, и подавно

$$\iint_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy \geqslant I - \varepsilon. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) в совокупности доказывают, что число I удовлетворяет определению двойного интеграла.

С помощью этого соображения легко доказывается теорема о сравнении интегралов, аналогичная теореме n° **474**. Далее, если сохранить относительно функции $f(x, y)$ прежние предположения, то *из сходимости интеграла от* $|f(x, y)|$, *распространенного на неограниченную область* (P), *вытекает сходимость подобного же интеграла для функции* $f(x, y)$.

Для доказательства этого рассмотрим две неотрицательные функции:

$$f_+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2};$$

очевидно,

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ если } f(x, y) \geqslant 0, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y), \text{ если } f(x, y) \leqslant 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из интегрируемости функции $|f(x, y)|$ вытекает сходимость интегралов для функций

$$f_+(x, y) \leqslant |f(x, y)| \text{ и } f_-(x, y) \leqslant |f(x, y)|,$$

а следовательно, и для функции

$$f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y).$$

Весьма замечателен тот факт, что и обратно: *из сходимости интеграла от функции* $f(x, y)$, *распространенного на неограни-*

* Мы все время сохраняем за R его значение, как наименьшего расстояния точек кривой (K') от начала.

ченную область (P), *вытекает сходимость интеграла и для* $|f(x, y)|$. Этому предложению нет аналога в теории простых несобственных интегралов: мы знаем [**475**], что там могли существовать и неабсолютно сходящиеся интегралы.

Доказательство мы дадим в следующем n°.

613. Теорема об абсолютной сходимости несобственного двойного интеграла. *Каждый сходящийся интеграл*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy \tag{5}$$

необходимо и абсолютно сходится, т. е. одновременно с ним сходится и интеграл

$$\iint\limits_{(P)} |f(x, y)|\, dx\, dy. \tag{6}$$

Допустим противное. Взяв последовательность областей $\{(P_n)\}$, так, чтобы они, расширяясь, постепенно охватывали всю область (P), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy = +\infty.$$

Не умаляя общности, мы можем допустить, что при каждом значении n выполняется неравенство

$$\iint\limits_{(P_{n+1})} |f(x, y)|\, dx\, dy > 3 \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + 2n.$$

Этого можно достигнуть, разрежая (в случае надобности) последовательность $\{(P_n)\}$, т. е. извлекая из нее частичную последовательность и наново нумеруя ее.

Обозначая через (p_n) разность областей (P_{n+1}) и (P_n), очевидно, будем иметь

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy > 2 \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + 2n.$$

Но

$$|f(x, y)| = f_+(x, y) + f_-(x, y),$$

так что

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy = \iint\limits_{(p_n)} f_+(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{(p_n)} f_-(x, y)\, dx\, dy.$$

Пусть из двух интегралов справа бо́льшим будет, например, первый. Тогда

$$\iint\limits_{(p_n)} f_+(x, y)\, dx\, dy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + n.$$

Заменяя двойной интеграл слева достаточно близкой к нему нижней суммой Дарбу, сохраним неравенство

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + n^*.$$

Можно в этой сумме оставить лишь те слагаемые, которым отвечают $m_n^{(i)} > 0$; обозначив совокупность соответствующих элементов $(p_n^{(i)})$ через $(\tilde{p}_n)$, получим, тем более,

$$\iint\limits_{(\tilde{p}_n)} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(\tilde{p}_n)} f_+(x, y)\, dx\, dy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + n.$$

Обозначим через $(\tilde{P}_n)$ область, составленную из (P_n) и $(\tilde{p}_n)$; так как

$$\iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\, dx\, dy \geqslant - \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy,$$

то, складывая почленно это неравенство с предыдущим, найдем

$$\iint\limits_{(\tilde{P}_n)} f(x, y)\, dx\, dy > n.$$

Область $(\tilde{p}_n)$, а с нею и $(\tilde{P}_n)$, можно деформировать так, чтобы из последней получилась связная область (P_n'), и притом по площади столь мало разнящаяся от $(\tilde{P}_n)$, что все же сохраняется неравенство

$$\iint\limits_{(P_n')} f(x, y)\, dx\, dy > n.$$

Этого легко достигнуть, соединяя оторванные части области узкими «коридорами» с произвольно малой общей площадью.

Отсюда уже ясно, что интеграл (5) сходиться не может, вопреки предположению; это противоречие и доказывает теорему.

Заметим, что принципиальная разница между одномерным и двумерным случаями связана именно с заключительной частью проведенного рассуждения. Несвязную линейную область, состоящую из отдельных промежутков, уже нельзя произвольно малой деформацией превратить в связную (т. е. в цельный промежуток).

---

* Здесь $(p_n^{(i)})$ суть элементарные части, на которые разбита область (p_n), а $m_n^{(i)}$ — соответствующие точные нижние границы функции $f_+(x, y)$.

Доказанная теорема вместе с замечаниями предыдущего n° сводит вопрос о сходимости и вычислении несобственного интеграла от произвольной функции к такому же вопросу для положительной (неотрицательной) функции. Последним вопросом мы в последующем n° преимущественно и займемся.

614. Приведение двойного интеграла к повторному. Ограничимся сначала предположением, что функция $f(x, y)$ неотрицательна. Если эта функция задана в неограниченной области любой формы, то, полагая ее дополнительно вне этой области равной нулю, всегда можно свести дело к случаю неограниченной же прямоугольной области. Пусть, скажем, речь идет о бесконечном в одном направлении прямоугольнике $[a, b; c, +\infty]$ (a, b, c — конечные числа, причем $b > a$). Будем предполагать, что в каждом конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$ (при любом $d > c$) существуют как двойной интеграл, так и простой интеграл по y — оба в собственном смысле, так что [594] имеет место формула

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f\,dy. \tag{7}$$

Желая установить подобную же формулу для бесконечного прямоугольника, т. е. для случая $d = +\infty$, предположим, что сходится повторный интеграл

$$I = \int_a^b dx \int_c^\infty f\,dy.$$

Так как при любом $d > c$ имеем

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy \leqslant I,$$

то по сказанному в **612** отсюда уже следует сходимость двойного интеграла

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy = \lim_{d\to\infty} \iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f\,dx\,dy, \tag{8}$$

который, очевидно, не превосходит I. Остается лишь доказать, что на деле двойной интеграл равен I.

Если интеграл $\int_c^\infty f\,dy$ представляет собой функцию от x, интегрируемую в собственном смысле, следовательно, ограниченную некоторой постоянной L, то и подавно

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \leqslant L.$$

В таком случае по теореме II n° 526

$$I = \lim_{d \to +\infty} \int_a^b dx \int_c^d f\,dy.$$

Сопоставляя это с (7) и (8), приходим к требуемому результату.

Установленный факт сохраняет силу и в том случае, если интеграл I сходится, как несобственный. Пусть, например, b является единственной особой точкой для функции $\int_c^\infty f\,dy$ от x. Тогда по доказанному, при $0 < \eta < b - a$,

$$\iint\limits_{[a,\, b-\eta;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^{b-\eta} dx \int_c^{+\infty} f\,dy, \tag{9}$$

и обе части равенства при $\eta \to 0$ стремятся к I. Принимая же во внимание, что

$$I \geqslant \iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{[a,\, b-\eta;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy,$$

снова заключаем о равенстве двойного и повторного интегралов по прямоугольнику $[a,\ b;\ c,\ +\infty]$.

Заметим, что если бы несобственный повторный интеграл имел бесконечное значение, то, как видно из предыдущих двух соотношений, таково же было бы и значение двойного интеграла.

Итак, имеем подобно (7)

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f\,dy, \tag{10}$$

причем из существования повторного интеграла справа уже вытекает существование двойного интеграла. Равенство сохраняется даже в том случае, когда интеграл справа равен $+\infty$.

Обратимся, наконец, к рассмотрению прямоугольника $[a,\ +\infty;\ c,\ +\infty]$, простирающегося в бесконечность по двум взаимно перпендикулярным направлениям. И здесь будем предполагать, что в каждом конечном прямоугольнике $[a,\ b;\ c,\ d]$ (при любых $b > a$ и $d > c$) существуют в собственном смысле двойной интеграл и простой интеграл по y.

Для рассматриваемого случая также может быть установлена формула

$$\iint\limits_{[a,\, +\infty;\, c,\, +\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f\,dy, \tag{11}$$

в предположении, что повторный интеграл справа сходится. Это легко получается из (10) переходом к пределу при $b \to +\infty$, наподобие того, как выше мы (10) получили из (9). И здесь двойной интеграл оказывается равным $+\infty$, если таково значение повторного интеграла.

Скажем теперь несколько слов относительно случая, когда функция $f(x, y)$ меняет знак; ограничимся для определенности формулой (10). В конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$ (при $d > c$) мы сохраняем прежние предположения, но, наряду со сходимостью повторного интеграла от самой функции:

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy,$$

мы на этот раз допустим сходимость повторного интеграла и от ее абсолютной величины:

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\, dy.$$

Тогда подобные же повторные интегралы будут существовать и для функций $f_+(x, y)$ и $f_-(x, y)$, упомянутых в конце n° **612**. Применяя к этим неотрицательным функциям порознь доказанную формулу (10) и вычитая результаты, убедимся в справедливости этой формулы и для данной функции $f(x, y)$.

615. Интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $f(x, y)$ задана в ограниченной области (P), но сама оказывается неограниченной в окрестности отдельных точек $M_1, M_2, \ldots$; в любой части области (P), не содержащей этих точек, мы предполагаем функцию интегрируемой в собственном смысле слова.

Выделим теперь особые точки $M_1, M_2, \ldots$, окружив их кривыми $(k_1), (k_2), \ldots$ Если удалить из области (P) ограниченные этими кривыми окрестности особых точек, то мы получим область (P'), для которой по предположению интеграл

$$\iint_{(P')} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1*}$$

сходится. Станем «стягивать» кривые $(k_1), (k_2), \ldots$ в указанные точки так, чтобы наибольшее из расстояний точек этих контуров (k) до соответствующих точек M — обозначим его через ρ — стремилось к нулю*. Заметим, что при этом и площади рассматриваемых окрестностей (меньшие чем $\pi\rho^2$) также будут стремиться к нулю.

* Вместо этого можно было бы предположить стремящимися к нулю диаметры всех областей, ограниченных контурами (k).

Интеграл (несобственный) от неограниченной функции $f(x, y)$ по области (P) определяется как предел интеграла (1*) *при* $\rho \to 0$:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2^*)$$

Особые точки могут лежать и вдоль некоторых особых линий, которые мы всегда будем предполагать имеющими площадь 0. В этом случае приходится окружать эти линии «сжимающимися» к ним окрестностями, и принципиально здесь нет ничего нового.

Однако точная характеристика подразумевающегося здесь предельного процесса требует еще некоторых пояснений. Пусть особая линия (l) окружена окрестностью с контуром (k). Если взять точку A на (k), то из расстояний этой точки от различных точек B на (l) существует наименьшее, ρ_A; с другой стороны, если изменять положение A на (k), то из всех ρ_A найдется наибольшее, ρ. Это число в некотором смысле и характеризует степень удаленности контура (k) от кривой (l), и предельный процесс направляется условием: $\rho \to 0$. (При наличии нескольких кривых под ρ разумеется наибольшее из подобных чисел.) Здесь также можно доказать, что вместе с ρ стремится к нулю и площадь рассматриваемой окрестности.

Наконец, определение несобственного интеграла лёгко распространяется на случай неограниченной области и определенной в ней функции, которая на конечном расстоянии имеет особые точки.

Замечание. Если бы при построении несобственного интеграла, кроме особых точек (или линий), мы стали выделять и некоторые такие точки (или линии), которые на деле не являются особыми, то это обстоятельство никак не могло бы отразиться ни на существовании, ни на величине того предела, которым представляется интеграл. В самом деле, пусть, например, к особым точкам добавляется неособая точка A и, сверх того, что необходимо по точному смыслу определения несобственного интеграла, — мы выделяем еще окрестность этой точки A. Но вблизи A функция ограничена, и интеграл по упомянутой окрестности, вместе с площадью ее, стремится к 0.

На все перечисленные случаи несобственных интегралов переносится то, что было изложено в пп° **612—614**.

Прежде всего, и здесь справедлива замечательная теорема о том, что *несобственные двойные интегралы если сходятся, то, по необходимости, — абсолютно.* Доказательство строится так же, как и в п° **613**.

Что касается вопроса о сведéнии двойного интеграла к повторному, то здесь также достаточно ограничиться случаем, когда областью (P) служит (конечный) прямоугольник $[a, b; c, d]$. Можно доказать, что для неотрицательной функции $f(x, y)$ имеет место

формула (7) — в предположении существования повторного интеграла (существование двойного отсюда уже будет вытекать).

Впрочем, следует при этом уточнить еще предполагаемое расположение особых точек* функции. Начнем со случая, когда они лежат на горизонтальной прямой (например, $y=d$) или, более обще, на кривой, выражаемой явным уравнением вида

$$y=y(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Для этого случая доказательство — такое же, как в n° **614** при $d=+\infty$. Отсюда перейдем к случаю, когда особые точки лежат еще и на некоторой вертикальной прямой (например, $x=b$), рассуждая, как и выше при $b=+\infty$. Если рассматриваемая функция меняет знак, то приходится еще предположить существование повторного интеграла для $|f(x, y)|$.

Обобщение на случай нескольких кривых или прямых или на случай бесконечного прямоугольника с особенностями на конечном расстоянии — очевидно.

616. Замена переменных в несобственных интегралах. Пусть в плоскостях xy и $\xi\eta$ имеем, соответственно, ограниченные области (D) и (Δ), связанные формулами преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(\xi, \eta), \\ y&=y(\xi, \eta) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

или обратными им:

$$\left.\begin{aligned} \xi&=\xi(x, y), \\ \eta&=\eta(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

с соблюдением всех условий, о которых подробно говорилось в n° **603**.

Пусть, далее, в области (D) задана функция $f(x, y)$, непрерывная всюду, за исключением конечного числа отдельных точек или даже кривых**, где она обращается в бесконечность.

Покажем, что при этих условиях равенство

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta \tag{13}$$

имеет место, если только сходится один из этих интегралов; сходимость другого отсюда уже будет вытекать.

Действительно, если особые точки и особые линии первого интеграла в области (D) выделить их окрестностями, то соответ-

* В любом частичном прямоугольнике, где нет особых точек, формула вида (7) предполагается верной.

** Все кривые, о которых идет речь в настоящем n°, предполагаются кусочно-гладкими.

ствующими окрестностями в области (Δ) выделятся особые точки и особые линии второго интеграла. Пусть при этом получатся область (D') на плоскости xy и область (Δ') на плоскости $\xi\eta$. Тогда по формуле (21) n° **609**

$$\iint\limits_{(D')} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta')} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta. \quad (14)$$

Предполагая непрерывность соответствия между областями (D) и (Δ) в обе стороны*, легко видеть, что при «сжимании» окрестностей на плоскости xy к окруженным ими точкам или линиям, такой же процесс будет происходить и с окрестностями на плоскости $\xi\eta$, и обратно. Отсюда ясно, что, переходя в предыдущем соотношении к пределу, из сходимости одного из интегралов мы действительно можем заключить о сходимости другого и вместе с тем о наличии равенства (13).

Можно было бы допустить даже, что в отдельных точках области (Δ) или вдоль отдельных лежащих в ней линий (не пересекающих ранее рассмотренных в этой области особых линий) обращается в бесконечность якобиан $J(\xi, \eta)$, а с ним и подинтегральная функция второго из интегралов. Хотя соответствующие точки и линии на плоскости xy не являются особыми для первого интеграла, но их выделение, по замечанию предыдущего n°, не создает затруднений, так что и при новых допущениях заключение остается в силе.

Заметим еще, что и в рассматриваемом случае часто приходится сталкиваться с нарушением непрерывности или взаимной однозначности соответствия в отдельных точках или вдоль отдельных линий. В подобных обстоятельствах приложимы соображения n° **606**, 4° [ср. конец n° **609**].

Наконец, обратимся к случаю, когда хоть одна из областей (D), (Δ) является неограниченной.

Если обе эти области простираются в бесконечность, причем точки их, находящиеся на конечном расстоянии, связаны соответствием (12) или (12а), то, отделив (соответствующими) кривыми ограниченные части этих областей, (D') и (Δ'), мы при соблюдении указанных выше условий будем иметь равенство (14). Так как упомянутые кривые, очевидно, могут удаляться в бесконечность лишь одновременно, то остается лишь перейти в (14) к пределу, чтобы получить (13), причем снова из сходимости одного из интегралов следует сходимость другого.

Пусть теперь, скажем, область (D) простирается в бесконечность, а область (Δ) нет, и точки области (D) связаны соответствием со всеми точками области (Δ), за исключением отдельной точки (или кривой), которая, так сказать, отвечает бесконечно удаленной части

* Мы имеем в виду непрерывность функций (12) и (12а).

контура области (D). Отделив кривой ограниченную часть области (D), мы соответствующей кривой в области (Δ) выделим упомянутую точку (или кривую) и тем получим области (D') и (Δ'), к которым уже приложимы прежние рассуждения, и т. д.

Заметим, что замена переменных наряду с переходом к повторному интегралу является весьма удобным средством для установления существования несобственных двойных интегралов. Многочисленные примеры тому читатель найдет в следующем n°.

617. Примеры. 1) Установить условия сходимости интегралов ($m > 0$):

$$\text{(а)} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}, \quad \text{(б)} \iint\limits_{x^2+y^2 \geqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m},$$

$$\text{(в)} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m}.$$

Решение. В полярных координатах эти интегралы сведутся к следующим:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{r^{2m}} = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad \text{(б)}\ 2\pi \int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad \text{(в)}\ 2\pi \int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^m}.$$

Очевидно, условия сходимости будут:

$$\text{(а)}\ m < 1, \quad \text{(б)}\ m > 1, \quad \text{(в)}\ m < 1.$$

2) Аналогичный вопрос по отношению к интегралам (α, β, $m > 0$)

$$\text{(а)} \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}, \quad \text{(б)} \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}$$

$$\text{(в)} \iint\limits_{\substack{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(1-x^\alpha-y^\beta)^m}.$$

Указание. Прибегнуть к подстановке

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}} \cos^{\frac{2}{\alpha}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{\beta}} \sin^{\frac{2}{\beta}} \theta.$$

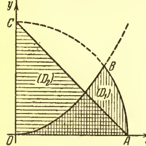
Ответ. (а) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > m$; (б) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < m$; (в) $m < 1$.

Те же ответы получатся и в случае, когда изменение переменных в задачах 1), 2) ограничивается сектором между лучами $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$.

3) Если область (D_1) изменения переменных x, y есть криволинейный треугольник AOB (черт. 77), ограниченный отрезком AO оси x, дугой OB параболы $y = x^2$ и дугой BA окружности $x^2 + y^2 = 1$, то интеграл

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},$$

для которого начало попрежнему служит особой точкой, все же существует (хотя не существует для круга!). Действительно, при переходе к полярным координатам интеграл преобразуется к виду *



Черт. 77.

$$\int_0^{\delta} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1} \frac{dr}{r} = \int_0^{\delta} \ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta,$$

откуда и вытекает сказанное.

4) Аналогично, взяв в качестве области (D_2) треугольник AOC (тот же чертеж), можно установить существование интеграла

$$\iint_{(D_2)} \frac{dx\,dy}{1-x^2-y^2},$$

для которого особыми будут точки A и C.

Так как в полярных координатах уравнение линии AC будет $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$, то предложенный интеграл сводится к следующему:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r\,dr}{1-r^2} = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\, d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\, d\varphi,$$

который явно существует.

5) На сравнении с интегралами, рассмотренными в 1), основан следующий *признак сходимости*:

Если (D) есть: (а) ограниченная область, содержащая начальную точку, или (б) простирающаяся в бесконечность область, не содержащая начальной точки, то интеграл от функции $f(x, y)$ в (D) сходится, коль скоро $f(x, y)$ в (D) может быть представлена в виде

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^m},$$

где φ ограничена и, соответственно случаю, (а) $m<1$ или (б) $m>1$.

Легко перефразировать этот признак для случая, когда начальная точка заменена любой точкой (x_0, y_0).

6) Проверить сходимость двойного интеграла от функции

$$f(x, y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

распространенного на: (а) треугольник OBC (черт. 78), (б) квадрат $OABC$, (в) бесконечную полосу $YCBE$, (г) бесконечный треугольник EBG, (д) бесконечный квадрат EBF.

Черт. 78.

* Через δ обозначен угол луча OB с полярной осью.

Ответ. В случаях (а), (г) интеграл не сходится (тем более это справедливо для случаев (б), (д)!); в случае (в) интеграл сходится, он равен $\frac{\pi}{4}$.

7) Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ абсолютно интегрируемы — первая в промежутке $[a, b]$, а вторая — в промежутке $[c, d]$ (каждый из этих промежутков может быть как конечным, так и бесконечным). Доказать, что тогда сходится и двойной интеграл

$$\iint\limits_{[a,\, b;\, c,\, d]} f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b f(x)\, dx \cdot \int\limits_c^d g(y)\, dy$$

[ср. **605**, 9)].

Вопрос легко приводится к случаю неотрицательных функций; этим предположением мы и ограничимся.

Если, скажем, оба промежутка конечны, и единственными особыми точками являются, соответственно, b и d, то, как мы уже знаем, существует собственный двойной интеграл (δ и $\varepsilon > 0$)

$$\iint\limits_{[a,\, b-\delta;\, c,\, d-\varepsilon]} f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int\limits_a^{b-\delta} f(x)\, dx \cdot \int\limits_c^{d-\varepsilon} g(y)\, dy;$$

остается лишь перейти к пределу при $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

Указанные условия относительно функций f и g оказываются и необходимыми для существования двойного интеграла, исключая тот случай, когда один из интегралов

$$\int\limits_a^b |f(x)|\, dx, \quad \int\limits_c^d |g(y)|\, dy$$

равен нулю.

8) Найти площадь фигуры (D_1), ограниченной параболами $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$ и $y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$ $(0 < p < q)$ и осью x [см. **608**, 8)].

Решение. Воспользовавшись криволинейными координатами, приведенными в указанном месте, имеем:

$$D_1 = \frac{1}{4}\int\limits_0^p\int\limits_p^q \left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}\right) du\, dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int\limits_0^p \frac{dv}{\sqrt{v}} \cdot \int\limits_p^q \sqrt{u}\, du - \int\limits_0^p \sqrt{v}\, dv \cdot \int\limits_p^q \frac{du}{\sqrt{u}}\right\} = \frac{4}{3}(q-p)\sqrt{pq}.$$

Вычисление площади привело к несобственному интегралу (особая линия — отрезок оси u). После того как замена переменных распространена и на случай несобственных интегралов, законность проведенной выкладки не может вызывать сомнения.

9) Вычислить интеграл $(0 < c < a)$

$$R = \int\limits_0^1\int\limits_0^c \sqrt{a^2 - x^2 - (c^2 - x^2)\, y^2}\, \sqrt{c^2 - x^2}\, dx\, dy.$$

Применим подстановку.

$$x=\frac{v}{\sqrt{1+u^2}},\quad y=\frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}},$$

где (u, v) изменяется в бесконечном прямоугольнике $[0, +\infty; 0, c]$; якобиан равен $-\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$. Имеем:

$$R=\int_0^c\int_0^\infty \frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,du\,dv=\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}\cdot\int_0^c v\sqrt{a^2-v^2}\,dv=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[a^3-(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Здесь оказалось выгодным интеграл собственный свести к несобственному, который легче вычисляется.

10) Двойной интеграл

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

существует, ибо существует повторный:

$$P=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\left\{\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right\}^2.$$

Его легко вычислить, если перейти к полярным координатам; первый квадрант на плоскости xy преобразуется при этом в полосу на плоскости $r\theta$, ограниченную прямыми $\theta=0$, $r=0$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот замечательный по простоте прием вычисления принадлежит Пуассону.

11) Если в том же интеграле P перейти к эллиптическим координатам [604, 5)] по формулам

$$x=\frac{\lambda\mu}{c},\quad y=\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{c},\quad x^2+y^2=\lambda^2+\mu^2-c^2,$$

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}},$$

то получим

$$P=\int\limits_{c}^{\infty}\int\limits_{0}^{c}\frac{e^{-(\lambda^2+\mu^2-c^2)}(\lambda^2-\mu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu\,d\lambda=\frac{\pi}{4}$$

или

$$\int\limits_{c}^{\infty}\frac{e^{-\lambda^2}\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\cdot\int\limits_{0}^{c}\frac{e^{-\mu^2}\,d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}-\int\limits_{c}^{\infty}\frac{e^{-\lambda^2}\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\cdot\int\limits_{0}^{c}\frac{e^{-\mu^2}\mu^2d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}=\frac{\pi}{4}e^{-c^2}.$$

Если взять $c=1$ и сделать подстановку $\lambda=\sqrt{v+1}$, $\mu=\sqrt{v}$, то придем к любопытному соотношению:

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-v}\sqrt{\frac{1+v}{v}}\,dv\cdot\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{v(1-v)}}-$$

$$-\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{v(1+v)}}\cdot\int\limits_{0}^{1}e^{-v}\sqrt{\frac{v}{1-v}}\,dv=\pi.$$

12) С помощью обобщенных полярных координат

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta\qquad(0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

легко найти значение двойного интеграла

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{\pi}{2}ab.$$

Если же перейти к эллиптическим координатам, о которых только что шла речь (взяв $c^2=a^2-b^2$, так что данный эллипс отвечает $\lambda=a$), то для того же интеграла получим

$$J=ab\int\limits_{0}^{c}\int\limits_{c}^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\lambda\,d\mu.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{0}^{c}\int\limits_{c}^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\lambda\,d\mu=\frac{\pi}{2}.$$

Полагая здесь $a=1$, $c=k<1$, $k'=\sqrt{1-k^2}$, наконец $\lambda=\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$, $\mu=k\sin\varphi\left(0\leqslant\varphi,\ \psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, сведем этот интеграл к следующему:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k'^2\sin^2\psi)+(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k'^2\sin^2\psi)}}\,d\varphi\,d\psi=\frac{\pi}{2},$$

что может быть представлено в виде

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\,d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = \frac{\pi}{2}.$$

Читатель узнает в этом уже встречавшееся нам соотношение Лежандра [см. 511, 12) и 534, 10)].

13) Приведем вывод известного соотношения между эйлеровыми интегралами 1-го и 2-го рода, принадлежащий Якоби.

Так как (при $a>0$ и $b>0$)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1}\,dy, \quad \Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1}\,dx,$$

то, очевидно,

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y} x^{b-1} y^{a-1}\,dx\,dy.$$

Положим здесь

$$x = u(1-v), \qquad y = uv,$$

так что первому квадранту на плоскости xy отвечает полоса на плоскости uv, ограниченная прямыми $v=0$, $u=0$, $v=1$. Якобиан преобразования равен u. Поэтому

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^1\int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} \cdot v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,du\,dv =$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1}\,du \cdot \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dv = \Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,\,b),$$

что и требовалось доказать.

14) В предыдущем изложении нами был выведен ряд формул, область применимости которых теперь может быть расширена. Это относится, например, к формуле Дирихле:

$$\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^{p-1} y^{q-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

[597, 12)] и к более общей формуле Лиувилля:

$$\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\leq 1}} \varphi(x+y)\, x^{p-1} y^{q-1}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u)\, u^{p+q-1}\,du$$

[611, 17)], которые сохраняют силу при любых p и $q>0$. При этом доказательства остаются те же.

Можно пойти и дальше: в формуле Лиувилля мы до сих пор предполагали функцию $\varphi(u)$ непрерывной при изменении u от 0 до 1, теперь же можно допустить и обращение ее в бесконечность в одной или нескольких точках этого промежутка, лишь бы интеграл справа был *абсолютно* сходящимся (иначе интеграл слева не будет сходиться вовсе).

Наконец, можно в формуле Лиувилля распространить двойной интеграл на *бесконечную* область, определяемую неравенствами

$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad x+y\geqslant 1,$$

если только интеграл справа взят в промежутке от 1 до $+\infty$ (снова в предположении его *абсолютной* сходимости).

Все это не требует никаких существенных изменений в доказательстве.

15) Если в формулах Дирихле и Лиувилля заменить p и q на $\frac{p}{\alpha}$ и $\frac{q}{\beta}$, а затем произвести подстановку $x=\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}$, $y=\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}$, то эти формулы получат более общий вид:

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\ \eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqslant 1}} \xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+1\right)},$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\ \eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqslant 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int\limits_0^1 \varphi(u)\,u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du,$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\ \eta\geqslant 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\geqslant 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int\limits_1^{\infty} \varphi(u)\,u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du\ *.$$

* Все постоянные a, b, α, β, p, q предполагаются здесь положительными.

Для примера предлагается установить условия сходимости и вычислить интегралы ($m > 0$):

(а) $$\iint\limits_{\substack{x,\ y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m}\, dx\, dy,$$

(б) $$\iint\limits_{\substack{x,\ y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \geq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(x^\alpha + y^\beta)^m}\, dx\, dy,$$

(в) $$\iint\limits_{\substack{x,\ y \geq 0 \\ x^\alpha + y^\beta \leq 1}} \frac{x^{p-1} y^{q-1}}{(1 - x^\alpha - y^\beta)^m}\, dx\, dy.$$

Ответ. (а) $$\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{\alpha},\ \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} - m\right)} \quad \left(\text{при условии } \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} > m\right);$$

(б) $$\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{\alpha},\ \frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(m - \frac{p}{\alpha} - \frac{q}{\beta}\right)} \quad \left(\text{при условии } \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} < m\right);$$

(в) $$\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma(1-m)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + 1 - m\right)} \quad (\text{при условии } m < 1).$$

[Ср. задачу 1)].

16) Выведенная в n° 597, 15) формула Каталана:

$$\iint\limits_{m \leq g(x,\ y) \leq M} f(x,\ y)\, \varphi[g(x,\ y)]\, dx\, dy = \int\limits_m^M \varphi(u)\, d\psi(u),$$

где

$$\psi(u) = \iint\limits_{m \leq g(x,\ y) \leq u} f(x,\ y)\, dx\, dy,$$

с введением несобственных интегралов может быть обобщена на случай $M = +\infty$, если только $\int\limits_m^{+\infty}$ понимать и здесь, как $\lim\limits_{M \to +\infty} \int\limits_m^M$.

17) Найти значение интеграла

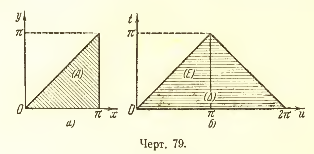
$$L = \iint\limits_{(A)} \ln \sin(x - y)\, dx\, dy,$$

где A есть треугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$ (черт. 79, *а*)

Полагая

$$x=\frac{u+t}{2},\quad y=\frac{u-t}{2},$$

преобразуем область (A) в треугольник (Δ) на плоскости ut, ограниченный



Черт. 79.

прямыми $u=t$, $u+t=2\pi$, $t=0$ (черт. 79, *б*). Так как якобиан преобразования равен $\frac{1}{2}$, то

$$L=\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Delta)}\ln\sin t\,dt\,du=\iint\limits_{(E)}\ln\sin t\,dt\,du,$$

если через (E) обозначить треугольник, ограниченный прямыми $u=t$, $u=\pi$, $t=0$ (см. чертеж). Далее можно написать:

$$L=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln\sin t\,dt\,du=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\ln\sin t\,dt=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

18) Вычислить (при любых натуральных m и n) интеграл

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{P_m(x)\,P_n(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где P_n означает n-й многочлен Лежандра.

Решение. Напомним, что многочлен Лежандра с нечетным (четным) значком содержит лишь нечетные (четные) степени x. Отсюда ясно сразу, что $I=0$, если только хоть один из значков m или n будет нечетным.

Пусть же оба они — четные: $m=2\mu$, $n=2\nu$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{P_{2\nu}(x)\,y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1}P_{2\nu}(x)\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy.$$

По известной формуле

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy=2\int\limits_0^a=2a^{2p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\,d\theta=\pi a^{2p}\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!},$$

так что наш интеграл приведется к

$$\pi \frac{(2p-1)!!}{2p!!} \int_{-1}^{1} P_{2\nu}(x) \cdot (1-x^2)^p \, dx;$$

следовательно, он равен 0 при $p < \nu$ [по основному свойству многочленов Лежандра; **320** (8)]. Отсюда — предложенный интеграл $I = 0$ при $n = 2\nu \neq m = 2\mu$. Остается случай, когда $n = m = 2\mu$. В этом случае

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_{2\mu}(x) P_{2\mu}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{P_{2\mu}(x) y^{2\mu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy =$$

$$= \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x)(1-x^2)^{\mu} \, dx = (-1)^{\mu} \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x) \, x^{2\mu} \, dx =$$

$$= (-1)^{\mu} \pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \int_{-1}^{1} P_{2\mu}(x) P_{2\mu}(x) \, dx = (-1)^{\mu} 2\pi \frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!} \frac{1}{4\mu+1}$$

[**320** (10)]. Итак, окончательно,

$$I = \begin{cases} 0, & \text{кроме случая } n = m = 2\mu, \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2\pi \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{1}{2n+1}, & \text{если } n = m = 2\mu. \end{cases}$$

Предоставляем читателю убедиться в законности проделанных операций.

19) Вычислить интеграл (Лиувилль)

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x+y+\frac{\lambda^3}{xy}\right)} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} \, dx \, dy \qquad (\lambda > 0).$$

Пользуясь правилом Лейбница, найдем его производную по параметру λ:

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3\lambda^2 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(x+y+\frac{\lambda^3}{xy}\right)} x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} \frac{dx \, dy}{xy}^{*}.$$

Заменим здесь одну лишь переменную x, полагая (при $y = \text{const.}$) $z = \frac{\lambda^3}{xy}$, так что $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$; получим

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(y+z+\frac{\lambda^3}{yz}\right)} y^{\frac{1}{3}-1} z^{\frac{2}{3}-1} \, dy \, dz = -3R.$$

---

* Предоставляем читателю убедиться в существовании интеграла R и в дозволительности применения правила Лейбница. Последнее обосновывается такими же соображениями, как и в случае простого интеграла.

Интегрируя это простое дифференциальное уравнение, найдем $R = Ce^{-3\lambda}$. Постоянная C определится, если положить $\lambda = 0$:

$$R(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Итак, окончательно,

$$R = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-3\lambda}.$$

20) Вычислить интеграл

$$A = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}\,\frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy$$

(где $k = \text{const.}$).

Так как подинтегральная функция по абсолютной величине не превосходит функции

$$\frac{e^{-x-y}}{\sqrt{xy}},$$

заведомо имеющей интеграл по первому квадранту [см. 7)], то существование интеграла A обеспечено.

Обозначая через (D) ту часть первого квадранта, где $x \geqslant y$ (на черт. 80 она заштрихована), имеем, очевидно,

$$A = 2\iint_{(D)} e^{-x-y}\,\frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy.$$

Произведем теперь замену переменных по формулам

$$u = x + y, \quad v = 2\sqrt{xy};$$

Черт. 80.

точка (u, v) описывает аналогичную (D) область (Δ) на плоскости uv, так что $u \geqslant v$. При этом

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{u^2-v^2}}{v} \quad \text{и} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{v}{2\sqrt{u^2-v^2}}.$$

Получим после подстановки

$$A = 2\iint_{(\Delta)} e^{-u}\,\frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}}\,du\,dv = 2\int_0^\infty e^{-u}du\int_0^u \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}}\,dv.$$

Для вычисления внутреннего интеграла положим

$$v = u\sin\theta, \quad dv = u\cos\theta\,d\theta = \sqrt{u^2-v^2}\,d\theta,$$

и он сведется к интегралу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ku\sin\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}J_0(ku)$$

[440, 12)]. Пользуясь известным результатом [524, 3)], найдем окончательно:

$$A=\pi\int_0^\infty e^{-u}J_0(ku)\,du=\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}.$$

21) Вычислить интеграл

$$B=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy,$$

где a, ξ и η — постоянные и $a>0$.

Очевидно,

$$B=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots dx\,dy.$$

Перейдем к полярным координатам, полагая

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta;$$

одновременно для облегчения выкладок положим также

$$\xi=\rho\cos\varphi,\quad \eta=\rho\sin\varphi.$$

После подстановки и легких преобразований получим

$$B=\frac{1}{8}\left\{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-ar}\cos[r\rho\cos(\theta-\varphi)]\cdot r\,dr+\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-ar}\cos[r\rho\cos(\theta+\varphi)]\cdot r\,dr\right\}.$$

Полагая $\theta\mp\varphi=\lambda$ и пользуясь периодичностью, сведем оба повторных интеграла к одному и тому же:

$$B=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^\infty e^{-ar}\cos(r\rho\cos\lambda)\cdot r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\lambda\int_0^\infty e^{-ar}\cos(r\rho\cos\lambda)\cdot r\,dr.$$

Легко вычислить (например, интегрируя по частям), что

$$\int_0^\infty e^{-ar}\cos br\cdot r\,dr=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\qquad(a>0).$$

В таком случае

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2-\rho^2\cos^2\lambda}{(a^2+\rho^2\cos^2\lambda)^2}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Можно и в общем виде показать (пользуясь тем же приемом), что если интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos x\xi\,\cos y\eta\,dx\,dy$$

сходится, то он всегда оказывается зависящим только от $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, т. е. имеет вид $f\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)$.

22) Пусть (D) означает треугольник OAB (черт. 81), характеризуемый неравенствами $0\leqslant x\leqslant\alpha$ и $y\leqslant x$, а $f(x)$ — произвольная непрерывная от 0 до α функция. Приводя двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)}\frac{f(y)\,dx\,dy}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$$

к повторному двумя способами, доказать формулу

$$\int_0^\alpha\frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}}\int_0^x\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}}=\pi\int_0^\alpha f(y)\,dy. \qquad (15)$$

Черт. 81.

[По сути дела, это частное применение формулы Дирихле, 597, 10), но на этот раз — к несобственным интегралам; особые линии здесь: $x=\alpha$ и $y=x$.]

Воспользуемся формулой (15) для решения одной интересной задачи, принадлежащей Абелю.

Пусть $\varphi(x)$ есть данная функция, непрерывная вместе со своей производной в промежутке $[0, a]$, причем $\varphi(0)=0$. Требуется определить непрерывную в этом же промежутке функцию $f(x)$ так, чтобы при всех x выполнялось условие

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}}. \qquad (16)$$

[Такого типа уравнение, где искомая функция стоит под знаком интеграла, называется интегральным. Уравнение Абеля представляет один из первых примеров интегральных уравнений; для интегральных уравнений теперь существует широко развитая теория.]

Умножив обе части равенства (16) на $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$, проинтегрируем его по x от 0 до любого α $(0<\alpha\leqslant a)$; ввиду (15) найдем

$$\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\pi\int_0^\alpha f(y)\,dy.$$

Если взять и слева и справа производную по α, используя уже известный нам результат 511, 14), то и придем к выражению искомой функции:

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Остается проверить, что полученная функция удовлетворяет поставленным требованиям. Непрерывность ее по α легко устанавливается с помощью указан-

ной в **511**, 14) подстановки. Если же эту функцию подставить в уравнение (16), то, опираясь на формулу (15), найдем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\int_0^y \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{y-t}}\,dt=\int_0^x \varphi'(t)\,dt=\varphi(x)\qquad [\varphi(0)=0],$$

что и требовалось доказать.

В заключение остановимся еще на двух-трех примерах, выясияющих некоторые принципиальные моменты.

23) Покажем, прежде всего, что для несобственных интегралов (даже от неотрицательных функций) теорема n° **594**, позволяющая из существоваиия двойного интеграла заключить о существовании повторного, вообще не имеет места.

Пусть в квадрате $[0, 1; 0, 1]$ функция $f(x, y)$ определена следующим образом:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^n, \text{ если } x=\dfrac{2m-1}{2^n} \text{ и } 0<y\leqslant\dfrac{1}{2^n} \\ (n=1,2,3,\ldots;\ m=1,2,\ldots,2^{n-1}), \\ 0 \text{ в прочих точках.}\end{cases}$$

При $y=\text{const.}$ может существовать лишь конечное число значеиий x, для которых $f\neq 0$. Значит,

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx=0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx=0.$$

Теперь, если $x=\text{const.}$ и не имеет вида $\dfrac{2m-1}{2^n}$, то $f=0$ и $\int_0^1 f(x, y)\,dy=0$. Если же $x=\text{const.}=\dfrac{2m-1}{2^n}$, то $\int_0^1 f(x, y)\,dy=$ $=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f\,dy=1$. Отсюда ясно, что повториый иитеграл $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)\,dy$ не существует.

[Для функции $f(x, y)+f(y, x)$, очевидно, не существует уже ни один из повторных интегралов!]

Что же касается двойного интеграла, то прежде всего замечаем, что *особые* точки заполняют отрезок $[0, 1]$ на оси x. При любом $\varepsilon>0$ в прямоугольнике $[0, 1; \varepsilon, 1]$ функция f может быть отлична от 0 лишь на конечном числе отрезков прямых $x=\dfrac{2m-1}{2^n}$, для которых $\dfrac{1}{2^n}\geqslant\varepsilon$. Поэтому

$$\iint\limits_{[0, 1;\ \varepsilon, 1]} f(x, y)\,dx\,dy=0;$$

переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, видим, что и

$$\iint\limits_{[0, 1;\ 0, 1]} f(x, y)\,dx\,dy=0.$$

24) Нетрудно установить, что двойные интегралы

$$(а)\ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\,dy,\quad (б)\ \int_0^\infty\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

оба не сходятся (в смысле данного в п° **612** определения).

В случае (а) явно не существует интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции, ибо иначе имел бы конечное значение повторный интеграл

$$\int_0^\infty |\sin x|\,dx\int_0^\infty e^{-xy}\,dy=\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx,$$

чего на деле нет [**477**]. Отсюда, ввиду **613**, и вытекает утверждение.

В случае (б), если через (K_R) обозначить квадрант круга радиуса R с центром в начале, то, переходя к полярным координатам, будем иметь

$$\iint\limits_{(K_R)} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \sin r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}(1-\cos R^2).$$

При возрастании R до бесконечности это выражение определенного предела не имеет, что также решает вопрос.

Любопытно отметить, что в каждом из рассмотренных примеров повторные интегралы оба существуют (и даже равны между собой):

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\int_0^\infty \sin x\,dx\int_0^\infty e^{-xy}\,dy=\frac{\pi}{2}\qquad [522,\ 2°],$$

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dy=\frac{\pi}{4}\qquad [522,\ 5°].$$

Таким образом, для функций переменного знака одно существование повторного интеграла еще не обеспечивает существования двойного интеграла (напомним, что в **614** мы дополнительно требовали существования повторного интеграла для абсолютной величины функции!).

25) Если бесконечный прямоугольник $[0, +\infty; 0, +\infty]$ исчерпывать не произвольными бесконечно расширяющимися областями (как этого требует определение п° **612**), а специально прямоугольными областями вида $[0, A; 0, B]$, то в обоих рассмотренных выше случаях окажется, что для интеграла

$$\iint\limits_{[0, A;\ 0, B]} \ldots\,dx\,dy$$

при $A, B\to+\infty$ существует определенный конечный предел.

Это сразу видно относительно интеграла

$$\iint\limits_{[0, A;\ 0, B]} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^A \sin x^2\,dx \cdot \int_0^B \cos y^2\,dy + \int_0^A \cos x^2\,dx \cdot \int_0^B \sin y^2\,dy,$$

который при указанном предельном переходе стремится к пределу $\frac{\pi}{4}$ [522, 5°].

Рассмотрим теперь интеграл

$$\iint\limits_{[0, A;\ 0, B]} e^{-xy}\sin x\,dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^A \frac{e^{-Bx}\sin x}{x}\,dx.$$

Первый из интегралов справа (при $A \to +\infty$) стремится к $\frac{\pi}{2}$, а второй (при $A, B \to +\infty$) имеет пределом 0, ибо по абсолютной величине не превосходит интеграла

$$\int_0^A e^{-Bx}\,dx = \frac{1-e^{-AB}}{B}.$$

Итак, здесь окончательно в пределе получается $\frac{\pi}{2}$ *.

Подобные пределы, связанные со специализацией предельного перехода, напоминают «главные значения» несобственных интегралов [484]. Их можно рассматривать и в случае произвольной простирающейся в бесконечность области, если вне ее положить функцию равной нулю. Некоторые математики считали целесообразным именно эти пределы класть в основу самого определения понятия несобственного двойного интеграла (что существенно разнится от принятого в нашем изложении определения). При такой точке зрения оба рассмотренных в 24) интеграла оказались бы сходящимися и притом неабсолютно.

Замечание. Сходное положение вещей имеет место по отношению к двойным рядам. Так как мы там исходили всегда из бесконечной прямоугольной матрицы, то представлялось естественным исчерпывать ее постоянно расширяющимися конечными прямоугольными же матрицами, что и было нами положено в основу определения суммы двойного ряда [394]. Поэтому-то двойные ряды могли быть как абсолютно, так и неабсолютно сходящимися. Существует, однако, и другая точка зрения, согласно которой от бесконечной матрицы конечные куски отделяются кривыми произвольной формы, лишь бы удаляющимися всеми точками в бесконечность. Эта точка зрения сближается с той, на которой построено данное выше [612] определение несобственного двойного интеграла. Если стоять на ней, то и двойные ряды окажутся сходящимися лишь абсолютно, подобно несобственным интегралам.

* Совпадение этого предела с общим значением повторных интегралов, которое имеет место в обоих случаях, конечно, закономерно [ср. 168].

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двусторонние поверхности

618. Сторона поверхности. Установим сначала важное для дальнейшего изложения понятие стороны поверхности.

В ряде случаев это понятие интуитивно ясно. Если поверхность задается явным уравнением вида $z = f(x, y)$, можно говорить о верхней стороне или о нижней стороне поверхности*. Если поверхность ограничивает некоторое тело, то также легко представить себе ее две стороны — внутреннюю, обращенную к телу, и внешнюю, обращенную к окружающему тело пространству.

Исходя из этого интуитивного представления, постараемся теперь дать точное определение понятия стороны поверхности.

Рассмотрим гладкую поверхность (S), замкнутую или ограниченную кусочно-гладким контуром. Так как на поверхности нет особых точек, то в каждой точке поверхности имеется определенная касательная плоскость, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

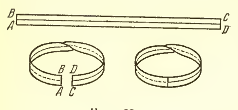
Взяв на поверхности определенную точку M_0, проведем в ней нормаль, которой припишем определенное направление — одно из двух возможных (они отличаются одно от другого знаками направляющих косинусов). Проведем по поверхности замкнутый контур, исходящий из M_0 и возвращающийся в M_0, причем предположим, что он не пересекает границы поверхности. Заставим точку M обойти этот контур и в каждом из последовательных ее положений будем приписывать нормали то из двух направлений, в которое непрерывно переходит направление, выбранное нами в начальном положении M_0. При этом может случиться одно из двух: либо после обхода контура мы вернемся в точку M_0 с тем же направлением нормали, либо же — с направлением, противоположным исходному.

---

* Мы часто будем пользоваться подобным выражением, подразумевая при этом, что сама ось z направлена вертикально вверх.

Если для какой-либо точки M_0 и какого-либо проходящего через нее контура M_0AM_0 имеет место последнее обстоятельство, то и для любой другой точки M_1 легко построить замкнутый контур, который, выходя из M_1 и возвращаясь в нее же, приведет нас в эту точку с направлением нормали, противоположным исходному. Таким, например, будет контур $M_1M_0AM_0M_1$, если под M_1M_0 разуметь какую-нибудь проходящую по поверхности кривую, соединяющую M_1 с M_0, но не пересекающую границы поверхности, а под M_0M_1 — ту же кривую в обратном направлении.

В этом случае поверхность называют *односторонней*. Классическим примером такой поверхности является так называемый *лист Мёбиуса* (черт. 82). Модель ее можно получить, если прямоугольный кусок бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с C, а B с D. Если полученное перекрученное кольцо начать красить в какой-либо цвет, то можно, не переходя через его границы, покрасить все кольцо этим цветом. Мы впредь подобные поверхности исключим из рассмотрения.



Черт. 82.

Предположим теперь, что *какова бы ни была* точка M_0 и *каков бы ни был* замкнутый контур, проходящий через M_0 и не пересекающий границы поверхности, после обхода его мы неизменно возвращаемся в исходную точку M_0 с исходным же направлением нормали. При этих условиях поверхность называется *двусторонней*.

Пусть же S — двусторонняя поверхность. Возьмем на ней любую точку M_0 и нормали в этой точке припишем определенное направление. Взяв какую-либо другую точку M_1 поверхности, соединим M_0 и M_1 произвольным путем (K), лежащим на поверхности и не пересекающим ее границы, и заставим точку M перейти из M_0 в M_1 по этому пути. Если при этом непрерывно изменять направление нормали, то точка M придет в положение M_1 с вполне определенным направлением нормали, не зависящим от выбора пути (K). Действительно, если бы, приходя в точку M_1 из точки M_0 по двум различным путям (K_1) и (K_2), мы получали в точке M_1 различные направления нормали, то *замкнутый* путь $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$ приводил бы нас в точку M_0 с направлением нормали, отличным от исходного, что противоречило бы определению двусторонней поверхности.

Таким образом, на двусторонней поверхности выбор направления нормали в *одной* точке однозначно определяет выбор направления нормали во *всех* точках поверхности. *Совокупность всех точек поверхности с приписанными нормалям в них по указанному правилу направлениями и называется определенной стороной поверхности.*

619. Примеры. 1°. Простейшим и наиболее важным примером двусторонней поверхности является поверхность, выражаемая явным уравнением $z = z(x, y)$, в предположении, что функция z непрерывна в некоторой плоской области (D) и допускает в ней непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

В этом случае направляющие косинусы нормали к поверхности имеют выражение [234 (11)]

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Выбрав перед радикалом определенный знак, мы тем самым устанавливаем во всех точках поверхности определенное направление нормали. Так как направляющие косинусы, в силу сделанных предположений, будут непрерывными функциями координат точки, то и установленное направление нормали будет также непрерывно зависеть от положения точки. Отсюда ясно, что *выбор знака перед радикалом в формулах для* $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ *определяет сторону поверхности* в том именно смысле, какой выше приписан этому понятию.

Если выберем перед радикалом знак плюс, то во всех точках поверхности

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

будет положительным, т. е. угол, составленный с осью z нормалью соответствующей выбранной стороне, будет острым. Таким образом, сторона поверхности, определяемая указанным выбором знака, оказывается верхней стороной. Напротив, выбор знака минус в выражениях направляющих косинусов нормали характеризует нижнюю сторону поверхности (нормали составляют с осью z тупые углы).

2°. Рассмотрим теперь, более обще, произвольную простую незамкнутую гладкую поверхность (S), заданную параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

причем параметры u, v изменяются в некоторой ограниченной области (Δ) на плоскости uv. Требование гладкости означает, что функции (1) непрерывны в (Δ) вместе со своими частными производными и что на поверхности нет особых точек. Помимо этого (что особенно важно подчеркнуть), мы предположили поверхность простой, так что на ней нет кратных точек, и каждая точка поверхности получается лишь при одной паре значений параметров u, v.

Если через A, B, C обозначить, как обычно, определители матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix},$$

то, по предположению, всегда $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, и направляющие косинусы нормали к поверхности выразятся известными формулами [234, (17)]:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\nu = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

И в этом случае *выбор знака перед радикалом характеризует сторону поверхности*, так что поверхность оказывается двусторонней. Действительно, раз знак выбран, формулы (2) каждой точке поверхности (так как ей отвечает одна лишь пара значений u, v!) сопоставляют одно определенное направление нормали, которое при передвижении точки изменяется непрерывным образом.

При нарушении предположения об отсутствии кратных точек уже нельзя безоговорочно утверждать, что поверхность двусторонняя. Тогда кратной точке M_0 поверхности отвечают, по меньшей мере, две различные пары u_0, v_0 и u_1, v_1 значений параметров, и может случиться, что при этих значениях формулы (2), даже если знак перед радикалом выбран одинаково, определяют противоположные направления нормали в точке M_0. Если это действительно так, то поверхность наверное будет односторонней. В самом деле, соединим точки m_0 (u_0, v_0) и m_1 (u_1, v_1) на плоскости uv кривою m_0m_1; тогда на поверхности (S) в соответствии с ней мы получим замкнутую кривую, исходящую из M_0 и возвращающуюся в M_0; выйдя из M_0 с одним направлением нормали, мы после обхода этой кривой вернемся в M_0 уже с противоположным направлением!

3°. Если гладкая поверхность (S) оказывается замкнутой и ограничивает некоторое тело, то наличие у нее двух сторон — внешней и внутренней — ясно непосредственно. Допустим, что эта поверхность выражается уравнениями (1). Хотя на этот раз предположение о взаимно однозначном соответствии между точками поверхности и точками области (Δ) не осуществимо в полной мере, но *выбор знака в формулах* (2) *все же определяет сторону поверхности*. Суть дела именно в том, что случай, о котором только что была речь, здесь заведомо невозможен.

620. Ориентация поверхностей и пространства. Пусть (S) будет незамкнутая гладкая двусторонняя поверхность, ограниченная простым контуром (L); выберем определенную сторону этой поверхности. Припишем теперь контуру (L) определенное направление обхода в качестве положительного по следующему правилу: обход должен казаться происходящим против часовой стрелки наблюдателю, движущемуся в этом направлении по контуру так, что нормаль к поверхности, отвечающая выбранной стороне, пронизывает его от ног к голове. Слова «против часовой стрелки» означают, точнее говоря, что наблюдатель должен видеть непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя. По тому же правилу одновременно устанавливается положительное направление обхода для каждого простого замкнутого контура, лежащего на поверхности и ограничивающего некоторую ее часть *. Направление обхода, обратное положительному, назовем отрицательным. В совокупности все это и составляет содержание понятия ориентации поверхности.

Если исходить из другой стороны поверхности, то нормали изменят свое направление на обратное, изменится положение наблюдателя, в связи с чем по нашему правилу придется переставить положительное и отрицательное направления обхода контура (L) и

* Только с этой частью и надлежит считаться при определении положительного направления на контуре.

других контуров, лежащих на поверхности: поверхность изменит свою ориентацию. Таким образом, если всегда держаться установленного правила, *выбор стороны поверхности определяет ее ориентацию* и, обратно, *выбор положительного направления обхода контура поверхности однозначно определяет ее сторону.*

В случае замкнутой гладкой поверхности (S), ограничивающей некоторое тело, речь может идти о внешней или о внутренней по отношению к этому телу стороне поверхности. Установить для любого простого замкнутого контура положительное направление обхода с помощью сформулированного выше правила на этот раз не удается. Причина этого — двоякая. Прежде всего такой контур может просто «не разделять» поверхность (как, например, в случае любых параллелей или меридианов на торе), и тогда поверхность примыкает к контуру с обеих сторон: наше правило ничего не дает. Но если даже контур «разделяет» поверхность на две области, то он обе их «ограничивает» в равной мере, и в зависимости от того, какую из них выбрать, наше правило приводит к тому или другому из двух направлений на контуре, как к положительному. Ограничиваясь контурами, «разделяющими» поверхность, мы станем вместе с контуром указывать и область, тогда положительное направление устанавливается уже вполне однозначно *. *Этим и определяется ориентация поверхности — та или другая, в зависимости от выбранной стороны.*

Если условиться принять для каждой такой поверхности за положительную ориентацию ту, которая отвечает внешней стороне поверхности, а за отрицательную — противоположную ей, то этим создается некая определенная ориентация самого пространства. Это вполне аналогично тому, как выбор положительного направления (можно было бы сказать — положительной ориентации) на любом лежащем на плоскости простом замкнутом контуре характеризовал ориентацию плоскости [548].

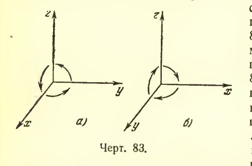
Та ориентация пространства, которая сейчас была определена и в основу которой в конечном счете было положено вращение против часовой стрелки, называется правой. Если вместо этого исходить из вращения по часовой стрелке, то получится левая ориентация пространства. *Для избежания путаницы мы впредь в тех вопросах, где ориентация пространства играет роль, всегда будем предполагать правую ориентацию пространства.*

Нужно сказать, что и самое расположение координатных осей в пространстве ставится в связь с установленной ориентацией

---

* Если рассматривать на плоскости незамкнутый или замкнутый контур, определенным образом направленный, то в первом случае о любых двух точках на контуре можно сказать, какая из них предшествует и какая следует, а во втором случае это можно сделать, лишь если вместе с точками указать и ограничиваемую ими дугу кривой. В этом можно усмотреть аналогию со сказанным в тексте.

пространства. При правой ориентации оси располагаются так, что вращение от оси x к оси y кажется происходящим против часовой стрелки, если на них смотреть из положительной части оси z (это сохраняет силу и при круговых перестановках букв xyz) (черт. 83, a); при левой ориентации упомянутое вращение происходит по часовой стрелке (черт. 83, б). В первом случае координатная система $Oxyz$ называется правой, а во втором — левой. В согласии с заключенным выше условием мы в указанных случаях впредь будем пользоваться правой координатной системой.



Черт. 83.

621. Выбор знака в формулах для направляющих косинусов нормали. Дадим сейчас важное для дальнейшего приложение изложенной выше идеи о связи между выбором стороны поверхности и созданием на ней той или другой ориентации.

Рассмотрим вновь простую незамкнутую гладкую поверхность S и выберем определенную ее сторону (а с нею — и ориентацию!). Пусть (Λ) будет контур области (Δ) на плоскости uv, а (L) — соответствующий ему контур нашей поверхности. Допустим, что положительному обходу контура (Λ) отвечает положительный же обход контура (L)*. Тогда и для любых соответствующих друг другу контуров (λ) в области (Δ) и (l) на поверхности (S) имеет место то же самое: положительный обход (λ) влечет за собой положительный обход (l)**.

При этих условиях для характеристики выбранной стороны поверхности в формулах (2) *для направляющих косинусов нормали перед радикалом нужно взять знак плюс.*

Для доказательства этого достаточно установить, что хоть в одной точке направление, определяемое этими формулами со знаком плюс, совпадает с нужным направлением нормали. Возьмем на поверхности какую-нибудь внутреннюю точку M_0; ей отвечает точка m_0 (u_0, v_0) в области (Δ). Пусть в этой точке отличен от нуля, скажем, определитель

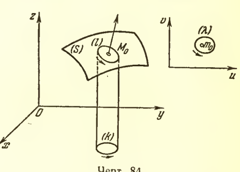
$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

* Этого всегда легко добиться, заменив в случае надобности параметр u на $-u$.

** Так как о направлении обхода контура можно судить по направлению, в котором описывается любая его часть, то высказанное утверждение очевидно для контура (λ), имеющего общую часть с (Λ), а затем легко переносится и на общий случай.

Тогда найдется столь малая окрестность точки m_0 на плоскости uv, ограниченная контуром (λ), что соответствующая ей окрестность точки M_0 на поверхности (S), ограниченная контуром (l), проектируется на плоскость xy взаимно однозначно. Обозначим контур этой проекции на плоскость xy через (k) (черт. 84).

Если в рассматриваемой точке и в ее окрестности определитель $C>0$, то положительному обходу контура (λ) отвечает положительный же обход (т. е. при выбранном расположении осей обход против часовой стрелки) контура (k) [см. **606**, 1)]. Как видно из чертежа, для того чтобы соответствующий этому обход контура (l) на поверхности тоже казался происходящим против часовой стрелки, на него нужно смотреть сверху, так что нормаль в точке M_0 в этом случае должна быть направлена вверх, т. е. должна составлять с осью z острый угол. Это именно и имеет место по формулам (2), если в них взять знак плюс, ибо при $C>0$ тогда и $\cos\nu>0$. Наоборот, при $C<0$ нормаль должна составлять с осью z тупой угол, что также осуществляется на деле при указанном выборе знака, ибо при $C<0$ и $\cos\nu<0$.



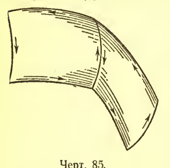
Черт. 84.

Если гладкая поверхность (S) оказывается замкнутой и ограничивает некоторое тело [ср. **619**, 3°], то для нее имеет место аналогичное обстоятельство. Допустим, что мы остановились на определенной стороне поверхности и что положительному обходу одного какого-нибудь контура (λ_0) в области (Δ) отвечает положительный обход определяемого им контура (l_0) на поверхности (S), если связать (l_0) с той областью на (S), которая отвечает ограниченной контуром (λ_0) области на плоскости uv. В таком случае предложение, доказанное выше для случая незамкнутой поверхности, будет справедливо и теперь.

622. Случай кусочно-гладкой поверхности. Развитые в n° **620** идеи дают также удобное средство для распространения понятия стороны поверхности на случай кусочно-гладкой поверхности. Соображения, изложенные в n° **618**, в этом случае непосредственно неприложимы, так как вдоль «ребер», соединяющих гладкие куски поверхности, определенной касательной плоскости не существует, и при переходе через них о непрерывном изменении направления нормали говорить не приходится.

Пусть дана кусочно-гладкая поверхность (S), состоящая из гладких кусков (S_1), (S_2), ..., примыкающих один к другому по ребру —

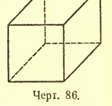
общей части их контуров. Предположим прежде всего, что *каждый из этих кусков в отдельности является двусторонней поверхностью.* Но этого, разумеется, недостаточно для того, чтобы всю поверхность (S) можно было рассматривать, как двустороннюю; ведь и поверхность Мёбиуса легко составляется из двух гладких двусторонних кусков.



Черт. 85.

На контуре (K_i) каждого куска (S_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ выберем в качестве положительного одно из двух направлений; этим, как мы видели, фиксируется сторона поверхности (S_i). Если этот выбор можно произвести так, чтобы всегда *общая часть двух примыкающих контуров* описывалась в обоих случаях в противоположных направлениях* (черт. 85), то лишь тогда поверхность (S) является *двусторонней.* Сторона поверхности (S) определится, как совокупность сторон ее частей, выбранных указанным образом.

Если хоть в одном случае направление обхода контура заменить на противоположное, то для соблюдения нашего условия придется то же сделать и со всеми контурами. Тогда и выбранные стороны всех кусков (S_i) заменятся противоположными им; их совокупность составит вторую сторону поверхности.



Черт. 86.

Для того чтобы освоиться с установленными соглашениями, предлагается читателю: 1) осуществить их на примере поверхности куба (черт. 86), подобрав надлежащие направления обхода контуров всех шести составляющих плоских кусков, 2) дать себе отчет в том, какие затруднения встретились бы, если бы попытаться то же сделать для поверхности Мёбиуса, разложенной на два или более двусторонних куска, и, наконец, 3) показать, что данное выше определение стороны не зависит от того, на какие гладкие куски разложена поверхность.

§ 2. Площадь кривой поверхности

623. Пример Шварца. Понятие площади кривой поверхности имеет известную аналогию с понятием длины кривой линии. Длину (незамкнутой) дуги мы определяли как предел периметра вписанной в дугу ломаной — при условии, что длины всех ее сторон стремятся к нулю. В случае же кривой поверхности (тоже, скажем, незамкнутой) естественно было бы рассматривать вписанную в нее многогранную

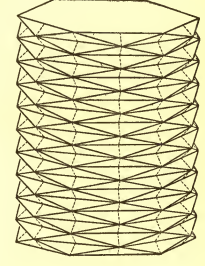
* Эта часть может состоять и из отдельных кусков.

поверхность и определять площадь кривой поверхности, как предел площади этой многогранной поверхности — при условии, что диаметры всех граней стремятся к нулю.

В конце прошлого столетия, однако, была обнаружена непригодность этого определения. Именно, Шварц (H. A. Schwarz) показал, что упомянутый предел не существует даже для простого случая поверхности прямого кругового цилиндра! Мы приведем этот поучительный пример.

Пусть дан такой цилиндр радиуса R и высоты H. Впишем в него многогранную поверхность следующим образом. Разделив высоту цилиндра на m равных частей, проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные к оси цилиндра, так что на его поверхности получится $m+1$ окружностей (включая сюда и окружности обоих оснований цилиндра). Каждую из этих окружностей разделим на n равных частей так, чтобы точки деления вышележащей окружности находились над серединами дуг нижележащей окружности.

Черт. 87.



Черт. 88.

Возьмем, далее, треугольники, образованные хордами всех этих дуг и отрезками, соединяющими концы хорд с теми точками деления выше- и нижележащих окружностей, которые расположены как раз над или под серединами соответствующих дуг (черт. 87). В своей совокупности эти $2mn$ равных треугольников и образуют нужную нам многогранную поверхность ($\sum_{m,\,n}$); модель ее представлена на черт. 88.

Подсчитаем теперь площадь σ каждого из треугольников. За основание примем хорду, длина которой равна

$$2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

Для нахождения высоты AB треугольника (см. черт. 87) заметим, что $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, где

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

Таким образом, площадь одного треугольника равна

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

а площадь всей многогранной поверхности будет

$$\Sigma_{m,n}=2mn\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

Когда m и n неограниченно возрастают, то диаметры всех треугольников стремятся к нулю, но площадь $\Sigma_{m,n}$ предела не имеет. В самом деле, допустим, что m и n возрастают так, что отношение $\frac{m}{n^2}$ стремится к определенному пределу q:

$$\lim\frac{m}{n^2}=q.$$

Имеем

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n}=\pi,$$

а с другой стороны, в силу сделанного допущения,

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}=\lim\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}q.$$

Следовательно,

$$\lim\Sigma_{m,n}=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+H^2},$$

и мы видим, что предел этот существенно зависит от величины q, т. е. от способа одновременного возрастания m и n. При $q=0$, и только в этом случае, названный предел равен $2\pi RH$ (величине площади, выведенной в школьном курсе геометрии), но вместе с q он может равняться даже бесконечности. Таким образом, при независимом друг от друга возрастании чисел m и n до бесконечности для площади $\Sigma_{m,n}$ определенного предела, действительно, не существует, и поверхность цилиндра, если стоять на точке зрения упомянутого определения, оказывается лишенной площади.

Важно дать себе отчет в том, чем отличается положение вещей в случае ломаной, вписанной в кривую, и в случае многогранной поверхности, вписанной в кривую поверхность. Будем для простоты считать кривую и кривую поверхность, о которых идет речь, гладкими. Тогда лишь только хорды, составляющие ломаную, достаточно малы, направление каждой из них сколь угодно мало разнится от

направления касательной в любой точке соответствующей дуги. Поэтому такая бесконечно малая хорда и может со все возрастающей точностью служить заменой соответствующего элемента дуги. Напротив, сколь угодно малая многоугольная площадка, вершины которой лежат на кривой поверхности, может оказаться вовсе не близкой по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности; в таком случае заменять элемент поверхности она, понятно, не может. Это обстоятельство прекрасно иллюстрируется только что рассмотренным примером: касательные плоскости к цилиндрической поверхности все вертикальны, а треугольные грани вписанной поверхности при большом q становятся почти горизонтальными, образуя мелкие складки.

624. Определение площади кривой поверхности. Все сказанное приводит к мысли наперед потребовать от вписанной в данную кривую поверхность многогранной поверхности не только того, чтобы диаметры ее граней стремились к нулю, но и того, чтобы расположение этих граней в пространстве безгранично приближалось к расположению касательных плоскостей к поверхности.

Однако полное осуществление этой мысли далеко не просто, и мы вынуждены от него отказаться [ср. n° **627**]. Мы дадим определение понятия *площадь кривой поверхности,* основанное на другой идее, впрочем, тоже представляющейся вполне естественной.

Мы будем рассматривать незамкнутую гладкую поверхность (S), ограниченную кусочно-гладким контуром (L). Представим себе эту поверхность разложенной с помощью сети кусочно-гладких кривых на части

$$(S_1),\ (S_2),\ \ldots,\ (S_n)$$

и в каждой части (S_i) произвольно выберем по точке M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Спроектировав ортогонально элемент (S_i) на касательную плоскость к поверхности в точке M_i, мы получим в проекции плоскую фигуру (T_i) с площадью T_i.

Назовем площадью поверхности (S) *предел* S *суммы этих площадей* T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *при условии, что диаметры всех элементов* (S_i) *стремятся к нулю.*

Если через λ обозначить наибольший из упомянутых диаметров, то можно написать

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i T_i.$$

Читатель легко восстановит точную характеристику этого предельного процесса как на «языке ε-δ», так и на «языке последовательностей».

Поверхность, имеющая площадь, называется *квадрируемой.*

625. Замечание. Для того чтобы сформулированное определение получило точный смысл, мы установим следующее вспомогательное утверждение:

Каждая часть (S') поверхности (S) с достаточно малым диаметром проектируется на касательную плоскость в любой точке M' этой части взаимно однозначно.

Таким образом, если диаметры всех элементов (S_i) поверхности, о которых была речь в предыдущем n°, достаточно малы, то их проекции (T_i) на соответствующие касательные плоскости представляют собою вполне определенные плоские фигуры, ограниченные кусочно-гладкими кривыми и заведомо квадрируемые: сумма $\sum T_i$ имеет смысл.

Перейдем к доказательству. Пусть поверхность (S) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v), \tag{1}$$

где (u, v) изменяется в области (Δ), ограниченной кусочно-гладким контуром (Λ), на плоскости uv. При этом пусть между точками (S) и (Δ) установлено взаимно однозначное соответствие, и точкам контура (Λ) отвечают точки контура (L) поверхности.

Для устранения некоторых трудностей, связанных с точками контура, удобно заранее распространить функции (1) с сохранением их дифференциальных свойств [261] на некоторую более широкую область $(\tilde{\Delta})$, с тем, чтобы получить гладкую же поверхность $(\tilde{S})$, служащую как бы продолжением поверхности (S).

Каждую точку M_0 поверхности (S) можно окружить таким куском (s) поверхности (S) [или $(\tilde{S})$, если речь о точке контура], чтобы этот кусок выражался явным уравнением одного из трех типов [228] и притом проектировался на соответствующую координатную плоскость в некоторый круг. Можно предположить, сверх того, что нормали в двух точках (s) никогда не оказываются взаимно перпендикулярными (этого легко добиться уменьшением диаметра области). Тогда мы утверждаем, что *кусок (s) поверхности проектируется на касательную плоскость в любой его точке M взаимно однозначно.*

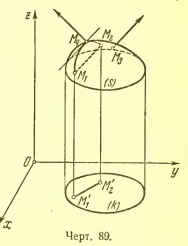
Для доказательства допустим противное. В таком случае найдутся на (s) три точки M_1, M_2, M_3 такие, что хорда M_1M_2 будет параллельна нормали к поверхности в точке M_3 (черт. 89). Пусть при этом сама поверхность (s) выражается, скажем, явным уравнением вида

$$z = f(x, y),$$

где точка (x, y) на плоскости xy описывает круг (k). Проведем через хорду M_1M_2 плоскость, параллельную оси z; она пересечет нашу поверхность (s) по некоторой дуге $\smile{M_1M_2}$*. Как мы знаем [112, 114],

* Здесь играет роль то обстоятельство, что отрезок $M_1'M_2'$, в который проектируется хорда M_1M_2 на плоскость xy, целиком принадлежит кругу (k).

на этой дуге найдется точка M_4, в которой касательная параллельна хорде. Но тогда нормаль к поверхности в точке M_4, наверное, будет перпендикулярна к этой хорде, а значит, и к нормали в точке M_3, что противоречит допущению, и т. д.



Черт. 89.

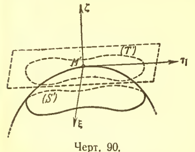
Для того чтобы, опираясь на это, доказать теперь высказанное вначале утверждение, мы поступим так. Для каждой точки M_0 поверхности (S) заменим упомянутую выше ее «окрестность» (s) более узкой «окрестностью» (s') так, чтобы контуры их не имели общих точек. Точке M_0 и куску поверхности (s') на плоскости uv отвечают точка m_0 и ее окрестность (δ'); ничто не мешает не причислять к (s') и (δ') их контуров, т. е. считать их открытыми. Применив к системе $\{(\delta')\}$ открытых областей, покрывающих всю область (Δ), лемму Бореля [175], мы выделим конечное покрытие, а, возвращаясь к поверхности (S), отсюда уже легко получить конечное число кусков

$$(s_1'),\ (s_2'),\ \ldots,\ (s_m'),$$

в совокупности покрывающих всю поверхность (S). Наряду с ними рассмотрим и соответственные более широкие области, упомянутые вначале:

$$(s_1),\ (s_2),\ \ldots,\ (s_m).$$

Возьмем для каждого i точную нижнюю границу расстояний точек куска (s_i') от точек части $(S)-(s_i)$ поверхности и обозначим через η наименьшее из этих чисел. Пусть диаметр части (S') нашей поверхности меньше числа η. Если какая-либо ее точка попадает в некоторое определенное (s_i'), то вся часть (S') целиком содержится в соответственном (s_i) и, следовательно, вместе с (s_i) обладает требуемым свойством.



Черт. 90.

626. Существование площади поверхности и ее вычисление. Покажем, что при сделанных выше предположениях поверхность (1) квадрируема, и установим удобную формулу для вычисления ее площади.

Пусть (S') — какая-либо часть (S), обладающая тем свойством, которое сформулировано в начале предыдущего n°, а $M'(x', y', z')$ —

любая ее точка. Перенеся начало координат в эту точку, перейдем к новой системе координат $\xi\eta\zeta$: именно, за плоскость $\xi\eta$ возьмем касательную плоскость к поверхности в точке M', а за ось ζ — соответственную нормаль (черт. 90). Формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} \xi=(x-x')\cos\alpha_1+(y-y')\cos\beta_1+(z-z')\cos\gamma_1, \\ \eta=(x-x')\cos\alpha_2+(y-y')\cos\beta_2+(z-z')\cos\gamma_2, \end{cases}$$
$$\zeta=(x-x')\cos\lambda'+(y-y')\cos\mu'+(z-z')\cos\nu',$$

где $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu'$ означают углы между новыми и старыми координатными осями, в соответствии с таблицей

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	λ'	μ'	ν'

Так как (S') проектируется на плоскость $\xi\eta$ в некоторую область (T') взаимно однозначно, а, с другой стороны, точки (S') связаны взаимно однозначным соответствием с точками некоторой части (Δ') области (Δ), то и между точками (T') и (Δ') имеет место такое же соответствие. Оно осуществляется первыми двумя из формул преобразования, если под x, y, z разуметь функции (1). Пользуясь выражением площади в криволинейных координатах [605], имеем

$$T'=\iint\limits_{(\Delta')}\left|\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\right|du\,dv. \tag{2}$$

Но якобиан

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}=$$
$$=\begin{vmatrix} x'_u\cos\alpha_1+y'_u\cos\beta_1+z'_u\cos\gamma_1 & x'_v\cos\alpha_1+y'_v\cos\beta_1+z'_v\cos\gamma_1 \\ x'_u\cos\alpha_2+y'_u\cos\beta_2+z'_u\cos\gamma_2 & x'_v\cos\alpha_2+y'_v\cos\beta_2+z'_v\cos\gamma_2 \end{vmatrix}$$

есть определитель, отвечающий произведению матриц

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{pmatrix},$$

и по известной теореме алгебры равен сумме произведений соответствующих определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix} = A\cos\lambda' + B\cos\mu' + C\cos\nu'.$$

Мы воспользовались здесь тем, что алгебраические дополнения элементов определителя

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \end{vmatrix} = 1$$

в точности равны самим элементам. Это следует, например, из того, что каждый из координатных ортов

$$(\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1),\qquad (\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2),\qquad (\cos\lambda',\ \cos\mu',\ \cos\nu')$$

представляет собой векторное произведение двух других [ср. **664** (2)].

С другой стороны, если через A', B', C' обозначить значения определителей A, B, C в точке M', то

$$\cos\lambda' = \frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\quad \cos\mu' = \frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\cos\nu' = \frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

(знак берется во всех случаях один и тот же). Поэтому

$$\left|\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Справа мы имеем непрерывную функцию четырех независимых переменных u, v, u', v' в области $(\Delta)\times(\Delta)$*. При $u'=u$, $v'=v$ она обращается в

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

и отличается от этого выражения на величину $\alpha=\alpha(u, v, u', v')$, которая ввиду равномерной непрерывности упомянутой функции, лишь только расстояние точек (u, v) и (u', v') достаточно мало, становится произвольно малой независимо от положения точки (u', v').

Тогда из (2) получается

$$T' = \iint\limits_{(\Delta')} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv + \varepsilon'\Delta',$$

* Так мы обозначаем четырехмерную область точек (u, v, u', v'), для которых (u, v) и (u', v') по отдельности принадлежат двумерной области (Δ).

где ε' бесконечно мало одновременно с диаметром Δ' или, если угодно, одновременно с диаметром S'. Применив этот результат к каждой из частей (S_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, на которые мы разлагаем поверхность (S), мы придем к ряду равенств подобного же типа

$$T_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv + \varepsilon_i \Delta_i;$$

здесь (Δ_i) есть соответствующая (S_i) часть области (Δ). Суммируем:

$$\sum_i T_i = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv + \varepsilon,$$

где величина

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \Delta_i,$$

очевидно, будет бесконечно малой одновременно с λ. Таким образом, для $\sum\limits_i T_i$ при $\lambda \to 0$ действительно существует предел

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv, \tag{3}$$

который по определению и есть *площадь поверхности*.

Если матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

«возвести в квадрат» и составить определитель

$$\begin{vmatrix} x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{vmatrix},$$

то по известной теореме алгебры он окажется равным именно $A^2 + B^2 + C^2$. Обычно полагают

$$x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = E, \quad x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F,$$
$$x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = G$$

— это так называемые *гауссовы коэффициенты* поверхности, играющие важную роль в дифференциальной геометрии. В этих обозначениях

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

так что формула (3) может быть написана и так:

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{3*}$$

Выражение

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \equiv \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{4}$$

называют *элементом площади в криволинейных координатах.*

Мы ограничивались до сих пор случаем незамкнутой гладкой поверхности. Если поверхность не подходит под этот случай, но разлагается на конечное число незамкнутых гладких кусков, то ее площадью назовем сумму площадей отдельных кусков. При этом легко показать, что так определенная площадь на деле не зависит от того, как данная поверхность разложена на куски нужного типа. Если вся данная поверхность характеризуется параметрическими уравнениями, то площадь ее в указанном общем случае по-прежнему выражается формулой (3) или (3*).

Остановимся в заключение на том простейшем частном случае, когда поверхность (S) задается явным уравнением

$$z=f(x, y),$$

где (x, y) изменяется в области (D) на плоскости xy. Переменные x и y играют роль параметров u и v. Полагая, как обычно,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

по матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

составляем определители $A=-p$, $B=-q$, $C=1$, так что в рассматриваемом случае

$$S=\iint\limits_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \tag{5}$$

Вспоминая, что для острого угла ν нормали с осью z будет

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

можно написать формулу для площади и так:

$$S=\iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{\cos\nu}. \tag{5a}$$

Наконец, если не требовать специально, чтобы угол ν был острым, то

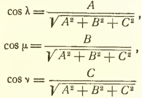
$$S=\iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{|\cos\nu|}. \tag{5б}$$

[Ср. формулу (7) n° 544 для длины дуги кривой, заданной явным уравнением $y=f(x)$.]

627. Подход через вписанные многогранные поверхности. Хотя мы и отказались от мысли положить в основу самого определения понятия площади кривой поверхности вписанные в нее многогранные поверхности, но сейчас мы вернемся к этому и покажем, по крайней мере, как можно строить вписанные многогранные поверхности, площади которых заведомо стремятся к площади данной кривой поверхности.

Мы займемся, в основном, случаем, когда область (Δ) представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

Выберем определенную сторону поверхности (S) и тем самым установим положительное направление обхода ее контура. Можно считать, что это направление соответствует положительному обходу контура прямоугольника (Δ). Мы знаем [621], что при этих условиях направляющие косинусы нормали к поверхности задаются формулами



$$\cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

с положительным значением радикала.

Черт. 91.

Разложим теперь прямоугольник (Δ) с помощью параллелей его сторонам на частичные прямоугольники, а затем каждый из них диагональю разложим еще на два прямоугольных треугольника (черт. 91, *а*). Таким образом мы осуществим триангуляцию области (Δ). Пусть одним из элементарных треугольников будет $\triangle\, m_0m_1m_2$ с вершинами в точках

$$m_0(u_0,\ v_0),\quad m_1(u_0+h,\ v_0),\quad m_2(u_0,\ v_0+k),$$

где h и k — числа одного знака. На поверхности (S) им отвечают точки

$$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0),\quad M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad M_2(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

определяющие в пространстве некоторый $\triangle\, M_0M_1M_2$ (черт. 91, *б*). Из всех таких треугольников составится многогранная поверхность (Σ), вписанная в (S); ее мы и будем рассматривать. Если обход контура каждого такого треугольника производить именно в направлении $M_0M_1M_2M_0$, что отвечает положительному обходу контура треугольника $\triangle\, m_0m_1m_2$, то этим определится сторона многогранной поверхности (Σ), в согласии с условиями, установленными в п° 622.

Если $\triangle\, M_0M_1M_2$ спроектировать на плоскость xy, то получится $\triangle\, N_0N_1N_2$ с вершинами в точках

$$N_0(x_0,\ y_0),\quad N_1(x_1,\ y_1),\quad N_2(x_2,\ y_2).$$

Площадь этого последнего треугольника по величине и по знаку (с учетом его ориентации!) выразится, как известно из аналитической геометрии, определителем

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}.$$

По формуле конечных приращений

$$x_1 - x_0 = x(u_0+h,\ v_0) - x(u_0,\ v_0) = x'_u(u_0+\theta h,\ v_0)\cdot h =$$
$$= [x'_u(u_0,\ v_0) + \varepsilon_1]\cdot h,$$

где величина ε_1 произвольно мала вместе с h, независимо от положения точки (u_0, v_0) *. Точно так же

$$y_1 - y_0 = (y'_u + \varepsilon_2)\cdot h,$$
$$x_2 - x_0 = (x'_v + \varepsilon_3)\cdot k, \quad y_2 - y_0 = (y'_v + \varepsilon_4)\cdot k,$$

где все производные вычислены при $u = u_0$, $v = v_0$, а буквой ε со значками здесь (и впредь) обозначаются величины, произвольно малые вместе с h и k, независимо от положения точки (u_0, v_0). Теперь величина σ_{xy} может быть переписана в виде

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} hk \begin{vmatrix} x'_u + \varepsilon_1 & y'_u + \varepsilon_2 \\ x'_v + \varepsilon_3 & y'_v + \varepsilon_4 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} hk (C + \varepsilon_5) = (C + \varepsilon_5)\cdot\delta, \tag{6}$$

где δ есть площадь $\triangle m_0m_1m_2$. Аналогично получим и для проекций на другие координатные плоскости:

$$\sigma_{yz} = (A + \varepsilon_6)\cdot\delta, \quad \sigma_{zx} = (B + \varepsilon_7)\cdot\delta. \tag{6a}$$

Площадь σ самого $\triangle M_0M_1M_2$ вычислится теперь по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2},$$

и для нее легко получить выражение

$$\sigma = \left\{ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \varepsilon_8 \right\}\cdot\delta. \tag{7}$$

Нетрудно сообразить, что отношения

$$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma}, \quad \frac{\sigma_{zx}}{\sigma}, \quad \frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$$

выразят направляющие косинусы нормали к плоскости треугольника $\triangle M_0M_1M_2$ в соответствии с его ориентацией. Ввиду (6), (6a) и (7), они при h и $k \to 0$ стремятся к направляющим косинусам (5) нормали к поверхности, и притом равномерно для всех граней. Очевидно также, что при указанном предельном переходе и диаметры всех граней поверхности (Σ) равномерно стремятся к нулю, что и требовалось доказать.

Наконец, суммируя равенства вида (7), легко усмотреть, что площадь многогранной поверхности (Σ)

$$\Sigma = \sum \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\delta + \sum \varepsilon_8\cdot\delta$$

при h и $k \to 0$ стремится именно к площади (3) кривой поверхности.

Эти построения естественно распространяются на случай, когда область (Δ) составлена из прямоугольников. Триангуляция же произвольной области потребовала бы довольно кропотливых (хотя и вполне элементарных) соображений; на этом мы останавливаться не будем.

628. Особые случаи определения площади. Пусть снова задана гладкая поверхность без кратных точек. Она имеет площадь (S), выражаемую формулой (3) или (3*). Представим себе, что на поверхности (S) выделена некоторая ее часть (s), ограниченная кусочно-гладкой кривой (l); ей в области

* Мы используем здесь равномерную непрерывность производной x'_u. Аналогичные соображения приложимы и в дальнейшем.

(Δ) отвечает часть ее (δ), ограниченная также кусочно-гладкой кривой (λ). Площадь части (S') поверхности, полученной выделением фигуры (s), и площадь самой фигуры (s), очевидно, будут равны, соответственно,

$$S' = \iint\limits_{(\Delta)-(\delta)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \quad s = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Если фигура (s) на поверхности будет теперь стягиваться в точку или в линию, то это же будет происходить и с плоской фигурой (δ), и площадь ее δ будет стремиться к нулю. С нею будет стремиться к нулю и s, так что

$$\lim S' = S. \tag{8}$$

Представим себе теперь, что та же поверхность задана иным представлением:

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*),$$

при котором в отдельной точке или вдоль отдельной линии появляется «особенность» (в частности, обращаются в бесконечность производные фигурирующих в этом представлении функций). Выделив эту точку или линию с помощью ее окрестности (s), площадь (S') остающейся части выразим, как обычно:

$$S' = \iint\limits_{(\Delta^*)-(\delta^*)} \sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du^*\,dv^*,$$

если звездочкой отмечать все величины, относящиеся ко второму представлению. Но мы уже знаем [см. (8)], что — при стягивании (s) в упомянутую точку или линию — S' должна стремиться к S; следовательно, для получения S мы можем перейти к пределу в предшествующей формуле, стягивая в точку или в линию область δ^*. Но тогда снова получится формула обычного вида

$$S = \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du^*\,dv^*,$$

лишь интеграл может оказаться несобственным.

Даже в том случае, когда поверхность (S), вообще гладкая, имеет в отдельной точке или вдоль отдельной линии неустранимую, т. е. не зависящую от способа ее представления, особенность, мы все же будем пользоваться интегралом (3*), если только он существует, хотя бы как несобственный, для выражения ее площади. Ясно, что при этом мы площадь S на деле определяем, как предел площади S', т. е. равенство (8), которое мы выше доказывали, здесь служит просто расширением нашего первоначального определения.

629. Примеры. 1) Найти площадь участка поверхности, вырезаемого:

(а) цилиндром $x^2+y^2=R^2$ $(x, y>0)$ из гиперболического параболоида $z=xy$;

(б) цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ из эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$;

(в) цилиндром $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ из гиперболического параболоида $xy=az$;

(г) цилиндром $x^2+y^2=\rho^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(\rho<R)$.

(а) Решение. Имеем $p=y$, $q=x$, так что по формуле (5)

$$S = \iint\limits_{\substack{x,\ y\geq 0\\ x^2+y^2\leq R^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, найдем

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R r\sqrt{1+r^2}\,dr=\frac{\pi}{6}\left[(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

(б) Указание. Воспользоваться обобщенными полярными координатами. *Ответ.* $S=\frac{2}{3}\pi ab\,[(1+c^2)^{3/2}-1]$.

(в) Указание. Перейти к полярным координатам. Уравнение направляющей цилиндра в полярных координатах будет $r^2=a^2\sin 2\theta$. Получим

$$S=\frac{2}{3}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}-1\right]d\theta.$$

Подстановка $\theta=\frac{\pi}{4}+\lambda\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\lambda\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ. $S=\frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

(г) *Ответ.* $S=4\pi R\,(R-\sqrt{R^2-\rho^2})$.

2) Найти площадь частей сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, вырезанных из нее цилиндром $x^2+y^2=Rx$ (верхнего и нижнего оснований «тела Вивиани», см. **597**, 20), черт. 48).

Решение. Имеем для верхнего основания

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

и, следовательно,

$$S=2R\iint\limits_{(D)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

причем областью интегрирования служит круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=Rx$.

Переходя к полярным координатам, получим [ср. **611**, 6)]:

$$S=2R\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Выполняя интегрирование, окончательно найдем $S=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Так как площадь поверхности полусферы равна $2\pi R^2$, то площадь той части полусферы, которая остается по выделении «тела Вивиани», будет равна $4R^2$ и, следовательно, выражается через радиус R без привлечения каких-либо иррациональностей; ср. в связи с этим замечание, сделанное в n° **597**, 20) по поводу формулы для объема «тела Вивиани».

Замечание. Конечно, можно было бы и не заменять интеграл по промежутку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ удвоенным интегралом по промежутку $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Но, вычисляя сразу интеграл от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, нужно помнить, что выражение внутреннего интеграла

$$\int\limits_0^{R\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R\cos\theta} = R - R\sqrt{\sin^2\theta}$$

нам придется писать в одном виде: $R(1-\sin\theta)$ для $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, и в другом: $R(1+\sin\theta)$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$ (ибо радикал всегда положителен, а синус имеет в одном случае знак плюс, а в другом знак минус). Не приняв этого во внимание, получили бы неправильный результат.

3) Найти площадь: (а) части поверхности конуса $y^2+z^2=x^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$; (б) части поверхности конуса $z^2=2xy$ $(x, y \geqslant 0)$, заключенной между плоскостями $x=a$ и $y=b$; (в) части той же поверхности, лежащей внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Указание. (а) $S = 8\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}} = 2\pi R^2$;

(б) $S = \sqrt{2}\int\limits_0^b dy \int\limits_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab}.$

(в) Пересечение поверхностей лежит в плоскостях $x+y=\pm a$. Далее,

$$S = 2\sqrt{2}\iint\limits_{\substack{x,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx\,dy =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^a \sqrt{x}\,dx \int\limits_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 8\sqrt{2}\int\limits_0^a \sqrt{x(a-x)}\,dx = \pi\sqrt{2}\cdot a^2.$$

4) Доказать, что площадь S любой фигуры, лежащей на одной (скажем верхней) полости конуса вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

пропорциональна площади ее проекции на плоскость xy.

Указание. Исходить из явного уравнения $z = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ и воспользоваться формулой (5).

5) Дана поверхность $z = \arcsin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)$; найти площадь ее части, содержащейся между плоскостями $x=a$ и $x=b$ $(0 < a < b)$.

Решение. Имеем

$$p=\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}, \qquad q=\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}}.$$

Область интегрирования определяется условиями

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad |\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y| \leqslant 1.$$

Сделаем подстановку $\operatorname{sh} x=\xi$, $\operatorname{sh} y=\eta$; тогда для новых переменных промежутками изменения будут

$$\operatorname{sh} a \leqslant \xi \leqslant \operatorname{sh} b, \quad -\frac{1}{\xi} \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{\xi}.$$

Таким образом,

$$S=\int_{\operatorname{sh} a}^{\operatorname{sh} b} d\xi \int_{-\frac{1}{\xi}}^{\frac{1}{\xi}} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}}=\pi \int_{\operatorname{sh} a}^{\operatorname{sh} b} \frac{d\xi}{\xi}=\pi \ln \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}.$$

6) Найти площадь поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (боковую поверхность «тела Вивиани»).

Решение. Уравнение передней части поверхности $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Область изменения независимых переменных (x, z) ограничена осью z и параболой $z=\sqrt{R^2-Rx}$. Так как

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}R-x}{\sqrt{Rx-x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}=0,$$

то

$$S=R\int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}} \frac{dz\,dx}{\sqrt{Rx-x^2}}=$$

$$=2R\sqrt{R}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}}=4R^2.$$

[Ср. 347, 4).]

Черт. 92.

7) Найти площадь боковой поверхности конуса высоты c, основанием которого служит эллипс с полуосями a и b $(a>b)$; высота проходит через центр основания.

Решение. Если начало координат взять в вершине конуса и плоскость xy провести параллельно основанию (черт. 92), то уравнение поверхности будет

$$z=c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

и искомая площадь

$$S=\iint\limits_{(E)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dx\,dy,$$

где (E) есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

и для краткости положено

$$\alpha=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a},\quad \beta=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}.$$

Переходя к обобщенным полярным координатам, получим

$$S=2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Результат легко приводится к полному эллиптическому интегралу второго рода:

$$S=2a\sqrt{b^2+c^2}\,E(k),\quad\text{где}\quad k=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}.$$

8) Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси x $(a\leqslant x\leqslant b,\ f(x)\geqslant 0)$.

Решение. Нетрудно сообразить, что уравнение поверхности вращения будет

$$y^2+z^2=[f(x)]^2,$$

а уравнение верхней половины ее

$$z=\sqrt{[f(x)]^2-y^2}.$$

Отсюда

$$p=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},\quad q=\frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=f(x)\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}.$$

Таким образом, искомая площадь выражается интегралом

$$S=2\iint\limits_{(D)}f(x)\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где область (D) на плоскости xy ограничена линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ и $y=-f(x)$.

Переходя к повторному интегралу, найдем

$$S=2\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\int\limits_{-f(x)}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},$$

и так как внутренний интеграл равен π, то получается уже известная нам формула [344. (22)]:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Как читатель, вероятно, и сам заметил, в задачах 2) — 8) мы все время имели дело с теми особыми случаями вычисления площадей, о которых была речь в n° 628.

9) Решить задачу 2), используя параметрическое представление сферической поверхности через сферические координаты:

$$x = R \sin\varphi \cos\theta, \quad y = R \sin\varphi \sin\theta, \quad z = R \cos\varphi$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

По матрице производных

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

легко найти гауссовы коэффициенты сферы:

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2\sin^2\varphi, \text{ так что } \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin\varphi.$$

Ограничимся рассмотрением четверти изучаемой поверхности, лежащей в первом октанте. Для точек «кривой Вивиани», т. е. кривой пересечения сферы и цилиндра (в пределах первого октанта), будет $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Действительно, подставляя выражения x и y через φ и θ в уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, получим $\sin\varphi = \cos\theta$, и так как для рассматриваемых точек, очевидно, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то отсюда и следует, что $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Установив, на основании сказанного, пределы изменения параметров φ и θ, получим по формуле (3*)

$$S = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \sin\varphi\, d\varphi = 4R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Как видим, мы пришли к известному уже результату, избежав на этот раз разрывов подинтегральной функции.

10) Рассмотрим так называемую *общую винтовую поверхность* [229, 5)], которая описывается кривою

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \qquad [\varphi(u) \geqslant 0]$$

(расположенной в плоскости xz) при винтовом движении ее вокруг оси z и вдоль оси z. Уравнения ее (если угол поворота обозначить через v) будут:

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u) + cv.$$

По матрице производных

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\sin v & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\sin v & \varphi(u)\cos v & c \end{pmatrix}$$

составляем гауссовы коэффициенты поверхности:

$$E = [\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2, \quad F = c \cdot \psi'(u), \quad G = [\varphi(u)]^2 + c^2.$$

Таким образом, выражение

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\{[\varphi(u)]^2+c^2\}\{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2\}-c^2[\psi'(u)]^2}$$

оказывается зависящим только от u, что, вообще говоря, упрощает вычисления.

11) Воспользоваться этими результатами для определения площади части (а) обыкновенной винтовой поверхности

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=cv,$$

вырезанной из нее цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0$ и $z=2\pi c$ (так что $0\leqslant v\leqslant 2\pi$);

(б) винтовой поверхности

$$x=\operatorname{tg}u\cos v,\quad y=\operatorname{tg}u\sin v,\quad z=\frac{\sin u}{2\cos^2 u}+\ln\sqrt{\frac{1+\sin u}{\cos u}}+v,$$

отвечающей изменению параметров в прямоугольнике

$$0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi.$$

(а) Решение. В данном случае

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+c^2},$$

так что

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^a\sqrt{u^2+c^2}\,du\,dv=2\pi\left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right].$$

(б) *Ответ.* $S=\frac{8}{3}\pi$.

12) Если в задаче о винтовом движении кривой положить $c=0$, так что поступательное движение отсутствует, то получится *поверхность вращения:*

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v,\quad z=\psi(u)$$
$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi).$$

Тогда

$$\sqrt{EG-F^2}=\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2},$$

и площадь этой поверхности выразится формулой

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}\,du.$$

Эта формула обобщает результат задачи 8), но не потребовала введения несобственных интегралов. [Ср. **344** (21).]

13) Оправдать выведенную в **346** [(25)] формулу для площади части цилиндрической поверхности, исходя из общей формулы (3*).

14) Иногда бывает удобно задавать поверхность в полярных или сферических координатах r, θ, φ, которые с обыкновенными прямоугольными координатами связаны известными формулами:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$
$$(r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

При этом предполагается, что полярный радиус-вектор r задан в виде функции от углов φ и θ:

$$r=r(\varphi,\theta)$$

(*полярное уравнение* поверхности). Найти выражение площади кривой поверхности для этого случая.

Решение. Можно воспользоваться общим выражением (3*), но лишь в качестве параметров взять φ и θ. Написанные выше формулы как раз и дают параметрическое представление поверхности, если мыслить, что вместо r подставлено его выражение через φ и θ из полярного уравнения поверхности.

По матрице производных

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\theta & \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\sin\theta & \frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\varphi & \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\sin\varphi & \frac{\partial r}{\partial \theta}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

легко составить

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2, \quad F = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad G = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi,$$

$$EG - F^2 = \left[\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right]r^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r\,d\varphi\,d\theta, \tag{9}$$

где (Δ) есть область изменения аргументов φ, θ.

Элемент площади в сферических координатах будет таков:

$$dS = \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \cdot r\,d\varphi\,d\theta.$$

15) Вычислить площадь поверхности

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy.$$

Решение. Здесь как раз удобно использовать формулу (9). Полярное уравнение поверхности:

$$r = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}.$$

Тогда

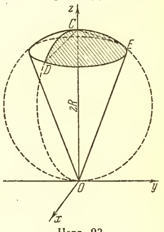
$$\sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

и по формуле (9) получим

$$S = 4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi\,d\theta = \frac{1}{2}\pi^2a^2.$$

16) Рассмотрим сферическую поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$



Черт. 93.

радиуса R, касающуюся в начале координат плоскости xy. Требуется найти площадь ее части, содержащейся внутри конуса $z^2 = Ax^2 + By^2$, с вершиной в начале (черт. 93).

Решение. Воспользуемся и здесь формулой (9), исходя из полярного уравнения сферы: $r=2R\cos\varphi$. Имеем

$$S=\iint_{(\Delta)} 4R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta,$$

где область (Δ) интегрирования по φ и θ ограничена кривою

$$(A\cos^2\theta+B\sin^2\theta)\sin^2\varphi=\cos^2\varphi.$$

Если свести дело к определению площади той части поверхности, которая лежит в первом октанте, то при любом θ между 0 и $\frac{\pi}{2}$ угол φ изменяется от 0 до угла $\varphi_0=\varphi_0(\theta)$, для которого

$$\operatorname{tg}^2\varphi_0=\frac{1}{A\cos^2\theta+B\sin^2\theta}.$$

Очевидно,

$$S=16R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Но

$$\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\sin^2\varphi_0=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+A\cos^2\theta+B\sin^2\theta},$$

и окончательно

$$S=8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(A+1)\cos^2\theta+(B+1)\sin^2\theta}=\frac{4\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}.$$

Любопытно, что эта площадь совпадает с площадью эллипса, имеющего полуосями хорды DC и EC (см. чертеж).

17) Доказать, что площадь поверхности

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2$$

совпадает с площадью поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если взять

$$a=\frac{\beta\gamma}{\alpha},\quad b=\frac{\gamma\alpha}{\beta},\quad c=\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Доказательство. В сферических координатах уравнение поверхности:

$$r^2=\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\varphi,$$

и по формуле (9) площадь ее равна

$$S_1=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\alpha^4\cos^2\theta+\beta^4\sin^2\theta)\sin^2\varphi+\gamma^4\cos^2\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta.$$

С другой стороны, если исходить из обычного параметрического представления эллипсоида:

$$x = a \sin\varphi\cos\theta,\ y = b \sin\varphi\sin\theta,\ z = c\cos\varphi$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

то определители матрицы производных окажутся равными

$$A = cb\sin^2\varphi\cos\theta,\ B = ac\sin^2\varphi\sin\theta,\ C = ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

и по формуле (3) площадь поверхности эллипсоида выразится так:

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(c^2b^2\cos^2\theta + c^2a^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi + a^2b^2\cos^2\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta.$$

Мы видим, что выражения для S_1 и S действительно отождествляются, если положить

$$cb = \alpha^2,\quad ca = \beta^2,\quad ab = \gamma^2$$

или

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha},\quad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta},\quad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

что и требовалось доказать.

18) Определим теперь площадь поверхности трехосного эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0).$$

Переписав для первого октанта уравнение поверхности в явном виде:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

будем иметь:

$$p = -c\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},\quad q = -c\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

так что

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Положим для краткости

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2,\quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \beta^2,$$

тогда искомая площадь выразится, по формуле (5), интегралом

$$S = 8\iint\limits_{\substack{x,\,y \geqslant 0\\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2\frac{x^2}{a^2} - \beta^2\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy.$$

Путем подстановки $\frac{x}{a}=\xi$, $\frac{y}{b}=\eta$ преобразуем его к виду:

$$S=8ab\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geq 0\\ \xi^2+\eta^2\leq 1}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\,d\xi\,d\eta.$$

Желая использовать здесь формулу преобразования двойного интеграла, принадлежащую Каталану [см. **597**, 15) и **617**, 16)], заметим, что кривая

$$\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}=u=\text{const.}\quad (u\geq 1)$$

есть не что иное, как эллипс

$$\frac{\xi^2}{\dfrac{u^2-1}{u^2-\alpha^2}}+\frac{\eta^2}{\dfrac{u^2-1}{u^2-\beta^2}}=1,$$

так что четверть его площади

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geq 0\\ \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\leq u}} d\xi\,d\eta=\frac{\pi}{4}\,\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}.$$

Тогда, по формуле Каталана,

$$S=2\pi ab\int\limits_1^{\infty} u\,d\,\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}.$$

Займемся преобразованием этого эллиптического интеграла.

Прежде всего проинтегрируем по частям*:

$$\int\limits_1^{+\infty} u\,d\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}=$$

$$=\left\{\frac{u(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}-\int\frac{(u^2-1)\,du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}\right\}\Bigg|_1^{+\infty}.$$

Затем выполним подстановку

$$u=\frac{\alpha}{\sin\varphi},\quad du=-\frac{\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

изменяя φ от $\mu=\arcsin\alpha$ до 0. Тогда, с одной стороны,

$$\frac{u(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}=\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

* Заметим, что здесь ни двойная подстановка от внеинтегрального члена, ни определенный интеграл от 1 до $+\infty$ в отдельности не имеют смысла. Налицо, при $u=+\infty$, неопределенность вида $\infty-\infty$!

если положить $k=\frac{\beta}{\alpha}$ $(k<1)$. С другой же,

$$-\frac{(u^2-1)\,du}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}=\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2\varphi}-1\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}-\frac{1-\beta^2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi=$$
$$=\left(\alpha\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi,$$

так что интеграл под знаком двойной подстановки представится в виде

$$\alpha\int\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,d\varphi-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Интегрируя в первом члене по частям, последовательно преобразуем это выражение так:

$$-\alpha\operatorname{ctg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-k^2\alpha\int\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi-$$
$$-\frac{1-\beta^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=-\alpha\operatorname{ctg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int\frac{1-k^2\alpha^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=-\alpha\operatorname{ctg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-$$
$$-\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\alpha\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Затем объединяем оба внеинтегральных члена:

$$\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\alpha\operatorname{ctg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=$$
$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2\cos^2\varphi-1)\sin\varphi\,^*}{\alpha\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Двойная подстановка по φ от $\mu=\arcsin\alpha$ до 0 дает для этого выражения такой результат: $\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$. Учитывая двойную подстановку и для интегралов, окончательно получим формулу

$$S=2\pi ab\left\{\sqrt{1-\alpha^2}\quad\sqrt{1-\beta^2}+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}F(\mu,k)+\alpha E(\mu,k)\right\}=$$
$$=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\{c^2F(\mu,k)+(a^2-c^2)E(\mu,k)\},$$

данную впервые Лежандром. Здесь

$$\mu=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\qquad k=\frac{a}{b}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

19) Гаусс ввел для поверхностей понятие *полной кривизны* в данной точке, совершенно аналогичное понятию кривизны для плоских кривых [250].

* Этим мы, наконец, уничтожаем ту неопределенность при $\varphi=0$, которая отмечалась выше.

Пусть дана поверхность и на ней точка. Возьмем любую часть (S) поверхности, окружающую эту точку, и рассмотрим всю совокупность нормалей в различных точках (S). Описав вокруг начала сферу радиусом единица, станем проводить из начала лучи, параллельные упомянутым нормалям; они вырежут на поверхности сферы некоторую ее часть (Σ). Площадь ее Σ есть мера телесного угла, заполненного всеми проведенными лучами; это — аналог угла ω, о котором была речь в определении, данном в n° 250. *Предел отношения* $\frac{\Sigma}{S}$ *при стягивании* (S) *в данную точку и называется полной кривизной поверхности в этой точке.* Поставим себе задачей вычислить его.

Предположим, что поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

причем функция f имеет непрерывные производные первого и второго порядков

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

и, кроме того, определитель

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = rt - s^2 \tag{10}$$

отличен от нуля (в рассматриваемой точке и вблизи нее).

По формуле (5б) имеем

$$S = \iint\limits_{(D)} \frac{dx\, dy}{|\cos \nu|}, \quad \Sigma = \iint\limits_{(D')} \frac{dx'\, dy'}{|\cos \nu|},$$

где (D) — проекция (S), а (D') — проекция (Σ) на плоскость xy, угол же ν для соответствующих точек (x, y, z) и (x', y', z') обеих поверхностей один и тот же.

Преобразуем второй интеграл к переменным x, y. Так как, очевидно,

$$x' = \cos \lambda = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad y' = \cos \mu = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\left(z' = \cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right),$$

то

$$\frac{D(x', y')}{D(p, q)} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Если учесть еще (10), то окончательно получим

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

В таком случае, по формуле замены переменных:

$$\Sigma = \iint\limits_{(D)} \frac{|rt - s^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2} \frac{dx\, dy}{|\cos \nu|}.$$

Дифференцируя как S, так и Σ по области (D) [593], легко получить теперь, что

$$\lim_{(S) \to M} \frac{\Sigma}{S} = \frac{|rt - s^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Это и есть искомое выражение для полной кривизны.

20) Формула (5б) может быть весьма просто получена, если исходить — для случая явного задания поверхности (S) — из другого определения площади кривой поверхности.

Разложим поверхность (S) на части (S_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$; в соответствии с этим ее проекция (D) на плоскость xy разложится на части (D_i). В некоторой точке (M_i) площадки (S_i) проведем к поверхности касательную плоскость и спроектируем площадку (S_i) на эту плоскость параллельно оси z. Обозначая через T_i площадь полученной плоской фигуры, очевидно, будем иметь

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|,$$

если ν_i есть угол нормали к поверхности в точке M_i с осью z. *Если под площадью S поверхности разуметь предел суммы площадей именно этих плоских фигур*, то сразу придем к результату

$$S = \lim \sum_i T_i = \lim \sum_i \frac{D_i}{|\cos \nu_i|} = \iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{|\cos \nu|},$$

поскольку написанная сумма явно представляет собой интегральную сумму для последнего интеграла.

Подчеркнем, что измененное определение площади кривой поверхности, хотя и весьма просто приводит здесь к окончательной формуле, имеет существенный недостаток: оно формально связано с выбором координатного триедра (проектирование параллельно оси z!) и приложимо лишь к частному типу поверхностей.

21) Пусть от параметрического задания

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \text{ из } (\Delta))$$

гладкой поверхности (S) с помощью формул*

$$u = U(u^*, v^*), \quad v = V(u^*, v^*) \qquad ((u^*, v^*) \text{ из } (\Delta^*))$$

мы переходим к другому ее представлению

$$x = x^*(u^*, v^*), \quad y = y^*(u^*, v^*), \quad z = z^*(u^*, v^*),$$

в котором она также не имеет особенностей. Легко показать непосредственно, что формула (3) для площади (S) поверхности преобразуется при этом в аналогичную же формулу

$$S = \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2} + B^{*2} + C^{*2}}\, du^*\, dv^*$$

(все величины, относящиеся к новому представлению, мы отмечаем звездочками).

Действительно, полагая

$$I = \frac{D(u, v)}{D(u^*, v^*)},$$

имеем по известному свойству функциональных определителей

$$A^* = AI, \quad B^* = BI, \quad C^* = CI.$$

* Функции U и V предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными.

Отсюда, между прочим, ясно, что I в (Δ^*) отлично от нуля, ибо иначе поверхность в новом представлении имела бы особенности. Теперь по формуле замены переменных сразу получаем

$$\iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv = \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot |I|\, du^*\, dv^* =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\, du^*\, dv^*,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Поверхностные интегралы первого типа

630. Определение поверхностного интеграла первого типа. Поверхностные интегралы первого типа представляют собой такое же естественное обобщение двойных интегралов, каким криволинейные интегралы первого типа являются по отношению к простым определенным интегралам.

Строится это обобщение так. Пусть в точках некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности (S), ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M)=f(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S) с помощью сети произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части (S_1), (S_2), ..., (S_n). Взяв в каждой части (S_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ по произволу точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим в этой точке значение функции

$$f(M_i)=f(x_i, y_i, z_i)$$

и, умножив его на площадь S_i соответствующей части поверхности, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, S_i,$$

которую мы будем называть — по сходству со многими ранее рассмотренными суммами — интегральной суммой.

Конечный предел этой интегральной суммы при стремлении диаметров всех частей (S_i) к нулю *называется поверхностным интегралом первого типа** *от функции* $f(M)=f(x, y, z)$ *по поверхности* (S) и обозначается символом

$$I = \iint\limits_{(S)} f(M)\, dS = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS, \tag{1}$$

где dS напоминает об элементарных площадях S_i.

---

* В отличие от поверхностных интегралов второго типа, рассматриваемых ниже [634].

631. Сведе́ние к обыкновенному двойному интегралу. Ограничимся случаем простой незамкнутой гладкой поверхности (S) без кратных точек.

Какова бы ни была функция $f(x, y, z)$, определенная в точках поверхности (S) и ограниченная:

$$|f(x, y, z)| \leqslant L, \tag{2}$$

имеет место равенство

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS =$$
$$= \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{3}$$

в предположении существования одного из этих интегралов (что влечет за собой и существование другого).

Таким образом, *для све́дения поверхностного интеграла первого типа к обыкновенному двойному нужно лишь заменить координаты x, y, z их выражениями через параме́тры, а элемент площади dS — его выражением в криволинейных координатах.*

Обратимся к доказательству высказанного утверждения.

Как уже отмечалось, разложению поверхности (S) на части с помощью кусочно-гладких кривых отвечает подобное же разложение области (Δ), и обратно. Точно так же, если к нулю стремятся диаметры частей (S), то это справедливо и по отношению к диаметрам частей (Δ), и обратно.

Разложим же соответственным образом поверхность (S) на части (S_1), (S_2), ..., (S_n), а область (Δ) на части (Δ_1), (Δ_2), ..., (Δ_n) и выберем в каждой части (S_i) по точке (x_i, y_i, z_i), а в части (Δ_i) — по точке (u_i, v_i), которые также отвечали бы одна другой, так что

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \tag{4}$$

Составим теперь интегральную сумму для интеграла (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

По общей формуле (3*) n° **626** будет

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Применив же теорему о среднем, получим

$$S_i = \left[\sqrt{EG - F^2}\right]_{\substack{u = \bar{u}_i \\ v = \bar{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

где $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ есть некоторая точка области (Δ_i).

С помощью этого выражения для S_i и вспоминая (4), мы можем переписать сумму σ так:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i.$$

В этом виде она напоминает интегральную сумму для второго из интегралов (3):

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

Различие между суммами σ и σ^* заключается в том, что в последней и сложная функция $f(\ldots)$ и корень $\sqrt{\ldots}$ всякий раз вычисляются для одной и той же (произвольно взятой) точки (u_i, v_i), а в первой — функция $f(\ldots)$ берется в точке (u_i, v_i), а выражение $\sqrt{\ldots}$ в точке $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ (которая навязывается теоремой о среднем и не произвольна).

Рассмотрим разность между обеими суммами:

$$\sigma - \sigma^* = \sum_i f(\ldots) \left\{ \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right\} \Delta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. В силу (равномерной) непрерывности функции $\sqrt{EG-F^2}$, при достаточно малых диаметрах областей (Δ_i) будет

$$\left| \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - \left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon.$$

Учитывая (2), легко приходим к оценке

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon L \Delta,$$

так что

$$\lim (\sigma - \sigma^*) = 0.$$

Отсюда ясно, что из существования предела для одной из этих сумм следует существование равного ему предела и для другой. Этим и доказано наше утверждение.

В частности, двойной интеграл справа в (3), а значит и поверхностный интеграл слева, существует в предположении непрерывности функции $f(x, y, z)$ вдоль поверхности (S).

Если поверхность (S) задана явным уравнением:

$$z = z(x, y),$$

то формула (3) принимает вид

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy, \qquad (5)$$

где (D) означает проекцию поверхности (S) на плоскость xy.

Так как $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{|\cos\nu|}$ (где ν, как обычно, есть угол между нормалью к поверхности и осью z), то формулу (5) можно написать и так:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\frac{dx\,dy}{|\cos\nu|}. \tag{5*}$$

Мы предполагали до сих пор поверхность (S), на которую был распространен интеграл, гладкой и незамкнутой. Наши результаты легко распространяются и на случай кусочно-гладкой поверхности, как незамкнутой, так и замкнутой.

632. Механические приложеиия поверхиостиых интегралов первого типа. 1°. С помощью названных интегралов можно определять массы, моменты, координаты центров тяжестн и т. п. велнчины для матернальных поверхностей, вдоль которых распределены массы с определенной в каждой точке поверхностной плотностью.

Так как здесь нет ничего нового по сравненню со случаем плоского распределения масс, рассмотренным выше, то мы остановимся на этих вопросах только в упражнениях.

2°. *Притяжение простого слоя.* Поверхностные интегралы первого типа естественно входят в рассмотрение при изучении притяжения масс, распределенных на поверхности.

Пусть по поверхностн (S) непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности плотностью $\rho(M)=\rho(x, y, z)$*. Пусть, далее, в точке $A(\xi, \eta, \zeta)$ (вне поверхности) находнтся единнца массы. Требуется определить, с какой по величине и по направленню снлой $\vec{F}$ притягнвается точка A поверхностью (S), если в основу положен ньютонов закон прнтяжения (закон всемирного тяготения).

Еслн бы точка A притягнвалась одной лнщь материальной точкой $M(x, y, z)$ с сосредоточенной в ней массой m, то величина силы притяжения была бы равна

$$F=\frac{m}{r^2}**,$$

где r есть расстояние AM, т. е.

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}. \tag{6}$$

Так как эта сила направлена от A к M, то ее направляющие косинусы будут

$$\frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{z-\zeta}{r}$$

и, следовательно, проекции силы притяжения $\vec{F}$ на осн коордннат выразятся так:

$$F_x=m\frac{x-\xi}{r^3}, \quad F_y=m\frac{y-\eta}{r^3}, \quad F_z=m\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{7}$$

---

* В этом случае говорят о простом слое (в отличне от двойного слоя, который мы не рассматрнваем).

** Как обычно, «постоянную тяготения», т. е. множитель пропорциональности в формуле Ньютона (зависящий от выбора единиц), мы заменяем единицей, чтобы упростить запись.

В случае системы притягивающих материальных точек эти выражения заменились бы суммами подобных выражений; наконец, при непрерывном распределении масс по поверхности появятся вместо сумм интегралы.

Применяя обычный прием изложения, можно было бы рассмотреть элемент dS поверхности с массой $\rho\, dS$, как бы сосредоточенной в одной из его точек $M(x, y, z)$. Оказываемое им на точку A притяжение будет иметь проекции на оси [ср. (7)]:

$$dF_x = \rho \frac{x-\xi}{r^3}\, dS, \quad dF_y = \rho \frac{y-\eta}{r^3}\, dS, \quad dF_z = \rho \frac{z-\zeta}{r^3}\, dS,$$

где r означает расстояние AM, выражаемое формулой (6). Теперь остается лишь «просуммировать» эти выражения, что приведет к следующим формулам для проекций силы $\vec{F}$ притяжения простого слоя на оси:

$$F_x = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{x-\xi}{r^3}\, dS, \quad F_y = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{y-\eta}{r^3}\, dS, \quad F_z = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{z-\zeta}{r^3}\, dS. \tag{8}$$

Этим сила $\vec{F}$ определена полностью как по величине, так и по направлению.

Если бы притягиваемая точка A и сама лежала на поверхности (S), то проекции притяжения на оси по-прежнему выражались бы интегралами (8), но на этот раз интегралы эти были бы несобственными, поскольку вблизи точки A подинтегральные функции все перестают быть ограниченными.

3°. *Потенциал простого слоя.* В случае одной притягивающей точки $M(x, y, z)$, как мы видели, проекции притягивающей силы на оси имеют выражения (7). Легко усмотреть, что эти проекции являются частными производными по ξ, η и ζ от функции

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{m}{r},$$

которая называется *ньютоновским потенциалом* на точку A поля точки M. [Ср. 566, 1).]

В случае поля, созданного системой материальных точек, потенциал выразился бы суммой дробей этого вида, причем производные потенциала по ξ, η, ζ по-прежнему давали бы проекции силы притяжения на оси.

Отсюда естественно приходим к такому выражению для *потенциала простого слоя*, расположенного по поверхности (S), с плотностью ρ, на точку A:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{dS}{r}. \tag{9}$$

Возникает лишь вопрос, сохраняется ли для этого потенциала фундаментальное свойство:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z, \tag{10}$$

где F_x, F_y, F_z суть проекции силы $\vec{F}$ притяжения простого слоя на оси и определяются формулами (8).

Если точка A не лежит на поверхности, так что никаких нарушений непрерывности нет, то легко показать, что к интегралу (9) при дифференцировании его по ξ, η или ζ применимо правило Лейбница (для этого понадобилось бы лишь повторение уже знакомых нам рассуждений). Таким путем оправдываются и для рассматриваемого случая распределения масс соотношения (10).

633. Примеры. 1) Вычислить поверхностные интегралы:

$$\text{(а)}\quad I_1=\iint\limits_{(S)}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS,$$

$$\text{(б)}\quad I_2=\iint\limits_{(S)}\frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

распространенные на поверхность (S) эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c>0).$$

Решение. (а) Если воспользоваться представлением эллипсоида:

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi$$
$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

то [629, 17)] элемент поверхности представится в виде

$$dS=abc\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta.$$

С другой стороны, и подинтегральная функция

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}.$$

По соображениям симметрии вычисление приводится к первому октанту, так что

$$I_1=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta=$$
$$=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

(б) Аналогично,

$$I_2=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычисляя внутренний интеграл по φ, положим $\cos\varphi=z$:

$$\int_0^1\frac{dz}{\{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)z^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\times$$
$$\times\left.\frac{z}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)z^2}}\right|_{z=0}^{z=1}=$$
$$=\frac{1}{c}\,\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},$$

и окончательно

$$I_2 = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} = 4\pi.$$

2) Вычислить интеграл

$$L = \iint_{(S)} (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\, dS,$$

где (S) есть поверхность, отсекаемая от верхней части конуса $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ цилиндром $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Решение. Переписав уравнение поверхности в виде $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, имеем $dS = \sqrt{1 + k^2}\, dx\, dy$, и по формуле (5)

$$L = \sqrt{1 + k^2} \iint_{(D)} [k^2(x^2 + y^2)^2 + x^2y^2]\, dx\, dy,$$

где (D) есть круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ на плоскости xy. Переходя к полярным координатам, найдем

$$L = \frac{1}{24}(80k^2 + 7)\pi a^6 \sqrt{1 + k^2}.$$

3) Вывести формулу (принадлежащую Пуассону):

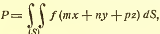
$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m \sin\varphi \cos\theta + n \sin\varphi \sin\theta + p \cos\varphi) \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\right) du$$

(где $m^2 + n^2 + p^2 > 0$ и $f(t)$ есть непрерывная функция для

$$|t| \leqslant \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}).$$

Решение. Обозначим интеграл слева через P; его легко представить в виде поверхностного интеграла



$$P = \iint_{(S)} f(mx + ny + pz)\, dS,$$

распространенного на сферу (S), описанную вокруг начала радиусом 1.

Черт. 94.

Переходя к новой системе координат uvw, возьмем за плоскость vw именно плоскость $mx + ny + pz = 0$ и направим ось u перпендикулярно к ней (черт. 94); тогда

$$u = \frac{mx + ny + pz}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

В координатах uvw тот же интеграл напишется так:

$$P = \iint_{(S)} f\left(u\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\right) dS.$$

Если параметрическое представление сферы (S) взять в виде

$$u = u,\ v = \sqrt{1-u^2}\cos\omega,\quad w = \sqrt{1-u^2}\sin\omega$$
$$(-1 \leqslant u \leqslant 1;\quad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi),$$

то $dS = du\,d\omega$, и окончательно

$$P = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right) du\,d\omega = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right) du.$$

Полагая $u = \cos\lambda\ (0 \leqslant \lambda \leqslant \pi)$, часто пишут формулу Пуассона в виде

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m\sin\varphi\cos\theta + n\sin\varphi\sin\theta + p\cos\varphi)\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi =$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cos\lambda\right)\sin\lambda\,d\lambda.$$

4) Пусть вдоль поверхности (S) распределена масса с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Найти выражения в виде поверхностных интегралов, распространенных на (S): (а) общего количества m массы; (б) статических моментов и моментов инерции ее M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{yz} относительно координатных плоскостей; (в) координат ξ, η, ζ центра тяжести массы.

5) Найти массу поверхности сферы, если ее поверхностная плотность в каждой точке равна (а) расстоянию этой точки от вертикального диаметра, (б) квадрату этого расстояния.

(а) Решение. Взяв за начало координат центр сферы и направив ось z по вертикали, перейдем к сферическим координатам φ и θ, полагая

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,\quad y = R\sin\varphi\sin\theta,\quad z = R\cos\varphi,$$

где R — радиус сферы. Тогда

$$dS = R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta,\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = R\sin\varphi,$$

так что

$$m = \iint_{(S)} \rho\,dS = R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi\,d\theta = \pi^2 R^3.$$

(б) *Ответ*: $m = \frac{8}{3}\pi R^4$.

6) При тех же предположениях (а) и (б) относительно распределения масс найти положение центра тяжести верхней полусферы.

(а) Решение. Если выбрать оси, как и только что, то по соображениям симметрии сразу ясно, что $\xi = \eta = 0$.

Вычислим статический момент:

$$M_{xy} = \iint_{(S)} z\rho\,dS = R^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta = \frac{2}{3}\pi R^4.$$

Мы уже знаем [см. задачу 5)] полную величину массы: $m = \frac{1}{2}\pi^2 R^3$, значит,

$$\zeta = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4}{3\pi}R.$$

(б) *Ответ.* При том же расположении осей $\xi = \eta = 0$, $\zeta = \frac{3}{8} R$.

7) Найти (а) положение центра тяжести однородной ($\rho = \text{const.}$) конической поверхности

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \leqslant R^2),$$

(б) ее моменты инерции относительно координатных плоскостей.

Решение. (а) Очевидно, $\xi = \eta = 0$. Далее, имеем

$$dS = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}\, dx\, dy = \frac{l}{R}\, dx\, dy \qquad \left(l = \sqrt{h^2 + R^2}\right),$$

и, следовательно,

$$M_{xy} = \frac{hl}{R^2} \rho \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \frac{2\pi hl}{R^2} \rho \int\limits_0^R r^2\, dr = \frac{2}{3} \pi hlR\rho.$$

Так как $m = \pi lR\rho$, то $\zeta = \frac{2}{3} h$.

(б) $$I_{xy} = \iint\limits_{(S)} \rho z^2\, dS = \frac{2\pi h^2 l}{R^3} \rho \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi h^2 lR}{2} \rho.$$

Аналогично

$$I_{yz} = I_{zx} = \frac{\pi l R^3}{4} \rho.$$

8) Дан прямой круговой цилиндр радиуса R и высоты h. Предполагая его боковую поверхность однородной ($\rho = 1$), найти (а) притяжение, испытываемое со стороны поверхности центром основания, (б) потенциал этой поверхности на центр основания.

Решение. (а) Если принять центр основания за начало координат, а ось цилиндра — за ось z, то, очевидно, $F_x = F_y = 0$. Представив цилиндр параметрически:

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad z = z,$$

имеем $dS = R\, dz\, d\theta$, так что

$$F_z = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h \frac{zR\, dz\, d\theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right).$$

(б) Имеем

$$W = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h \frac{R\, dz\, d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 2\pi R \ln \frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R}.$$

9) Для конической поверхности задачи 7) найти (а) потенциал этой поверхности на центр основания конуса и (б) на его вершину, а также (в) притяжение, испытываемое центром основания и (г) вершиной конуса.

Решение. (а) Полагая $l=\sqrt{R^2+h^2}$, будем иметь

$$W=\frac{l}{R}\rho\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=2\pi l\rho\int\limits_0^R\frac{r\,dr}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{l}\rho\int\limits_0^R\frac{l^2r-Rh^2}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}\,dr+\frac{2\pi Rh^2}{l}\rho\int\limits_0^R\frac{dr}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}=$$

$$=\frac{2\pi\rho}{l}\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}\,\Bigg|_{r=0}^{r=R}+$$

$$+\frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\left[l^2r-Rh^2+\sqrt{l^2(l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2)}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R}=$$

$$=\frac{2\pi R\rho}{l}(R-h)+\frac{2\pi Rh^2\rho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\frac{l+R}{l-h}.$$

(б) $$W=\frac{l\rho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=2\pi R\rho.$$

(в) По соображениям симметрии $F_x=F_y=0$. Далее,

$$F_z=\frac{l\rho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy=$$

$$=2\pi hlR\rho\int\limits_0^R\frac{(r-R)\,r\,dr}{[l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Интеграл приводится к сумме трех интегралов:

$$\frac{1}{l^2}\int\limits_0^R\frac{dr}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{R(h^2-R^2)}{l^4}\int\limits_0^R\frac{l^2r-Rh^2}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{3}{2}}}\,dr-$$

$$-\frac{2R^4h^2}{l^4}\int\limits_0^R\frac{dr}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{l^3}\ln\frac{R}{h}\frac{l+R}{l-h}+\frac{h^2-R^2}{Rhl^4}(R-h)-\frac{2}{l^4}(R+h).$$

Собрав все результаты, окончательно получим:

$$F_z=\frac{2\pi hR\rho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\frac{l+R}{l-h}-\frac{2\pi\rho(R+h)}{l}.$$

(г) На этот раз несобственный интеграл оказывается расходящимся:

$$F_z=\frac{Rh}{l^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}=+\infty.$$

10) Предполагая, что плотность масс, распределенных по поверхности конуса, равна расстоянию точки до вершины, найти (а) потенциал поверхности на вершину, (б) притяжение, испытываемое вершиной со стороны поверхности.

Ответ. (а) $W = \pi R l = S$; (б) $F_x = F_y = 0$, $F_z = \frac{2\pi R h}{l}$.

11) Найти силу притяжения точки однородным ($\rho = \text{const.}$) сферическим слоем.

Решение. Пусть центр сферы лежит в начале координат, а притягиваемая точка A (массы 1) находится на положительной оси z на расстоянии a от центра. Проекции F_x и F_y силы притяжения на оси x и y, очевидно, равны нулю. Далее, имеем

$$F_z = \iint\limits_{(S)} \rho\, \frac{z-a}{r^3}\, dS$$

(r — расстояние между точкой A и произвольной точкой M сферы). Если перейти к сферическим координатам:

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad z = R\cos\varphi,$$

то

$$dS = R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta, \quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi}$$

и

$$F_z = 2\pi R^2 \rho \int\limits_0^\pi \frac{(R\cos\varphi - a)\sin\varphi\, d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Подстановкой $R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi = t^2$ преобразуем это выражение

$$F_z = \frac{\pi R}{a^2}\rho \int\limits_{|R-a|}^{R+a} \left(\frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1\right) dt =$$

$$= -\frac{\pi R^2}{a^2}\rho\left(2R - \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} - |R-a|\right).$$

Рассмотрим теперь два предположения.

(1) Пусть $a < R$; в таком случае $|R - a| = R - a$, в квадратных скобках стоит нуль и

$$F_z = 0.$$

Итак, *точка, находящаяся* ***внутри*** *однородного сферического слоя, не испытывает со стороны последнего никакого притяжения.*

(2) Если же $a > R$, то $|R - a| = -(R - a)$, так что

$$F_z = -\frac{4\pi R^2 \rho}{a^2}.$$

Поэтому *точка, находящаяся* ***вне*** *однородного сферического слоя, испытывает со стороны последнего такое же притяжение, какое испытывала бы, если сосредоточить всю массу* $m = 4\pi R^2 \rho = S\rho$ *слоя в его центре.*

Остановимся особо на случае $a = R$. В этом случае точка A лежит на сфере, и интеграл (11) становится несобственным. После очевидных упрощений он принимает вид

$$F_z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\rho \int\limits_0^\pi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos\varphi}} = -2\pi\rho.$$

При приближении a к R со стороны меньших или больших значений F_z имеет предельные значения, соответственно, 0 и $-4\pi\rho$. Таким образом, притяжение испытывает разрыв непрерывности при прохождении притягиваемой точки через поверхность сферы, причем величина притяжения для точки на сфере есть среднее арифметическое упомянутых предельных значений.

12) Найти потенциал однородного сферического слоя на произвольно взятую точку.

Решение. При прежних обозначениях имеем

$$W(a)=\iint\limits_{(S)}\rho\frac{dS}{r}=2\pi R^2\rho\int\limits_0^\pi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{2\pi R}{a}\rho\int\limits_{|R-a|}^{R+a}dt=\frac{2\pi R}{a}\rho\,(R+a-|R-a|).$$

Если $a<R$, то

$$W(a)=4\pi R\rho,$$

так что *внутри однородного сферического слоя его потенциал постоянен.* Напротив, при $a>R$ будет

$$W(a)=\frac{4\pi R^2\rho}{a},$$

т. е. *потенциал, созданный сферическим слоем во внешнем пространстве, не изменится, если всю массу его сосредоточить в центре.*

Для случая $a=R$ несобственный интеграл, выражающий потенциал, имеет значение

$$W(R)=4\pi R\rho.$$

Как видим, при переходе точки через сферическую поверхность потенциал сохраняет непрерывность.

§ 4. Поверхностные интегралы второго типа

634. Определение поверхностного интеграла второго типа. Это новое интегральное образование строится по образцу криволинейного интеграла второго типа.

Там мы исходили из направленной (ориентированной) кривой и, разложив ее на элементы, каждый такой элемент, соответственно направленный, проектировали на координатную ось. Проекция получалась тоже направленной, и мы брали ее длину со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадало ли ее направление с направлением оси или нет.

Аналогичным образом рассмотрим теперь двустороннюю поверхность (S), гладкую или кусочно-гладкую, и фиксируем какую-либо из двух ее сторон; как мы видели [620], *это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации.*

Для определенности предположим сначала, что поверхность задана явным уравнением

$$z=z(x,\ y),$$

причем точка (x, y) изменяется в области (D) на плоскости xy, ограниченной кусочно-гладким контуром. Тогда выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности. В первом случае замкнутой кривой на поверхности приписывается направление против часовой стрелки, если смотреть сверху, во втором — обратное направление.

Если поверхность разбита на элементы и каждый такой, соответственно ориентированный, элемент спроектировать на плоскость xy, то направление обхода контура проектируемой фигуры определит и направление обхода контура проекции. Это направление будет совпадать с вращением против часовой стрелки, т. е. отвечать ориентации самой плоскости xy, если фиксирована была верхняя сторона поверхности (S); в этом случае мы площадь проекции будем брать со знаком плюс. В случае нижней стороны вращение будет обратным, и площадь проекции будем брать со знаком минус [ср. **610**].

Пусть теперь в точках данной поверхности (S) определена некоторая функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разложив поверхность сетью кусочно-гладких кривых на элементы

$$(S_1),\ (S_2),\ \ldots,\ (S_n),$$

выберем в каждом элементе (S_i) по точке $M_i\,(x_i, y_i, z_i)$. Затем вычислим значение функции $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и умножим его на площадь D_i проекции на плоскость xy элемента (S_i), снабженную знаком по указанному выше правилу. Составим, наконец, сумму (тоже, своего рода, интегральную сумму)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,D_i \tag{1}$$

Конечный предел этой интегральной суммы при стремлении диаметров всех частей (S_i) к нулю называют *поверхностным интегралом* (*второго типа*) *от*

$$f(M)\,dx\,dy = f(x, y, z)\,dx\,dy,$$

распространенным на выбранную сторону поверхности (S), и обозначают символом

$$I = \iint\limits_{(S)} f(M)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{2}$$

(здесь $dx\,dy$ напоминает о площади проекции элемента поверхности на плоскость xy).

Впрочем, в этом символе не содержится как раз указания на то, какую именно сторону поверхности имеют в виду, так что это указание приходится делать всякий раз особо. Из самого определения

следует, что при замене рассматриваемой стороны поверхности противоположной стороной интеграл меняет знак.

Если поверхность (S) не имеет указанного специального вида, то определение поверхностного интеграла строится совершенно так же, лишь площади D_i проекций приходится брать не все с одними и теми же, а возможно и с разными знаками, если одни элементы поверхности оказываются лежащими, так сказать, сверху, а другие — снизу (черт. 95).

Если элемент лежит на цилиндрической части поверхности, с образующими, параллельными оси z, то проекцией его служит направляющая цилиндрической поверхности; мы будем предполагать, что эта кривая имеет нулевую площадь, и в таком случае о знаке ее говорить не приходится.

Однако здесь может встретиться и такой случай, когда элемент лежит частью сверху, частью снизу, либо когда элемент не проектируется на плоскость xy взаимно однозначно.

Черт. 95.

Так как на деле роль подобных «неправильных» элементов ничтожна, то слагаемых, отвечающих этим элементам, мы в интегральную сумму включать не будем. Ниже мы убедимся в том, что это соглашение не вносит никаких осложнений ни в вычисление, ни в использование поверхностных интегралов.

Если вместо плоскости xy проектировать элементы поверхности на плоскость yz или zx, то получим два других поверхностных интеграла второго типа:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dy\, dz \quad \text{или} \quad \iint_{(S)} f(x, y, z)\, dz\, dx. \tag{2*}$$

В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех этих видов:

$$\iint_{(S)} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy,$$

где P, Q, R суть функции от (x, y, z), определенные в точках поверхности (S). Еще раз подчеркнем, что *во всех случаях поверхность* (S) *предполагается двусторонней* и что *интеграл распространяется на определенную ее сторону*.

635. Простейшие частные случаи. 1°. Возвратимся вновь к интегралу (2) для случая, когда поверхность (S) задана явным уравнением,

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \text{ из } (D)),$$

причем функция z непрерывна вместе со своими частными производными $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

Если интеграл (2) берется по верхней стороне поверхности, то в интегральной сумме (1) все D_i положительны. Подставляя в эту сумму вместо z_i его значение $z(x_i, y_i)$, приведем ее к виду

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) D_i,$$

в котором легко узнать интегральную сумму для обыкновенного двойного интеграла

$$\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

Переходя к пределу, установим равенство

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy=\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy, \tag{3}$$

причем существование одного из этих интегралов влечет за собой существование другого. В частности, оба интеграла наверное существуют, если функция f непрерывна.

Если интеграл распространить на нижнюю сторону поверхности (S), то будем иметь, очевидно,

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy=-\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy. \tag{3*}$$

Замечание. Можно было бы во всех случаях сохранить формулу (3), если только двойной интеграл справа считать распространенным на надлежаще ориентированную область (D) [см. **610**].

Покажем теперь (для рассматриваемого случая), что поверхностный интеграл второго типа приводится и к поверхностному интегралу первого типа. Рассмотрим снова сумму (1), в предположении, что фиксирована верхняя сторона поверхности, так что все $D_i>0$. По формуле (2) n° **625**

$$S_i=\iint_{(D_i)} \frac{dx\, dy}{\cos \nu},$$

где ν есть острый угол между нормалью к поверхности и осью z. Применив теорему о среднем значении, получим

$$S_i=\frac{D_i}{\cos \nu_i^*} \quad \text{или} \quad D_i=S_i \cos \nu_i^*;$$

здесь ν_i^* означает угол с осью z нормали к поверхности в некоторой

(отнюдь не произвольно выбираемой) точке элемента (S_i). Подставляя в σ это значение D_i, получим

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$

Эту сумму естественно сопоставить с суммой

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i,$$

где ν_i отвечает уже произвольно выбранной точке $(x_i\ y_i\ z_i)$; последняя сумма является, очевидно, интегральной суммой для поверхностного интеграла первого типа

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS.$$

Ввиду непрерывности функции

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

если поверхность (S) разложить на достаточно малые элементы, то колебание этого косинуса в пределах отдельного элемента станет меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Предполагая функцию f ограниченной: $|f| \leqslant M$, оценим разность обеих сумм σ и $\bar{\sigma}$:

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i, y_i, z_i)| \, |\cos \nu_i^* - \cos \nu_i| \, S_i < MS\varepsilon;$$

таким образом, $\sigma - \bar{\sigma} \to 0$. Ясно, что для обеих сумм предел существует одновременно и притом один и тот же. Так мы приходим к равенству

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS, \tag{4}$$

причем из существования одного из интегралов вытекает существование другого. Мы видим снова, что, в частности, оба интеграла существуют в предположении непрерывности функции f.

Заменяя верхнюю сторону поверхности н и ж н е й, мы тем самым меняем знак левой части равенства (4). Если одновременно с тем под ν разуметь угол с осью z нормали, направленной в н и з же, то косинус, а с ним и интеграл справа, также изменит знак, так что равенство сохранится.

2°. Если (S) есть часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z, направляющая которой на плоскости xy имеет

нулевую площадь, то все ее элементы имеют нулевые проекции, так что в этом случае

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy = 0. \tag{5}$$

Очевидно, здесь также имеет место формула (4): так как $\cos \nu = 0$, то и правая часть этой формулы будет нулём.

636. Общий случай. Обратимся к общему случаю простой незамкнутой гладкой поверхности. В интегральную сумму

$$\sigma' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i)\, D_i,$$

как мы условились, не включены слагаемые, отвечающие «неправильным» элементам, которые либо лежат на поверхности частью сверху, а частью — снизу, либо не допускают взаимно однозначной проекции на плоскость xy. На это обстоятельство условно указывает штрих у знака суммы.

Разумея вообще под ν угол, составленный с осью z нормалью к поверхности, *направленной в соответствии с выбранной стороной поверхности*, мы будем иметь всегда равенство, верное вплоть до знака (ν_i^* имеет тот же смысл, что и выше):

$$D_i = S_i \cos \nu_i^*.$$

Таким образом,

$$\sigma' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^* S_i.$$

Эту сумму сопоставим с суммой

$$\bar{\sigma}' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i$$

(ν_i отвечает выбранной точке). Как и выше, легко убеждаемся в том, что

$$\lim (\sigma' - \bar{\sigma}') = 0. \tag{6}$$

Если к сумме $\bar{\sigma}'$ присоединить еще сумму

$$\bar{\sigma}'' = \sum{}'' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i,$$

соответствующую отброшенным «неправильным» элементам, то получится полностью интегральная сумма $\bar{\sigma}$ для поверхностного интеграла первого типа

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu\, dS.$$

Можно доказать [мы предпочитаем сделать это ниже, в **637**], что при стремлении к нулю диаметров всех элементов (S_i) сумма

$$\bar{\sigma}'' \to 0. \tag{7}$$

Тогда в связи с (6) мы снова получаем равенство (4), в предположении, что существует один из фигурирующих в нем интегралов (существование другого отсюда уже вытекает).

Исходя из параметрического представления поверхности (S), можно свести интеграл в (4) справа, а с ним, по доказанному, и интеграл слева — к обыкновенному двойному интегралу, распространенному на область (Δ) изменения параметров. Именно, так как

$$\cos\nu = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv,$$

то имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\,C\,du\,dv. \quad (8)$$

Двойной знак отвечает двум сторонам поверхности (S); в частности, если ориентация плоскости uv отвечает ориентации поверхности (S), связанной с выбором определенной ее стороны, то надлежит взять знак плюс [621]. И здесь существование одного из этих интегралов влечет за собой существование другого.

Аналогичные рассмотрения могут быть проведены и для других поверхностных интегралов второго типа, связанных с проектированием на другие координатные плоскости. Объединяя все эти результаты, можно написать

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS. \quad (9)$$

Это — общая формула, сводящая поверхностный интеграл второго типа к поверхностному интегралу первого типа. Здесь P, Q, R обозначают ограниченные функции, определенные в точках поверхности (S), а $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ суть направляющие косинусы нормали, *направленной в соответствии с выбранной стороной поверхности*.

Приведем, наконец, общую формулу, сводящую поверхностный интеграл второго типа к обыкновенному двойному интегралу:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \pm\iint\limits_{(\Delta)} (PA + QB + RC)\,du\,dv. \quad (10)$$

В правой части подразумевается, что в функции P, Q, R вместо x, y, z подставлены их выражения через u, v. По поводу знака можно повторить прежние замечания.

Все полученные результаты непосредственно распространяются и на более общий случай поверхности — замкнутой или нет, — составленной из конечного числа простых незамкнутых гладких частей, примыкающих одна к другой.

637. Деталь доказательства. Обратимся к доказательству соотношения (7). Мы утверждаем, что по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что, лишь только диаметры всех элементов будут меньше η, в «неправильных» элементах повсюду будет выполняться неравенство

$$|\cos\nu| < \varepsilon. \tag{11}$$

Допустим противное; тогда существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая последовательность «неправильных» элементов (s_k) с убывающими до нуля диаметрами, что в некоторой точке каждого (s_k) будет

$$|\cos\nu| \geqslant \varepsilon_0. \tag{12}$$

Если через (δ_k) обозначить элемент области (Δ), отвечающий (s_k), то и диаметры элементов (δ_k) также стремятся к нулю. С помощью леммы Больцано-Вейерштрасса [172], из последовательности $\{(\delta_k)\}$ можно выделить такую частичную последовательность, элементы которой стягиваются к некоторой точке (u_0, v_0) области (Δ); впрочем, без умаления общности можно предположить это относительно самой последовательности $\{(\delta_k)\}$.

Для угла $\nu = \nu_0$, отвечающего значениям $u = u_0$, $v = v_0$ параметров u, v, необходимо должно быть

$$\cos\nu_0 = 0. \tag{13}$$

Действительно, в противном случае мы имели бы для этих значений параметров

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но тогда в окрестности точки (u_0, v_0) можно было бы рассматривать u, v как однозначные функции от x, y и, подставив их выражения через x, y в функцию $z = z(u, v)$, представить поверхность явным уравнением

$$z = f(x, y)\,*.$$

Кроме того, в этой окрестности, если выбрать ее достаточно малой, $\cos\nu$ сохранял бы определенный знак. Так как (δ_k) при достаточно больших k неминуемо попали бы в эту окрестность, то им не могли бы отвечать «неправильные» элементы (s_k).

Итак, равенство (13) установлено. В таком случае, при достаточной близости (δ_k) к точке (u_0, v_0), мы имели бы для этих областей сплошь

$$|\cos\nu| < \varepsilon_0,$$

вопреки предположению (12). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение, связанное с неравенством (11).

Пусть теперь диаметры элементов, на которые разложена поверхность (S), все будут меньше η. Тогда для «неправильных» элементов (если они вообще имеются) выполняется неравенство (11), и соответствующая им сумма σ'' будет по абсолютной величине меньше, чем $MS\varepsilon$, если через M обозначить верхнюю границу для $|f|$. Отсюда и следует (7).

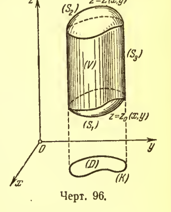
---

* Если точка (u_0, v_0) принадлежит контуру области (Δ), то сказанное остается справедливым для общей части упомянутой окрестности этой точки с областью (Δ). См. Дополнение к первому тому [262].

638. Выражение объема тела поверхностным интегралом. Объем тела выражается интегралом, распространенным на ограничивающую это тело поверхность, наподобие того, как площадь плоской фигуры выражается интегралом, взятым по контуру фигуры [551]. Рассмотрим тело (V), ограниченное кусочно-гладкими поверхностями

$$\left.\begin{aligned}(S_1)\quad z&=z_0(x,\ y),\\ (S_2)\quad z&=Z(x,\ y)\end{aligned}\right\}\quad (z_0<Z)$$

и цилиндрической поверхностью (S_3), образующие которой параллельны оси z (черт. 96). Направляющей этой поверхности служит кусочно-гладкая замкнутая кривая (K) на плоскости xy, ограничивающая плоскую область (D). В частном случае на кривой (K) может выполняться и равенство $z_0(x,\ y)=Z(x,\ y)$; тогда поверхность (S_3) вырождается в линию.



Черт. 96.

Объем V тела, очевидно, равен разности интегралов

$$V=\iint\limits_{(D)} Z(x,\ y)\,dx\,dy-\iint\limits_{(D)} z_0(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Вводя поверхностные интегралы, можно это равенство переписать так [см. (3) и (3*)]:

$$V=\iint\limits_{(S_2)} z\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_1)} z\,dx\,dy,$$

причем интегралы берутся по в е р х н е й стороне поверхности (S_2) и по н и ж н е й стороне поверхности (S_1). Прибавим к правой части интеграл

$$\iint\limits_{(S_3)} z\,dx\,dy,$$

распространенный на в н е ш н ю ю сторону цилиндрической поверхности (S_3). Этот интеграл, в силу (5), равен нулю, а потому прибавление его не нарушает равенства. Итак, окончательно,

$$V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy, \tag{14}$$

где интеграл распространен на в н е ш н ю ю сторону поверхности $(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)$, ограничивающей тело.

Формула (14) установлена нами лишь для цилиндрических брусов, определенным образом ориентированных. Но, очевидно, она верна для

гораздо более широкого класса тел, которые могут быть разложены на части изученного вида с помощью цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси z. Действительно, осуществив это разложение, мы можем применить к каждой части формулу (14) и затем сложить результаты. Так как интегралы, распространенные на вспомогательные цилиндрические поверхности, равны нулю, то мы вновь приходим к формуле (14).

Мы покажем сейчас, что эта формула имеет место для широкого класса наичаще встречающихся тел, именно, для тел, ограниченных произвольными кусочно-гладкими поверхностями.

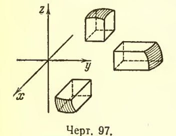
Пусть (V) — такое тело. Прежде всего выделим все „ребра" на его поверхности (S) с помощью конечного числа прямоугольных параллелепипедов*, и притом так, чтобы не только их общий объем был произвольно мал, но произвольно малой была бы и площадь заключенной в них части поверхности (S), а вместе с тем и распространенный на эту часть интеграл $\iint z\,dx\,dy$.

Возьмем теперь любую точку $M_0\ (u_0,\ v_0)$ поверхности, не лежащую на „ребре". Так как она не является особой, то в ней отличен от нуля хоть один из определителей A, B, C. Если $C \neq 0$, то, как известно, в окрестности точки M_0 соответствующий кусок поверхности (S) выражается явным уравнением вида

$$z = f(x, y).$$

При $A \neq 0$ или $B \neq 0$ придем к явным же уравнениям других видов:

$$x = g(y,\ z) \text{ или } y = h(z,\ x).$$



Черт. 97.

Таким образом, точка M_0 может быть окружена таким параллелепипедом, который вырезает из тела (V) „призматический брус", ограниченный пятью плоскостями и куском поверхности одного из этих трех видов (черт. 97).

Применяя лемму Бореля [175] к нашей поверхности**, мы выделим из всей этой бесконечной системы параллелепипедов конечное их число. В результате, за выключением параллелепипедальной полосы, выделяющей „ребра", остальная часть (V_1) тела (V) разобьется на конечное число „призматических брусов" и просто параллелепипедов. Если бы удалось доказать справедливость формулы (14) для всех этих элементарных тел, то путем сложения легко было бы убе-

---

* Здесь и ниже мы имеем в виду параллелепипеды с гранями, соответственно параллельными координатным плоскостям.

** Которая, как нетрудно видеть, представляет собой замкнутое множество.

диться и в ее верности для их суммы (V_1), а затем с помощью предельного перехода (связанного со сжиманием окрестностей „ребер") и для исходного тела (V).

Но для брусов первого вида, а тем более для параллелепипедов, формула уже доказана выше. Остановимся теперь для примера на „призматическом брусе" (V) второго вида, ограниченного плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, $y = y_1$, $z = z_0$, $z = z_1$ и поверхностью (s): $x = g(y, z)$.

Подражая процессу, которым мы пользовались в n° **551** для расширения условий применимости формулы для площади плоской фигуры, мы на этот раз вместо вписывания ломаной в кривую станем вписывать в поверхность (s) многогранную поверхность (σ). Как мы знаем **[627]**, с помощью надлежащей т р и а н г у л я ц и и прямоугольника

$$(d) = [y_0, y_1;\ z_0, z_1],$$

представляющего собой проекцию нашего тела на плоскость yz, это можно сделать так, чтобы нормали к граням поверхности (σ) были сколь угодно близки по направлению к нормалям к поверхности в точках соответствующих ее участков. Заменив поверхность (s) многогранной поверхностью (σ), мы вправе написать для измененного тела $\tilde{V}$ формулу

$$\tilde{V} = \iint\limits_{(\tilde{S})} z\, dx\, dy, \tag{15}$$

где через $(\tilde{S})$ обозначена вся поверхность, ограничивающая многогранник $(\tilde{V})$. Действительно, этот многогранник легко разлагается на части такого типа, для которого наша формула уже доказана. Остается теперь в (15) перейти к пределу (при безграничном уменьшении ребер многогранной поверхности и сближении направлений нормалей к ее граням и к данной кривой поверхности), чтобы получить (14).

Для доказательства сближения правых частей названных формул представим их разность в виде

$$\iint\limits_{(s)} z\, dx\, dy - \iint\limits_{(\sigma)} z\, dx\, dy + \alpha,$$

где α обозначает интегралы по тем частям боковых поверхностей тел (V) и $(\tilde{V})$, которыми эти поверхности разнятся. Очевидно, что $\alpha \to 0$. Разность же интегралов можно переписать, переходя к интегралам первого типа, сначала в виде

$$\iint\limits_{(s)} z \cos \nu\, ds - \iint\limits_{(\sigma)} z \cos \tilde{\nu}\, d\sigma,$$

а затем, снова возвращаясь к интегралам второго типа, — в виде

$$\iint\limits_{(s)} z\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\,dy\,dz - \iint\limits_{(\sigma)} z\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}}\,dy\,dz.$$

Здесь $\cos\lambda$, $\cos\nu$, $\cos\tilde{\lambda}$, $\cos\tilde{\nu}$ — направляющие косинусы внешних нормалей к обеим поверхностям. Заметим, что на (s)

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+g_y'^2+g_z'^2}}$$

есть непрерывная функция, не обращающаяся в нуль, и, следовательно, ограничена снизу положительным числом; при достаточном же сближении нормалей к поверхностям (s) и (σ) то же справедливо и относительно $\cos\tilde{\lambda}$ для многогранной поверхности (σ).

Наконец, вводя уравнение $x=\tilde{g}(y, z)$ многогранной поверхности (σ), можно переписать это выражение в виде обыкновенного двойного интеграла, распространенного на прямоугольник (d):

$$\iint\limits_{(d)} \left\{\left[z\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\right]_{x=g(y,\,z)} - \left[z\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}}\right]_{x=\tilde{g}(y,\,z)}\right\} dy\,dz.$$

Учитывая не только сближение соответствующих точек поверхностей (s) и (σ), но и сближение нормалей в них к этим поверхностям, теперь уже ясно, что в упомянутом предельном процессе написанный интеграл стремится к нулю, чем и завершается доказательство.

Наряду с формулой (14) объем тела выражается и формулами

$$V=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz \quad \text{или} \quad V=\iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx, \tag{14*}$$

которые получаются простым изменением роли осей. Складывая все три, можно получить и более симметричную формулу:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy. \tag{16}$$

Во всех случаях интеграл берется по внешней стороне поверхности (S), ограничивающей тело.

Вводя вновь направляющие косинусы $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ внешней нормали, перепишем последнее выражение в виде поверхностного интеграла первого типа:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)\,dS. \tag{17}$$

639. Формула Стокса. Пусть (S) снова будет простая гладкая двухсторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром (L). Точки поверхности с помощью формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

связаны взаимно однозначным соответствием с точками плоской области (Δ), ограниченной кусочно-гладким же контуром (Λ), на плоскости uv. При наших предположениях всегда $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Выбрав определенную *сторону* поверхности, а в соответствии с этим и *ориентацию* на ней **[620]**, для определенности будем считать, что положительному обходу контура (Λ) отвечает обход контура (L) в положительном направлении. Тогда, как мы установили в **621**, формулы

$$\cos\lambda = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{C}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{18}$$

характеризуют именно выбранную сторону поверхности (S).

После этих замечаний мы обращаемся к выводу формулы, связывающей поверхностный интеграл с криволинейным и служащей обобщением уже известной нам формулы *Грина* **[600]**.

Пусть в некоторой пространственной области, содержащей внутри себя поверхность (S), задана функция

$$P = P(x, y, z),$$

непрерывная в этой области вместе со своими частными производными. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{19}$$

причем направление обхода контура (L) соответствует той стороне поверхности (S), на которую распространен интеграл справа.

Прежде всего преобразуем криволинейный интеграл по кривой (L), заменив его интегралом по кривой (Λ):

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \int\limits_{(\Lambda)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right). \tag{20}$$

Равенство это легко проверить, если ввести параметрическое представление кривой (Λ), а через него — и кривой (L): оба интеграла сведутся к одному и тому же обыкновенному интегралу по параметру.

Теперь к интегралу в (20) справа применим формулу *Грина*:

$$\int\limits_{(\Lambda)} P \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = \iint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\} du\,dv.$$

Так как последнее подинтегральное выражение в развернутом виде дает

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}-$$
$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=$$
$$=\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

то мы приходим к двойному интегралу

$$\iint\limits_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\right\}du\,dv.$$

По формуле же (10) его легко преобразовать в поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy;$$

последний берется по выбранной стороне поверхности, ибо именно эту сторону характеризуют формулы (18). Этим и завершается доказательство равенства (19)*.

Эта формула установлена нами для гладкой поверхности; но ее легко распространить и на случай кусочно-гладкой (самонепересекающейся) поверхности: стоит лишь написать ее для каждого гладкого куска в отдельности и почленно сложить полученные равенства.

Путем круговой перестановки букв x, y, z получаются еще два аналогичных равенства:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{(L)}Q\,dy&=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy-\frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz,\\ \int\limits_{(L)}R\,dz&=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz-\frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx,\end{aligned}\right\}\qquad(19^*)$$

где Q и R — новые функции от x, y, z, удовлетворяющие тем же условиям, что и P.

Складывая все три равенства (19) и (19*), получим искомый результат в наиболее общей форме:

$$\int\limits_{(L)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx.\qquad(21)$$

* Следует отметить, что при выводе нами использованы существование и непрерывность производных $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}$, которые в окончательном результате не участвуют. На деле формула имеет место и без этих предположений.

Это равенство и называется *формулой Стокса* (G. G. Stokes). *Еще раз подчеркнем, что сторона поверхности и направление обхода контура взаимно определяются по правилу, установленному в* n° **620**.

Если в качестве куска поверхности (S) взять плоскую область (D) на плоскости xy, так что $z=0$, то получится формула

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

в которой читатель узнает формулу Грина; таким образом, последняя является частным случаем формулы Стокса*.

Отметим, наконец, что поверхностный интеграл второго типа в формуле Стокса может быть заменен поверхностным интегралом первого типа. Тогда эта формула примет вид

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{(S)} \left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\lambda + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\nu\right\} dS, \qquad (21^*)$$

причем $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ означают направляющие косинусы нормали, *отвечающей именно выбранной стороне поверхности.*

640. Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

распространенный на нижнюю сторону круга $x^2 + y^2 = R^2$.

Указание. Так как поверхность, по которой берется интеграл, совпадает со своей проекцией (D) на плоскость xy, то, учитывая сторону, имеем

$$I = -\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Ответ. $I = -\frac{\pi}{2}R^4$.

2) Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{(S)} x^2y^2z\,dx\,dy$$

по верхней стороне нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

---

* Для облегчения запоминания формулы Стокса укажем, что первое слагаемое в интеграле справа — то же, что и в формуле Грина, а остальные получаются из него круговой перестановкой букв x, y, z и P, Q, R.

Указание. Проекцией полусферы на плоскость xy служит круг (D), ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Уравнение нижней полусферы $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому

$$J=-\iint\limits_{(D)} x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ответ. $J=-\frac{2\pi}{105}R^7$.

3) Вычислить интеграл

$$K=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

распространенный на внешнюю сторону сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Решение. Остановимся на вычислении интеграла

$$K_3=\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy.$$

Так как явное уравнение сферы будет

$$z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$$

(где плюс отвечает верхней полусфере, а минус — нижней), то удобно представить подинтегральную функцию z^2 в виде

$$z^2=(z-c)^2+c^2+2c(z-c).$$

Сумма первых двух членов, будучи проинтегрирована по верхней стороне верхней полусферы и нижней стороне нижней полусферы, дает результаты разных знаков, которые взаимно уничтожаются. Последний же член, который сам меняет знак при переходе от верхней полусферы к нижней, дает при интегрировании по ним равные результаты, так что

$$K_3=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy=\frac{8}{3}\pi c R^3.$$

Аналогично получаются и другие два интеграла

$$K_1=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz,\quad K_2=\iint\limits_{(S)} y^2\,dz\,dx.$$

Ответ. $K=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

4) Найти интегралы

(а) $I_1=\iint\limits_{(S)} dx\,dy$, (б) $I_2=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$, (в) $I_3=\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$,

распространенные на внешнюю сторону эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ответ. (а) $I_1=0$; (б) $I_2=\frac{4}{3}\pi abc$; (в) $I_3=0$.

5) Вычислить интегралы

$$(а)\quad L_1 = \iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz, \quad (б)\quad L_2 = \iint\limits_{(S)} yz\,dz\,dx$$

по верхней стороне верхней половины того же эллипсоида.

Решение. (а) $x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$,

$$L_1 = 4a^3 \iint\limits_{(D_1)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy\,dz,$$

где (D_1) есть первый квадрант эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Переходя к обобщенным полярным координатам, легко найдем

$$L_1 = \frac{2}{5}\pi a^3 bc.$$

Можно столь же легко получить этот результат, исходя из параметрического представления нашей поверхности:

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, \quad y = b\sin\varphi\sin\theta, \quad z = c\cos\varphi \tag{22}$$
$$\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right).$$

Так как $A = bc\sin^2\varphi\cos\theta$, то по формуле (10)

$$L_1 = a^3 bc \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\pi a^3 bc.$$

(Верхней стороне поверхности отвечает знак плюс в упомянутой формуле).

(б) Пользуясь и здесь параметрическим представлением, заметим, что $B = ac\sin^2\varphi\sin\theta$. Поэтому

$$L_2 = abc^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}\,abc^2.$$

6) Найти интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$$

по внешней стороне эллипсоида, о котором была речь выше.

Указание. Интеграл — несобственный, поскольку подинтегральное выражение обращается в бесконечность (в сечениях эллипсоида плоскостями координат). С помощью параметрического представления приходим к собственному двойному интегралу.

Ответ. $4\pi\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$.

7) Если выражение (16) для объема V тела преобразовать по формуле (10) в обыкновенный двойной интеграл, то получим

$$V = \pm\frac{1}{3}\iint\limits_{(\Delta)} (Ax + By + Cz)\,du\,dv. \tag{23}$$

Учитывая значения A, B, C как определителей, легко результат этот представить в виде

$$V = +\frac{1}{3}\iint\limits_{(\Delta)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv.$$

При этом знак плюс ставится, если A, B, C имеют знаки направляющих косинусов внешней нормали; в противном случае ставится знак минус.

8) Вычислить по этой формуле объем V эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

исходя из параметрического представления (22) ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$).

Указание. Определитель равен $abc \sin\varphi$. *Ответ.* $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

9) Если поверхность, ограничивающая тело, задана полярным уравнением:

$$r = r(\varphi, \theta),$$

то, как в **629**, 14), можно перейти к параметрическому представлению поверхности, причем роль параметров играют φ, θ.

Предлагается, исходя из этого представления, вывести из формулы (23) изящное выражение для объема:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(\Delta)} r^3 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta, \tag{24}$$

где (Δ) есть область изменения параметров φ, θ.

10) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2 xy.$$

Решение. Исходя из полярного уравнения поверхности

$$r = a \sin\varphi \sqrt{\sin 2\theta},$$

используем формулу (24). Будем иметь:

$$V = \frac{4}{3}a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta \cos^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta.$$

Вычисляя первый интеграл по формуле (8) из **312**, а второй — по формуле в **534**, 4), (а), окончательно найдем:

$$V = \frac{\sqrt{2\pi}}{48} a^3 \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

11) Проверить формулу Стокса (21) для функций

$$P = x^2y^3,\ Q = 1,\ R = z,$$

если контур (L) есть окружность $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, а поверхностью (S) служит полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z > 0$). При этом на поверхности возьмем верхнюю сторону, а контуру придадим направление против часовой стрелки (если смотреть сверху).

Интеграл

$$\int\limits_{(L)} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz,$$

очевидно, приводится к одному первому члену

$$\int\limits_{(L)} x^2y^3\,dx = -a^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\theta \cos^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{8}a^6.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

Вычисляя интеграл

$$-3\iint\limits_{(S)} x^2y^2\,dx\,dy = -3 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2\,dx\,dy = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

придем к тому же результату.

12) Проверить формулу Стокса для функций

$$P = y, \quad Q = z, \quad R = x,$$

если (L) есть окружность

$$x = a\cos^2 t, \quad y = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \quad z = a\sin^2 t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

а (S) — ограниченный ею круг.

(Круг этот получается в пересечении плоскости $x + z = a$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; его радиус равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$.)

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi} (-\sqrt{2}\sin^2 t + 2\cos^3 t\sin t)\,dt = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2,$$

поверхностный же

$$-\iint\limits_{(S)} dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx$$

оказывается равен сумме площадей проекций упомянутого круга на координатные плоскости, взятой с обратным знаком, т. е. $-2\frac{\pi a^2}{2}\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2$.

13) Проверить формулу Стокса, положив

$$P = y^2 + z^2, \quad Q = z^2 + x^2, \quad R = x^2 + y^2$$

и взяв в качестве (S) поверхность, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 2rx$ из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ $(R > r,\ z > 0)$.

Прибегнув к параметрическому представлению кривой

$$x = r(1+\cos t), y = r\sin t, \ z = \sqrt{2r(R-r)}\sqrt{1+\cos t} \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,*,$$

* Если положить $x - r = r\cos t$, $y = r\sin t$, то геометрический смысл параметра t ясен; подставляя эти выражения в уравнение сферы, найдем и зависимость z от t.

для криволинейного интеграла найдем довольно сложное выражение в виде обыкновенного интеграла:

$$\int_0^{2\pi}\left\{[r^2 \sin^2 t + 2r(R-r)(1+\cos t)](-r \sin t) + \right.$$
$$+ [2r(R-r)(1+\cos t) + r^2(1+\cos t)^2]\, r \cos t +$$
$$\left. + [r^2(1+\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\right\}dt.$$

Но первое и третье слагаемые в фигурных скобках имеют вид $f(\cos t)\,d\cos t$, и интегралы от них, ввиду периодичности косинуса, равны нулю. Выполнив остающуюся выкладку, получим $2\pi Rr^2$.

Поверхностный же интеграл

$$2\iint_{(S)} (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy,$$

распространенный на верхнюю сторону упомянутой поверхности, преобразуем сначала в интеграл другого типа:

$$2\iint_{(S)} [(y-z)\cos\lambda + (z-x)\cos\mu + (x-y)\cos\nu]\,dS.$$

Так как

$$\cos\lambda = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\mu = \frac{y}{R}, \quad \cos\nu = \frac{z}{R},$$

то, подставляя эти выражения, произведем упрощение и сведем искомый интеграл к следующему:

$$2\iint_{(S)} (z-y)\,dS.$$

В силу симметрии поверхности относительно плоскости xz, интеграл $\iint_{(S)} y\,dS$ оказывается нулем. Остающийся же интеграл снова преобразуем к интегралу второго типа:

$$2\iint_{(S)} z\,dS = 2\iint_{(S)} \frac{z}{\cos\nu}\,dx\,dy = 2R\iint_{(S)} dx\,dy = 2\pi Rr^2.$$

14) Проверить формулу Стокса

$$\int_{(L)} (z^2-x^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy + (y^2-z^2)\,dz =$$
$$= 2\iint_{(S)} x\,dx\,dy + y\,dy\,dz + z\,dz\,dx,$$

взяв за (S) винтовую поверхность

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv$$
$$(a \leqslant u \leqslant b; \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi),$$

ограниченную двумя винтовыми линиями и двумя прямолинейными отрезками, в совокупности образующими контур (L).

Ответ. Если поверхностный интеграл распространить на верхнюю сторону указанной поверхности, а криволинейный взять в соответствующем направлении, то оба интеграла равны $\pi c(b^2 - a^2)$.

641. Приложение формулы Стокса к исследованию криволинейных интегралов в пространстве. Пусть в открытой области (T) заданы функции P, Q, R, непрерывные со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}.$$

С помощью формулы Стокса легко установить *условия, необходимые и достаточные для того, чтобы обращался в нуль интеграл*

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{25}$$

взятый по любому простому (т. е. не пересекающему себя) замкнутому кусочно-гладкому контуру (L), лежащему в (T).

Впрочем, для того чтобы возможно было использовать формулу Стокса, нужно наперед наложить на трехмерную область (T), к которой относятся наши рассмотрения, естественное ограничение. Именно, нужно потребовать, чтобы, *каков бы ни был простой замкнутый кусочно-гладкий контур (L) в области (T), на него можно было «натянуть» кусочно-гладкую (самонепересекающуюся) поверхность (S), имеющую (L) своим контуром и также целиком содержащуюся в (T).* Это свойство аналогично свойству односвязности плоской области; при наличии его пространственную область (T) также называют («поверхностно»*) односвязной. Упомянем для примера, что тело, ограниченное двумя концентрическими сферическими поверхностями, будет в этом смысле односвязным, а тор нет.

Пусть же область (T) будет (поверхностно) односвязной. Натянув на контур (L), как сказано, поверхность (S), заменим по формуле Стокса криволинейный интеграл (25) поверхностным интегралом

$$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx.$$

Для обращения его в нуль, очевидно, достаточны условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{Б}$$

Эти условия в то же время и необходимы, в чем легко убедиться (наподобие n° **601**), если рассматривать плоские фигуры (S),

* В отличие от другого типа односвязности пространственной области, о которой речь будет ниже [**652**].

лежащие в плоскостях, параллельных поочередно той или иной из координатных плоскостей.

Читатель видит, что мы использовали здесь формулу Стокса совершенно так же, как в n° **601** с аналогичными целями была использована формула Грина.

Легко доказать, что *те же условия* (Б) *будут необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл*

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{26}$$

не зависел от формы кривой (AB), соединяющей любые две точки A и B области (T), в предположении, конечно, что эта область поверхностно односвязна.

Необходимость. Если предположить интеграл (26) независящим от пути, то (как и в n° **561**) отсюда следует обращение в нуль интеграла (25) по простому замкнутому контуру (L), а значит и выполнение условия (Б).

Достаточность. Из (Б) вытекает обращение в нуль интеграла (25) по простому замкнутому контуру (L). Отсюда (как и в **561**) легко получается равенство

$$\int\limits_{(AIB)} = \int\limits_{(AIIB)}, \tag{27}$$

если только кривые (AIB) и $(AIIB)$ не имеют общих точек, кроме A и B. Если же это не так, и взятые кривые пересекаются, то здесь вопрос оказывается более простым, чем в плоском случае: в связной пространственной области (T) всегда можно взять такую третью кривую $(AIIIB)$, которая уже не пересекалась бы ни с одной из прежних. Тогда

$$\int\limits_{(AIB)} = \int\limits_{(AIIIB)}, \quad \int\limits_{(AIIB)} = \int\limits_{(AIIIB)},$$

откуда и следует (27).

С этим исследованием можно связать и *вопрос о том, будет ли дифференциальное выражение*

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{28}$$

полным дифференциалом от некоторой однозначной функции трех переменных. Необходимость условий (Б), для того чтобы это было так, проверяется непосредственно, см. n° **564**. Но в то время как там достаточность условий (Б) была установлена лишь для случая, когда основная область (T) есть прямоугольный параллелепипед, теперь нетрудно сделать это и в общем случае

(поверхностно) односвязной области. Первообразная может быть написана сразу в виде криволинейного интеграла

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

который — при соблюдении условий (Б) — не зависит от пути. Итак, для области (T) указанного типа, *условия* (Б) *оказываются необходимыми и достаточными для того, чтобы выражение* (28) *было точным дифференциалом.*

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ТРОЙНЫЕ И МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Тройной интеграл и его вычисление

642. Задача о вычислении массы тела. Пусть дано некоторое тело (V), заполненное массами, и в каждой его точке $M(x, y, z)$ известна плотность

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$$

распределения этих масс. Требуется определить всю массу m тела.

Для решения этой задачи разложим тело (V) на ряд частей:

$$(V_1),\ (V_2), \ldots,\ (V_n)$$

и выберем в пределах каждой из них по точке

$$M_i(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i).$$

Примем приближенно, что в пределах части (V_i) плотность постоянна и равна как раз плотности $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ в выбранной точке. Тогда масса m_i этой части приближенно выразится так:

$$m_i \doteq \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i,$$

масса же всего тела будет

$$m \doteq \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i.$$

Если диаметры всех частей стремятся к нулю, то в пределе это приближенное равенство становится точным, так что

$$m = \lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i, \tag{1}$$

и задача решена.

Мы видим, что решение задачи и здесь привело к рассмотрению предела своеобразной суммы — типа *интегральных сумм* различного вида, с которыми мы многократно имели дело на протяжении всего курса.

Подобного рода пределы приходится часто рассматривать в механике и физике; они получили название *тройных интегралов*. В принятых для них обозначениях полученный выше результат запишется так:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z)\, dV. \tag{2}$$

Теории тройных интегралов и их важным приложениям посвящена, в основном, настоящая глава. Так как целый ряд предложений, установленных для двойных интегралов, переносится вместе с их доказательствами на случай тройных интегралов, то мы обычно будем довольствоваться лишь формулировкой этих предложений, предоставляя читателю перефразировать прежние доказательства.

643. Тройной интеграл и условия его существования. При построении общего определения нового интегрального образования — тройного интеграла, основную роль играет понятие объема тела, наподобие того как понятие площади плоской фигуры лежало в основе определения двойного интеграла.

С понятием объема мы уже знакомы по первому тому и сталкивались с ним не раз. Условие существования объема для данного тела заключается в том, чтобы ограничивающая его поверхность имела объем 0 [341]. Только такие поверхности мы и будем рассматривать, так что существование объемов во всех нужных нам случаях тем самым обеспечивается. В частности, как мы знаем, в состав указанного класса поверхностей входят кусочно-гладкие поверхности.

Пусть теперь в некоторой пространственной области (V) задана функция $f(x, y, z)$. Разобьем эту область с помощью сети поверхностей на конечное число частей $(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$, имеющих соответственно объемы $V_1, V_2, \ldots, V_n$. В пределах i-го элемента (V_i) возьмем по произволу точку (ξ_i, η_i, ζ_i), значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ умножим на объем V_i и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i.$$

Конечный предел I этой суммы, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей (V_i), и называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ в области (V). Он обозначается символом

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Конечный предел подобного вида может существовать только для ограниченной функции; для такой функции вводятся, кроме интегральной суммы σ, еще *суммы Дарбу*:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i,$$

где

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}.$$

Обычным путем устанавливается, что для существования интеграла необходимо и достаточно условие

$$\lim (S - s) = 0$$

или

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ есть колебание функции f в области (V_i). [Заметим, что при существовании интеграла обе суммы s, S также имеют его своим пределом.]

Отсюда непосредственно следует, что *всякая непрерывная функция f интегрируема*.

Можно несколько расширить эти условия, а именно: *интегрируема всякая ограниченная функция, все разрывы которой лежат на конечном числе поверхностей с объемом* 0.

Доказательство этого утверждения [ср. **590**] основано на следующей лемме:

Если область (V), содержащая поверхность (S) с объемом 0, *разложена на элементарные области, то сумма объемов тех из них, которые задевают поверхность (S), стремится к нулю вместе с диаметрами всех частичных областей.*

644. Свойства интегрируемых функций и тройных интегралов. Достаточно перечислить эти свойства [доказываются они аналогично изложенному в **592**].

1°. *Существование и величина тройного интеграла не зависят от значений, принимаемых функцией вдоль конечного числа поверхностей с объемом* 0.

2°. *Если* $(V) = (V') + (V'')$, то

$$\iiint_{(V)} f\,dV = \iiint_{(V')} f\,dV + \iiint_{(V'')} f\,dV,$$

причем из существования интеграла слева вытекает уже существование интегралов справа, и обратно.

3°. *Если* $k=$ const., *то*

$$\iiint\limits_{(V)} kf\,dV = k\iiint\limits_{(V)} f\,dV,$$

причем из существования интеграла справа следует и существование интеграла слева.

4°. *Если в области* (V) *интегрируемы две функции* f *и* g, *то интегрируема и функция* $f\pm g$, *причем*

$$\iiint\limits_{(V)} (f\pm g)\,dV = \iiint\limits_{(V)} f\,dV \pm \iiint\limits_{(V)} g\,dV.$$

5°. *Если для интегрируемых в области* (V) *функций* f *и* g *выполняется неравенство* $f\leqslant g$, *то*

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV \leqslant \iiint\limits_{(V)} g\,dV.$$

6°. *В случае интегрируемости функции* f *интегрируема и функция* $|f|$, *и имеет место неравенство*

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f\,dV\right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f|\,dV.$$

7°. *Если интегрируемая в* (V) *функция* f *удовлетворяет неравенству*

$$m\leqslant f\leqslant M,$$

то

$$mV\leqslant \iiint\limits_{(V)} f\,dV \leqslant MV.$$

Иными словами, имеет место теорема о среднем значении

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV = \mu V \quad (m\leqslant\mu\leqslant M).$$

В случае непрерывности функции f эту формулу можно написать в виде

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\,V, \tag{3}$$

где $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ есть некоторая точка области (V).

Далее, легко распространяется на трехмерный случай и содержание n° **593**: так же, как и там, устанавливается понятие функции от (трехмерной) области, в частности, аддитивной функции. Важным примером такой функции (см. 2°) является интеграл по переменной области (v):

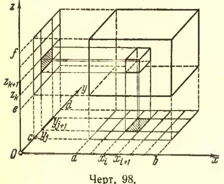
$$\Phi((v)) = \iiint\limits_{(v)} f\,dv. \tag{4}$$

Вводится аналогично прежнему понятие производной функции $\Phi((v))$ по области в данной точке M; так называется предел

$$\lim_{(v)\to M} \frac{(\Phi(v))}{v}$$

при стягивании к точке M содержащей ее области (v).

8°. *Если подинтегральная функция непрерывна, то производной по области в точке $M(x, y, z)$ от интеграла* (4) *будет как раз значение подинтегральной функции в этой точке,* т. е. $f(M) = f(x, y, z)$.



Черт. 98.

Таким образом, при сделанном предположении интеграл (4) служит для функции f в некотором смысле «первообразной» и, как доказывается аналогично плоскому случаю, единственной аддитивной первообразной.

645. Вычисление тройного интеграла, распространенного на параллелепипед. Изложение вопроса о вычислении тройного интеграла начнем с того случая, когда тело, в котором определена функция $f(x, y, z)$, представляет собой прямоугольный параллелепипед $(T) = [a, b; c, d; e, f]$ (черт. 98), проектирующийся на плоскость yz в прямоугольник $(R) = [c, d; e, f]$.

Теорема. *Если для функции $f(x, y, z)$ существует тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dT \tag{5}$$

и — при каждом постоянном x из $[a, b]$ — двойной интеграл

$$I(x) = \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,dR, \tag{6}$$

то существует также повторный интеграл

$$\int_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,dR, \tag{7}$$

и выполняется равенство

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dT = \int_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,dR. \tag{8}$$

Доказательство аналогично проведенному в n° **594**. Разделив промежутки $[a, b]$, $[c, d]$ и $[e, f]$ на части с помощью точек

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b,$$
$$y_0 = c < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_m = d,$$
$$z_0 = e < z_1 < \ldots < z_k < \ldots < z_l = f,$$

тем самым разложим параллелепипед (T) на элементарные параллелепипеды

$$(T_{i,j,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, \ldots, l-1)$$

и одновременно прямоугольник (R) — на элементарные прямоугольники

$$(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

(где j и k пробегают те же значения, что и только что).

Положив

$$m_{i,j,k} = \inf_{(T_{i,j,k})} \{f\},\quad M_{i,j,k} = \sup_{(T_{i,j,k})} \{f\},$$

имеем в силу **644**, 7°,

$$m_{i,j,k}\,\Delta y_j \Delta z_k \leqslant \iint\limits_{(R_{j,k})} f(x, y, z)\,dy\,dz \leqslant M_{i,j,k}\,\Delta y_j \Delta z_k$$

для всех значений x из $[x_i, x_{i+1}]$. Фиксируя произвольное значение $x = \xi_i$ в этом промежутке, просуммируем подобные неравенства для всех значений j и k; мы получим неравенства

$$\sum_j \sum_k m_{i,j,k}\,\Delta y_j \Delta z_k \leqslant I(\xi_i) = \iint\limits_{(R)} f(\xi_i, y, z)\,dy\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \sum_j \sum_k M_{i,j,k}\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Наконец, умножим эти неравенства почленно на Δx_i и просуммируем на этот раз по значку i:

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k}\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leqslant \sum_i I(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j \sum_k M_{i,j,k}\,\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Крайние члены представляют собой суммы Дарбу для интеграла (5) и стремятся к нему, как к пределу, при стремлении к нулю всех разностей Δx_i, Δy_j, Δz_k. Значит, к тому же пределу стремится и

интегральная сумма, стоящая посредине. Этим доказано одновременно как существование интеграла (7), так и равенство (8).

Если предположить еще существование простого интеграла

$$\int_e^f f(x,\ y,\ z)\,dz \tag{9}$$

при любых значениях x из $[a,\ b]$ и y из $[c,\ d]$, то двойной интеграл в равенстве (8) можно заменить повторным [594] и окончательно получим:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,\ y,\ z)\,dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,\ y,\ z)\,dz. \tag{10}$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла приводится к последовательному вычислению трех простых интегралов. Роли переменных $x,\ y,\ z$ в формуле (10), разумеется, могут быть произвольно переставлены.

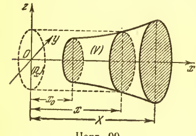
Предлагаем читателю убедиться самому, что из существования тройного интеграла (5) и простого интеграла (9) вытекает формула:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x,\ y,\ z)\,dT = \iint\limits_{(Q)} dx\,dy \int_e^f f(x,\ y,\ z)\,dz, \tag{11}$$

где $(Q) = [a,\ b;\ c,\ d]$. И здесь роли переменных можно переставлять.

В частности, для случая непрерывной функции $f(x,\ y,\ z)$, очевидно, имеют место все формулы (8), (10), (11) и им подобные, получающиеся перестановкой переменных.

646. Вычисление тройного интеграла по любой области. Как и в n° **596**, общий случай интеграла, распространенного на тело (V) любой формы, может быть легко приведен к только что рассмотренному. Именно, если функция $f(x,\ y,\ z)$ определена в области (V), то вместо нее следует лишь ввести функцию $f^*(x,\ y,\ z)$, определенную в объемлющем (V) прямоугольном параллелепипеде (T), полагая



Черт. 99.

$$f^*(x,\ y,\ z) = \begin{cases} f(x,\ y,\ z) & \text{в } (V), \\ 0 & \text{вне } (V). \end{cases}$$

Этим путем и получаются все приводимые ниже формулы.

Мы остановимся на случаях, представляющих наибольший интерес.

Пусть тело (V) содержится между плоскостями $x = x_0$ и $x = X$ и каждою параллельною им плоскостью, отвечающею фиксированному значению x $(x_0 \leqslant x \leqslant X)$, пересекается по некоторой фигуре, имею-

щей площадь; через (P_x) обозначим ее проекцию на плоскость yz (черт. 99). Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_{x_0}^{X} dx \iint\limits_{(P_x)} f(x, y, z)\, dy\, dz \qquad (8^*)$$

в предположении существования тройного и двойного интегралов. Это — аналог формулы (8).

Пусть, далее, тело (V) представляет собой «цилиндрический брус», ограниченный снизу и сверху, соответственно, поверхностями

$$z = z(x, y) \text{ и } z = Z(x, y),$$

проектирующимися на плоскость xy в некоторую фигуру (D), ограниченную кривой (K) с площадью 0; с боков тело (V) ограничено цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z, и с кривой (K) в роли направляющей (черт. 96).

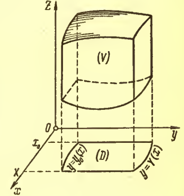
Тогда аналогично формуле (11) имеем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z)\, dz; \qquad (11^*)$$

при этом предполагается существование тройного интеграла и простого — внутреннего — интеграла справа.

Если область (D) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми (черт. 100)

$$y = y_0(x) \text{ и } y = Y(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X)$$



Черт. 100.

и прямыми $x = x_0$, $x = X$, то тело (V) подходит под оба типа, рассмотренных выше. Заменяя двойной интеграл — то ли в формуле (8*), то ли в формуле (11*) — повторным, получим

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (10^*)$$

Эта формула обобщает формулу (10).

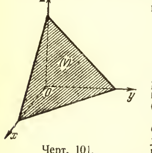
Как и в простейшем случае, который был рассмотрен в предыдущем n°, и здесь непрерывность функции $f(x, y, z)$ обеспечивает приложимость всех формул (8*), (11*), (10*) и им подобных, получающихся из них перестановкой переменных x, y, z.

647. Несобственные тройные интегралы. В случаях, когда область интегрирования простирается в бесконечность или подинтег-

ральная функция перестает быть ограниченной вблизи особых точек, линий или поверхностей, несобственный тройной интеграл получается с помощью *дополнительного предельного перехода*, исходя из собственного интеграла. Своеобразие многомерного случая по сравнению с линейным случаем уже было отмечено в связи с изучением несобственных двойных интегралов, и сейчас к этому добавить нечего.

Несобственные тройные интегралы также являются необходимо абсолютно сходящимися. Это обстоятельство сводит весь вопрос о существовании и вычислении таких интегралов к случаю положительной (неотрицательной) подинтегральной функции.

Ограничиваясь этим предположением, можно, как и в случае двойных интегралов, установить связь между тройным интегралом и разного типа повторными интегралами. Останавливаться на этом мы не будем.



Черт. 101.

648. Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

распространенный на тетраедр (V), ограничиваемый плоскостями $x=0$, $y=0$ $z=0$ и $x+y+z=1$ (черт. 101).

Решение. Проекцией тела на плоскость xy служит треугольник, образованный прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$. Ясно, что границами изменения x служат числа 0 и 1, а при постоянном x в этих границах переменная y изменяется от 0 до $1-x$. Если же фиксированы и x, и y, то точка может перемещаться по вертикали от плоскости $z=0$ до плоскости $x+y+z=1$; таким образом, пределами изменения z будут 0 и $1-x-y$.

По формуле (10*) имеем

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Последовательно вычисляем интегралы, начиная с внутреннего:

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right],$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right),$$

наконец,

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

2) Вычислить интеграл

$$K=\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где (V) есть верхняя половина эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

Решение. Проекцией тела на плоскость xy является эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. Поэтому пределами изменения x являются числа $-a$ и a, при фиксированном же x переменная y изменяется от $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ до $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Тело ограничено снизу плоскостью xy, а сверху — поверхностью эллипсоида, так что при фиксированных x и y пределами изменения z служат

$$0 \text{ и } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

По той же формуле (10*)

$$I=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}z\,dz=$$

$$=\frac{c^2}{2}\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=c^2\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy^*=\frac{2bc^2}{3a^3}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=$$

$$=\frac{4bc^2}{3a^3}\int\limits_{0}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^*=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

Вычисление можно было бы провести и другим путем. Именно, по формуле (8*), лишь меняя в ней роли переменных x и z, будем иметь

$$I=\int\limits_{0}^{c}dz\iint\limits_{(R_z)}z\,dx\,dy=\int\limits_{0}^{c}z\,dz\iint\limits_{(R_z)}dx\,dy,$$

где (R_z) есть проекция на плоскость xy сечения эллипсоида плоскостью $Z=z$ (проектирование происходит без искажения). Но двойной интеграл

$$\iint\limits_{(R_z)}dx\,dy$$

* Ввиду четности подинтегральной функции.

есть не что иное, как площадь R_z этой проекции. Так как контур проекции имеет на плоскости xy уравнение

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,$$

т. е. представляет собою эллипс с полуосями

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

то, как мы уже знаем,

$$R_z=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Следовательно,

$$I=\pi ab\int_0^c z\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{\pi abc^2}{4}.$$

Выкладка значительно упростилась, но лишь потому, что удалось использовать известную нам величину площади эллипса.

3) Вычислить интеграл

$$L=\iiint\limits_{(T)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть весь эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$

Решение. Применяя второй способ, указанный при решении предыдущей задачи, получим

$$L=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}dx\iint\limits_{(P_x)}dy\,dz+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}dy\iint\limits_{(Q_y)}dz\,dx+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}dz\iint\limits_{(R_z)}dx\,dy.$$

Отсюда

$$L=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\frac{\pi ca}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy+$$

$$+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{5}\cdot\pi abc.$$

4) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_{(A)}z\,dx\,dy\,dz,$$

где тело (A) ограничено конической поверхностью $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z=h$ (черт. 102).

Решение. (а) Проекция (Q) конуса на плоскость xy есть круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$. По формуле (11*)

$$I = \iint\limits_{(Q)} dx\,dy \int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_{(Q)} \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right] dx\,dy$$

или, переходя к полярным координатам,

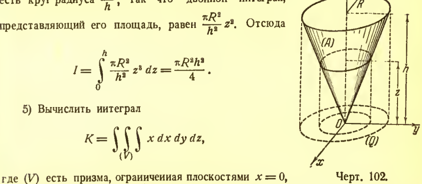
$$I = \frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R (R^2-r^2)\,r\,dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(б) При другом способе решения можно написать

$$I = \int\limits_0^h z\,dz \iint\limits_{(D)} dx\,dy,$$

где (D) есть проекция на плоскость xy сечения конуса плоскостью, ей параллельной и лежащей на высоте z над ней. Эта проекция есть круг радиуса $\frac{Rz}{h}$, так что двойной интеграл, представляющий его площадь, равен $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$. Отсюда

$$I = \int\limits_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3\,dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$



Черт. 102.

5) Вычислить интеграл

$$K = \iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz,$$

где (V) есть призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$ и $x+z=a$.

Указание. Воспользоваться формулой (8*); (P_x) есть прямоугольник со сторонами h и $a-x$.

Ответ. $K = \frac{a^3h}{6}$.

6) Найти значение интеграла

$$J = \iiint\limits_{(T)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть общая часть двух сфер (черт. 103):

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz.$$

Решение. Пересечение их поверхностей происходит по плоскости $z = \frac{R}{2}$. Сечения тела (T) плоскостями, параллельными плоскости xy, суть круги.

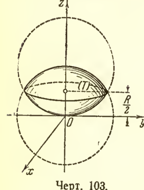
Переходя и здесь к повториому интегралу — простому от двойиого, найдем, что

$$J=\pi\int_0^{\frac{1}{2}R} z^2(2Rz-z^2)\,dz+\pi\int_{\frac{1}{2}R}^{R} z^2(R^2-z^2)\,dz=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

7) Вычислить интеграл

$$S=\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz,$$

где (V) есть общая часть параболоида $x^2+y^2\leqslant 2az$ и сферы $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.



Черт. 103.

Решение. Прежде всего, раскрывая подинтегральиое выражеиие, видим, что интегралы от члеиов $2xy$, $2xz$, $2yz$ по соображеииям симметрии исчезают *. Таким образом,

$$S=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

По формуле (8*) (с перестановкой ролей x и z)

$$S=\int_0^a dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2az}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy+$$
$$+\int_a^{a\sqrt{3}} dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3a^2-z^2}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy.$$

Двойные иитегралы легко вычисляются с помощью перехода к поляриым координатам:

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2az}}(r^2+z^2)\,r\,dr=2\pi(a^2z^2+az^3),$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}}(r^2+z^2)\,r\,dr=\frac{1}{2}\pi(9a^4-z^4).$$

Отсюда

$$S=2\pi\int_0^a(a^2z^2+az^3)\,dz+\frac{1}{2}\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(9a^4-z^4)\,dz=$$
$$=\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right).$$

* Это можно обосновать (прибегиув к повторным интегралам) свойствами лишь простых и двойных интегралов.

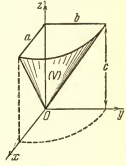
8) Вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_{(T)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где (T) есть общая часть конуса $y^2+z^2\leqslant x^2$ и сферы $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ $(x\geqslant 0)$.

Ответ. $I=\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$.

9) Пусть дан конус $\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$; плоскостью $z=c$ он пересекается по эллипсу, проекция которого на плоскость xy имеет уравнение $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Рассмотрим тело (V), лежащее в первом октанте и ограниченное упомянутыми конической поверхностью и плоскостью $z=c$, а также двумя координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ (черт. 104).



Черт. 104.

Предлагается вычислить распространенный на это тело интеграл

$$A=\iiint\limits_{(V)}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz.$$

(а) Интегрируя сначала по z, затем по y и, наконец, по x, находим пределы изменения:

$$\text{для } x\text{: } 0 \text{ и } a, \quad \text{для } y\text{: } 0 \text{ и } b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$\text{для } z\text{: } c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2} \text{ и } c.$$

Тогда

$$A=\int\limits_0^a x\,dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} y\,dy\int\limits_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

и последовательно

$$\int\limits_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{c}\left[1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right],$$

$$2\sqrt{c}\int\limits_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left[1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right]y\,dy=$$

$$=\frac{b^2\sqrt{c}}{a^2}(a^2-x^2)-\frac{4}{5}b^2\sqrt{c}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right],$$

$$A=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}.$$

(б) Выкладки немного упрощаются, если интегрировать в обратном порядке. На плоскость yz наше тело проектируется в виде треугольника, ограниченного прямыми $y=0$, $z=c$ и $y=\frac{b}{c}z$. Поэтому пределы изменения будут

$$\text{для } z\text{: } 0 \text{ и } c, \text{ для } y\text{: } 0 \text{ и } \frac{b}{c}z,$$

$$\text{для } x\text{: } 0 \text{ и } a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

и искомый интеграл перепишется так:

$$A=\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}}\int_0^{\frac{b}{c}z} y\,dy \int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} x\,dx.$$

В этом случае

$$\int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} x\,dx=\frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right],$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]y\,dy=\frac{1}{8}\,\frac{a^2b^2}{c^4}\,z^4,$$

$$A=\frac{1}{8}\,\frac{a^2b^2}{c^4}\int_0^c z^{\frac{7}{2}}\,dz=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}.$$

(10) Найти интегралы

$$\text{(а)}\quad I_1=\iiint\limits_{(V)} z^m\,dx\,dy\,dz,\qquad \text{(б)}\quad I_2=\iiint\limits_{(V)} x^m\,dx\,dy\,dz,$$

где тело (V) — то же, что и в предыдущей задаче (m — натуральное).

Указание. Интегрирования расположить в том же порядке, как и в 9) (б). Во втором случае интеграл

$$\int_0^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{bz}{c}\right)^2-y^2\right]^{\frac{m+1}{2}}dy$$

приводится к известному интегралу $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}\theta\,d\theta$ [300, 1)].

Ответ. (а) $I_1=\frac{\pi}{4}\,\frac{abc^{m+1}}{m+3}$.

$$\text{(б)}\quad I_2=\begin{cases}\dfrac{a^{m+1}bc}{m+3}\,\dfrac{(m-1)!!}{(m+2)!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (\text{при } m \text{ четном}),\\[2mm] \dfrac{a^{m+1}bc}{m+3}\,\dfrac{(m-1)!!}{(m+2)!!} & (\text{при } m \text{ нечетном}).\end{cases}$$

11) Вычислить интеграл

$$H = \iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z \geqslant 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}} \qquad (\alpha > \beta > \gamma > 0).$$

Решение. Имеем

$$H = \int\limits_0^R x\,dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{z\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}};$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \ldots dz = \frac{1}{\gamma^2}\left[\sqrt{\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2+(\beta^2-\gamma^2)y^2}-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}\right],$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [\ldots]\,y\,dy = \frac{1}{3\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}\left[\beta^2R^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}} -$$

$$-\frac{1}{3\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}\left[\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2\right]^{\frac{3}{2}}+\frac{\alpha^3}{3\beta^2\gamma^2}x^3$$

и, наконец после элементарных (хотя и длинных) преобразований

$$H = \frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

12) Показать, что употребительные формулы для вычисления (а) объема цилиндрического бруса, ограниченного поверхностью $z = z(x, y)$,

$$V = \iint\limits_{(P)} z\,dx\,dy$$

и (б) объема тела по поперечным сечениям:

$$V = \int\limits_a^b Q(x)\,dx$$

суть следствия основной формулы:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz.$$

Указание. Применить к последнему интегралу формулы (11*) и (8*) *.

649. Механические приложения. Естественно, что все геометрические и механические величины, связанные с распределением масс в пределах некоторого тела (V) в пространстве, в принципе выражаются на этот раз тройными интегралами, распространенными на тело (V). Здесь также проще всего пользоваться принципом «суммирования бесконечно малых элементов» [ср. **348 — 356** и **598**].

---

* Дальнейшие примеры на вычисление тройных интегралов можно позаимствовать из п° **675**, где рассматриваются интегралы n-й кратности, взяв там $n = 3$.

Обозначим через ρ плотность распределения масс в произвольной точке тела (V); она является функцией от координат точки; эту функцию мы будем всегда предполагать непрерывной. Суммируя элементы массы $dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$, для величины всей массы будем иметь

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho\, dV = \iiint\limits_{(V)} \rho\, dx\, dy\, dz \tag{12}$$

[ср. 642].

Исходя из элементарных статических моментов

$$dM_{yz} = x\, dm = x\rho\, dV, \quad dM_{zx} = y\, dm = y\rho\, dV,$$
$$dM_{xy} = z\, dm = z\rho\, dV,$$

найдем самые статические моменты:

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x\rho\, dV, \quad M_{zx} = \iiint\limits_{(V)} y\rho\, dV, \quad M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\rho\, dV, \tag{13}$$

а по ним — и координаты центра тяжести:

$$\xi = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\rho\, dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\rho\, dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\rho\, dV}{m}. \tag{14}$$

В случае однородного тела, $\rho = \text{const}$, получаем проще:

$$\xi = \frac{\iiint\limits_{(V)} x\, dV}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\, dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\, dV}{V}.$$

Сами собой понятны и формулы для моментов инерции относительно осей координат:

$$\left.\begin{aligned} I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\rho\, dV, \quad I_y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\rho\, dV, \\ I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\rho\, dV \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

или относительно координатных плоскостей:

$$I_{zy} = \iiint\limits_{(V)} x^2\rho\, dV, \quad I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y^2\rho\, dV, \quad I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z^2\rho\, dV. \tag{16}$$

Наконец, пусть массы, заполняющие тело (V), оказывают притяжение на точку $A(\xi, \eta, \zeta)$ (массы 1) по закону Ньютона. Сила притяжения со стороны элемента $dm = \rho\, dV$ массы имеет на оси координат проекции *

$$dF_x = \frac{x - \xi}{r^3}\rho\, dV, \quad dF_y = \frac{y - \eta}{r^3}\rho\, dV, \quad dF_z = \frac{z - \zeta}{r^3}\rho\, dV,$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

---

* См. сноску ** на стр. 277.

есть расстояние элемента (или точки, в которой мы считаем сосредоточенной его массу) от точки A. Суммируя, для проекций полной силы $\vec{F}$ притяжения на оси координат получим

$$\left.\begin{aligned} F_x = \iiint\limits_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3}\rho\, dV, \quad F_y = \iiint\limits_{(V)} \frac{y-\eta}{r^3}\rho\, dV, \\ F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{z-\zeta}{r^3}\rho\, dV. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Аналогично определяется и потенциал нашего тела на точку:

$$W = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho\, dV}{r}. \tag{18}$$

Если точка A лежит вне тела, то все эти интегралы оказываются собственными. В этом случае можно дифференцировать интеграл W по любой из переменных ξ, η, ζ под знаком интеграла на основании соображений, сходных с теми, которыми мы пользовались в отношении простых интегралов [507]. В результате мы и получим, что

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z. \tag{19}$$

В случае же, когда точка A сама принадлежит телу (V), в этой точке $r = 0$, и подинтегральные функции в (17) и (18) вблизи нее перестают быть ограниченными. Ниже [663] будет показано, что эти интегралы, как несобственные, все же существуют, и для них выполняются основные соотношения (19).

650. Примеры. 1) В **598** для статических моментов однородного цилиндрического бруса (при $\rho = 1$) мы имели формулы:

$$M_{yz} = \iint\limits_{(P)} zx\, dx\, dy, \quad M_{zx} = \iint\limits_{(P)} zy\, dx\, dy, \quad M_{xy} = \frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2 dx\, dy.$$

Вывести их из общих формул (13) предыдущего n°.

Имеем, например,

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\, dV = \iint\limits_{(P)} dx\, dy \int\limits_0^{z(x,\, y)} z\, dz;$$

но

$$\int\limits_0^{z(x,\, y)} z\, dz = \frac{1}{2} z^2 \Bigg|_{z=0}^{z=z(x,\, y)},$$

что и приводит к требуемому результату.

В **598** взамен вычисления последнего интеграла были привлечены соображения из области механики (относительно статического момента элементарного столбика).

2) Аналогично, в предположении, что площадь поперечного сечения тела (V), параллельного некоторой плоскости, задана в функции расстояния x сечения от этой плоскости: $P(x)$, в **356** 1) была выведена для статического момента формула

$$M = \int\limits_a^b x P(x)\, dx.$$

Ее также можно получить, как следствие из общей формулы.

Именно, по формуле (8*)

$$M = \iiint\limits_{(V)} x\,dV = \int\limits_a^b x\,dx \iint\limits_{(P_x)} dy\,dz;$$

но внутренний интеграл как раз и выражает площадь сечения, которая наперед дана.

Замечание. Эти примеры привлекают наше внимание к тому факту, что некоторые из механических величин, относящихся к *пространственному* распределению масс, выражались (правда, при простейших предположениях) *двойными* и даже *простыми* интегралами. Эта иллюзия понижения кратности интеграла, как читатель видит, проистекает из того, что при представлении тройного интеграла в виде двойного от простого или простого от двойного внутренний интеграл в простых случаях оказывается уже известным из геометрических или механических соображений и не нуждается в вычислении.

3) Использовать задачи 2), 4), 10) п° **648** для определения положения центров тяжести рассмотренных там тел.

4) Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями параболоида $x^2+y^2=2az$ и сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$.

Решение. Статический момент относительно плоскости xy проще всего вычислить по формуле, упомянутой в 2), с заменой лишь x на z. Площадь $R(z)$ поперечного сечения равна $\pi\cdot 2az$ для z от 0 до a и $\pi(3a^2-z^2)$ для z от a до $a\sqrt{3}$. Таким образом,

$$M_{xy} = 2\pi a\int\limits_0^a z^2\,dz + \pi\int\limits_a^{a\sqrt{3}} (3a^2-z^2)\,dz = \frac{5}{3}\pi a^4.$$

Так как объем тела уже известен: $V = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3}-5)$ [**343**, 6)], то $\zeta = \frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)\,a$. По соображениям симметрии: $\xi=\eta=0$.

5) Найти массу и определить положение центра тяжести сферы

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2az,$$

если плотность в точках сферы обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Решение. По формуле (12) п° **648** масса

$$m = k\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Преобразуя тройной интеграл аналогично (8*), можно представить его в виде простого интеграла от двойного:

$$m = k\int\limits_0^{2a} dz \iint\limits_{(R_z)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

где (R_z) есть круг радиуса $\sqrt{2az - z^2}$. Внутренний интеграл без труда вычисляется, если перейти к полярным координатам; он оказывается равным

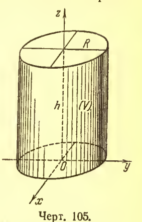
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\left(\sqrt{2az} - z\right).$$

Отсюда

$$m = \frac{4}{3}\pi k a^3.$$

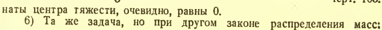
Аналогично вычисляется и статический момент

$$M_{xy} = k \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az} \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{16}{15}\pi k a^3.$$



Черт. 105.

Таким образом, $\zeta = \frac{4}{5}a$. Остальные две координаты центра тяжести, очевидно, равны 0.



6) Та же задача, но при другом законе распределения масс:

$$\rho = \frac{k}{x^2+y^2+z^2},$$

приводит к результатам:

$$m = 2\pi k a,$$

$$M_x = \pi k a^2, \quad \zeta = \frac{a}{2}.$$

В дальнейших задачах плотность ρ распределения масс предполагаем постоянной.

7) Найти притяжение центра основания цилиндра всей массой цилиндра (черт. 105).

При обозначениях чертежа имеем [см. 648, (17)]

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho z\,dV}{r^3} = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} dx\,dy \int_0^h \frac{\rho z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \rho\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right) dx\,dy =$$

$$= 2\pi\rho\left(R + h - \sqrt{R^2+h^2}\right);$$

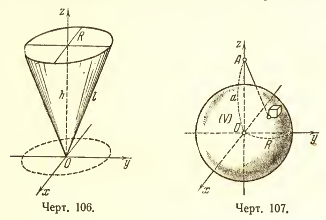
остальные две слагающие притяжения равны 0, так что притяжение направлено вертикально вверх.

8) Найти притяжение конусом его вершины (черт. 106).

Ответ. $F = F_z = \frac{2\pi h\rho}{l}(l - h).$

9) Найти притяжение, испытываемое любой точкой A (массы 1) со стороны сферы (черт. 107).

Решение. Обозначим радиус сферы через R, а расстояние OA через a. Оси координат расположим так, чтобы положительное направление оси z проходило через точку A. Тогда



Черт. 106. Черт. 107.

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho (z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \rho \int\limits_{-R}^{R} (z-a)\, dz \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2} \frac{dx\, dy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Внутренний интеграл легко вычислить путем перехода к полярным координатам, он равен

$$2\pi \left(\frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right).$$

Затем,

$$F_z = 2\pi\rho \int\limits_{-R}^{R} \left[\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right] dz.$$

Но

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{z-a}{|z-a|}\, dz = \int\limits_{-R}^{R} \operatorname{sign}(z-a)\, dz = \begin{cases} -2R, & \text{если } a \geqslant R, \\ -2a, & \text{если } a \leqslant R. \end{cases}$$

С помощью подстановки $t = \sqrt{R^2-2az+a^2}$ легко вычислить и второй интеграл:

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\, dz = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{R^3}{a^2} - 2R, & \text{если } a \geqslant R, \\ -\dfrac{4}{3}a, & \text{если } a \leqslant R. \end{cases}$$

Окончательно получаем, что

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\frac{1}{a^2}, & \text{если } a \geqslant R, \\ -\frac{4}{3}\pi a\rho, & \text{если } a \leqslant R. \end{cases}$$

В то же время, очевидно, $F_x = F_y = 0$. Итак, во всех случаях притяжение направлено к центру сферы.

При этом *точка, находящаяся вне сферы* $(a \geqslant R)$, *испытывает со стороны последней такое же притяжение, какое испытывала бы, если бы в центре сферы была сосредоточена вся ее масса* $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. С другой стороны, так как по отношению к точке, лежащей внутри сферы $(a < R)$, притяжение не зависит от R (и имеет такую же величину, как и в случае $R = a$), то ясно, что *наружный сферический слой не оказывает на внутреннюю точку никакого действия*.

10) Найти потенциал цилиндра на центр его основания.

Указание. Здесь проще начать с интегрирования по x и y, причем двойной интеграл вычислить с привлечением полярных координат:

$$W = \int_0^h \rho\, dz \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi\rho\int_0^h (\sqrt{R^2+z^2}-z)\,dz =$$

$$= \rho\pi R^2\cdot\ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R} + \rho\pi h(\sqrt{R^2+h^2}-h).$$

11) Найти потенциал конуса (а) на его вершину и (б) на центр его основания.

Указание — то же.

Ответ. (а) $W = \pi h(l-h)\rho$;

$$\text{(б)}\quad W = \frac{\pi R^2h^2}{l^3}\rho\ln\frac{R(l+R)}{h(l-h)} + \frac{\pi R^2 h}{l^2}\rho(R-h).$$

12) Найти потенциал сферы на произвольную точку A.

Решение. При обозначениях задачи 9) имеем

$$W = \rho\int_{-R}^{R} dz \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} =$$

$$= 2\pi\rho\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-2az+a^2}-|z-a|)\,dz.$$

Различая случаи $a \gtrless R$, имеем далее

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2az+a^2}\,dz = \frac{1}{3a}[(R+a)^3-|R-a|^3] =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}R^3\cdot\frac{1}{a}+2Ra & (a\geqslant R), \\ \frac{2}{3}a^2+2R^2 & (a\leqslant R), \end{cases}$$

и

$$\int_{-R}^{R} |z-a|\,dz = \begin{cases} 2Ra & (a \geqslant R), \\ a^2+R^2 & (a \leqslant R). \end{cases}$$

Таким образом,

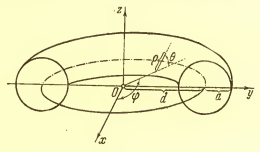
$$W = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\dfrac{1}{a} & (a \geqslant R), \\ \left(2\pi R^2-\dfrac{2}{3}\pi a^2\right)\rho & (a \leqslant R). \end{cases}$$

Мы видим прежде всего, что *потенциал на точку, лежащую вне сферы, таков же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в ее центре.*

Вторая же из полученных формул приводит к такому следствию. Если рассмотреть полую сферу с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, то ее потенциал на точку, лежащую в полости ($a < R_1$), представится в виде разности

$$W = W_2 - W_1 = \left(2\pi R_2^2-\frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho - \left(2\pi R_1^2-\frac{2}{3}\pi a^2\right)\rho = \\ = 2\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)\rho$$

и не зависит от a. *Потенциал полой сферы в пределах полости сохраняет постоянную величину.*



Черт. 108.

13) При обозначениях черт. 108 найти моменты инерции тора: I_z и I_x. [См. 648 (15).]

Указание. Имеем

$$I_z = 2\rho\int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

$$I_x = 2\rho\int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2} (y^2+z^2)\,dx\,dy,$$

где $R_1 = d-\sqrt{a^2-z^2}$, $R_2 = d+\sqrt{a^2-z^2}$. Двойные интегралы вычисляются переходом к полярным координатам.

Ответ. $I_z = \dfrac{\pi^2}{2}a^2d\,(4d^2+3a^2)\,\rho$, $I_x = \dfrac{\pi^2}{4}a^2d\,(4d^2+5a^2)\,\rho$.

14) Пусть тело (V) вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω. Тогда для элемента $dm = \rho\, dV$, отстоящего от оси вращения на расстояние $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, линейная скорость будет $v = r\omega$, а следовательно кинетическая энергия

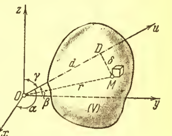
$$dT = \frac{1}{2}\, dm \cdot v^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2 r^2 \rho\, dV.$$

Отсюда легко получить выражение для кинетической энергии T всего вращающегося тела:

$$T = \frac{1}{2}\, \omega^2 \iiint\limits_{(V)} r^2 \rho\, dV = \frac{1}{2}\, \omega^2 \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \rho\, dV.$$

В последнем интеграле мы узнаем выражение для момента инерции I_z нашего тела относительно оси вращения [648 (15)]. Итак, окончательно имеем

$$T = \frac{1}{2}\, I_z \omega^2.$$



Черт. 109.

15) Поставим теперь задачей вычислить момент инерции рассматриваемого тела (V) относительно произвольной оси u (черт. 109), составляющий с координатными осями, соответственно, углы α, β, γ.

Для расстояния $MD = \delta$ произвольной точки $M(x, y, z)$ тела от оси имеем $\delta^2 = r^2 - d^2$, где, как известно из аналитической геометрии,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma^*.$$

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, получаем отсюда

$$\delta^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - \\ - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Теперь ясно, что

$$I_u = \iiint\limits_{(V)} \delta^2 \rho\, dV = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - \\ - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta,$$

где

$$K_{yz} = \iiint\limits_{(V)} yz\rho\, dV, \quad K_{zx} = \iiint\limits_{(V)} zx\rho\, dV, \quad K_{xy} = \iiint\limits_{(V)} xy\rho\, dV.$$

Последние интегралы носят название произведений инерции или центробежных моментов [ср. 599, 5)].

Если пожелать наглядно изобразить распределение моментов инерции тела относительно различных осей, проходящих через начало, то аналогично тому, как мы это делали для плоской фигуры, следует на каждой оси u отложить отрезок

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_u}}.$$

Пусть

$$X = ON\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_u}},$$

$$Y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I_u}}, \quad Z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_u}}$$

* Последнее соотношение есть запись того факта, что точка M лежит на плоскости, проходящей перпендикулярно к оси на расстоянии d от начала.

будут координаты конца N этого отрезка. Тогда из найденного для I_u выражения легко получить уравнение геометрического места точек N:

$$I_xX^2+I_yY^2+I_zZ^2-2K_{yz}YZ-2K_{zx}ZX-2K_{xy}XY=1.$$

Так как ON не обращается в бесконечность, то эта поверхность второго порядка необходимо является эллипсоидом; она носит название эллипсоида инерции. При исследовании движения твердого тела важную роль играют оси эллипсоида инерции, называемые *главными осями инерции*; если точка O есть центр тяжести тела, то соответствующие оси инерции называются *главными центральными осями инерции.*

Будет ли та или другая из координатных осей главной осью инерции, зависит от центробежных моментов. Например, для того чтобы ось x была главной осью инерции, необходимо и достаточно выполнение условий

$$K_{xy}=0,\quad K_{zx}=0.$$

В частности, они выполняются, если массы расположены симметрично относительно плоскости yz.

16) Рассмотрим, в заключение, вопрос о центробежной силе, развивающейся при вращении твердого тела вокруг оси.

Если тело (V) вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω, то на элемент $dm=\rho\,dV$ тела будет действовать элементарная центробежная сила величины

$$dF=\omega^2 r\,dm=\omega^2 r\rho\,dV,$$

где r есть расстояние элемента от оси вращения. Ее проекции на координатные оси будут

$$dF_x=\omega^2 x\rho\,dV,\quad dF_y=\omega^2 y\rho\,dV,\quad dF_z=0,$$

так что проекции результирующей центробежной силы $\vec{F}$ выразятся интегралами

$$F_x=\omega^2\iiint\limits_{(V)} x\rho\,dV=\omega^2 M_{yz},\quad F_y=\omega^2 M_{zx},\quad F_z=0,$$

где M_{yz}, M_{zx} — статические моменты нашего тела. Если через ξ, η, ζ обозначить координаты центра тяжести тела, то эти формулы перепишутся так:

$$F_x=\omega^2\xi m,\quad F_y=\omega^2\eta m,\quad F_z=0.$$

Отсюда видно, что упомянутая *результирующая центробежная сила* $\vec{F}$ *в точности такова, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре тяжести.*

Элементарная центробежная сила, о которой выше была речь, имеет следующие моменты относительно координатных осей:

$$dM_x=z\,dF_y=\omega^2 yz\rho\,dV,\quad dM_y=z\,dF_x=\omega^2 zx\rho\,dV,\quad dM_z=0.$$

Следовательно, результирующие моменты относительно этих осей будут:

$$M_x=\omega^2\iiint\limits_{(V)} yz\rho\,dV=\omega^2 K_{yz},\quad M_y=\omega^2 K_{zx},\ M_z=0.$$

Для того чтобы центробежные силы взаимно уравновешивались и не оказывали никакого действия на вал (а через его посредство — на подшипники, в которых он укреплен), необходимы и достаточны условия:

$$M_{yz}=0,\quad M_{zx}=0,\quad K_{yz}=0,\quad K_{zx}=0.$$

Первые два означают, что центр тяжести тела должен лежать на оси z; пусть это и будет начало O. Последние же два показывают, что ось z должна быть одной из главных осей инерции. Итак, *центробежная сила не производит давления на подшипники лишь при условии, если ось вращения совпадает с одной из главных центральных осей инерции вращающегося тела.*

§ 2. Формула Гаусса—Остроградского

651. Формула Остроградского. В теории двойных интегралов мы ознакомились с формулой Грина, связывающей двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом по контуру области. Ее аналогом в теории тройных интегралов служит формула Остроградского, связывающая тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом по границе области.

Рассмотрим тело (V) (черт. 96), ограниченное кусочно-гладкими поверхностями

$$\begin{matrix} (S_1) & z=z_0(x,\ y) \\ (S_2) & z=Z(x,\ y) \end{matrix} \quad (z_0 \leqslant Z)$$

и цилиндрической поверхностью (S_3), образующие которой параллельны оси z. Направляющей здесь служит кусочно-гладкая замкнутая кривая (K) на плоскости xy, ограничивающая область (D) — проекцию тела (V) на эту плоскость.

Допустим, что в области (V) определена некоторая функция $R(x,\ y,\ z)$, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ во всей области (V), включая ее границу. Тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy, \tag{1}$$

причем S есть поверхность, ограничивающая тело, и интеграл справа распространен на внешнюю ее сторону.

Действительно, по формуле (11*) n° **645**,

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_{z_0(x,\ y)}^{Z(x,\ y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} R(x,\ y,\ Z(x,\ y))\,dx\,dy - \iint\limits_{(D)} R(x,\ y,\ z_0(x,\ y))\,dx\,dy.$$

Если ввести в рассмотрение поверхностные интегралы, то, в силу формул (3) и (3*) n° **635**,

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S_2)} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy + \iint\limits_{(S_1)} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy,$$

причем первый из интегралов справа распространен на верхнюю сторону поверхности (S_2), а второй — на нижнюю сторону поверх-

ности (S_1). Равенство не нарушится, если мы прибавим к правой его части интеграл

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

распространенный на внешнюю сторону поверхности (S_3), так как этот интеграл равен нулю [635, (5)]. Объединяя все три поверхностных интеграла в один, мы и придем к формуле (1), которая представляет собой частный случай формулы Остроградского.

В приведенном рассуждении читатель, вероятно, уже усмотрел сходство с тем, с помощью которого в n° 638 была выведена формула (14) для объема тела (V): эта последняя получается из формулы (1) при $R(x, y, z) = z$.

Как и там, легко понять, что формула (1) верна для более широкого класса тел, которые могут быть разложены на части изученного типа. Можно доказать также, что формула (1) справедлива вообще для тел, ограниченных произвольными кусочно-гладкими поверхностями.

Доказательство проводится в основном так же, как и в n° 638, при расширении условий применимости формулы для объема. К этому добавим только одно замечание. Если рассматриваемое тело (V) представляет собой «призматический брус», ограниченный, скажем, справа поверхностью $x = g(y, z)$, то изложенное в n° 638 рассуждение переносится на настоящий случай лишь в предположении, что функции R и $\frac{\partial R}{\partial z}$ определены и непрерывны и в некоторой области справа от упомянутой поверхности (ибо вписанная многогранная поверхность может и выйти несколько за пределы рассматриваемого тела)*.

Аналогично формуле (1) имеют место и формулы:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz, \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} Q\,dz\,dx, \tag{3}$$

если функции P и Q непрерывны в области (V) вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Сложив все три формулы (1), (2), (3), мы и придем к общей *формуле Остроградского:*

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \\ = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{4}$$

* На деле для верности формулы это предположение несущественно.

Она выражает общего вида поверхностный интеграл второго типа, распространенный на внешнюю сторону замкнутой поверхности, через тройной интеграл, взятый по телу, ограниченному этой поверхностью.

Если привлечь к рассмотрению поверхностные интегралы первого типа, то получим другой, весьма употребительный и легко запоминаемый вид формулы Остроградского:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS, \tag{5}$$

где λ, μ, ν суть углы, составленные внешней нормалью к поверхности (S) с координатными осями.

Замечание. Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится к случаю двумерного пространства, формула Стокса — также к случаю двумерного, но «кривого» пространства, а формула Остроградского — к случаю трехмерного пространства.

На основную формулу интегрального исчисления

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

мы можем смотреть, как на некоторый аналог этих формул для одномерного пространства.

652. Приложение формулы Остроградского к исследованию поверхностных интегралов. Пусть в некоторой открытой области (T) трехмерного пространства заданы непрерывные функции P, Q, R. Взяв любую замкнутую поверхность (S), лежащую в этой области и ограничивающую некоторое тело, рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS. \tag{6}$$

Какому условию должны удовлетворять функции P, Q, R, чтобы интеграл (6) *всякий раз оказывался равным нулю?*

Эта задача аналогична задаче об обращении в нуль криволинейного интеграла по замкнутому контуру [**601**, **641**], которая легко разрешалась с помощью формулы Грина или Стокса. Здесь же мы прибегнем к формуле Остроградского, предполагая, конечно,

что для функций P, Q, R существуют и непрерывны те производные, которые фигурируют в этой формуле.

Однако для того чтобы иметь право преобразовать интеграл (6) по формуле Остроградского, необходимо и в настоящем случае наложить некоторое ограничение непосредственно на основную область (T). Именно, нужно потребовать, чтобы, *лишь только области (T) принадлежит простая замкнутая поверхность (S), ограничивающая извне тело (V), то и это тело также целиком содержится в указанной области.* Область, обладающую этим свойством, называют («пространственно») односвязной [ср. **641**]. Сущность этого типа односвязности состоит в отсутствии «дыр», хотя бы и точечных; по отношению к телу, не простирающемуся в бесконечность, можно было бы попросту потребовать, чтобы его границей служила одна единственная замкнутая поверхность [ср. **659**]. Поэтому, например, в отличие от сказанного по поводу «поверхностной» односвязности в **641**, здесь тор будет односвязным телом, а полая сфера — нет.

Формула Гаусса—Остроградского сразу приводит к искомому условию:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0. \tag{B}$$

Достаточность его очевидна, а необходимость легко доказывается с помощью дифференцирования тройного интеграла по области [**644**, 8°].

Аналогично случаю криволинейных интегралов, вопрос об обращении в нуль интеграла по замкнутой поверхности оказывается равносильным вопросу о независимости интеграла по незамкнутой поверхности, «натянутой» на данный контур, от формы поверхности. Останавливаться на этом не станем.

В заключение заметим, что если требование непрерывности функций P, Q, R и их производных нарушено в одной или нескольких точках области (T), то и при выполнении равенства (B) интеграл (6) может оказаться отличным от нуля. Но в этом случае нетрудно установить, что интеграл (6) имеет одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей (S), охватывающих определенную особую точку [ср. **562**].

Все эти обстоятельства иллюстрируются на примере интеграла Гаусса, которому мы посвящаем следующий n°.

653. Интеграл Гаусса. Так называется интеграл

$$G=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(r,\ n)}{r^2}\,dS,$$

где r есть длина радиуса-вектора, соединяющего постоянную точку $A(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ с переменной точкой $M(x,\ y,\ z)$ поверхности:

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

а через (r, n) обозначен угол между этим радиусом-вектором и нормалью к поверхности в точке M. При этом поверхность (S) предполагается двусторонней, и нормаль n отвечает определенной ее стороне.

Если направляющие косинусы нормали суть $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, то

$$\cos(r,\ n) = \cos(x,\ r)\cos\lambda + \cos(y,\ r)\cos\mu + \cos(z,\ r)\cos\nu = \\ = \frac{x-\xi}{r}\cos\lambda + \frac{y-\eta}{r}\cos\mu + \frac{z-\zeta}{r}\cos\nu.$$

Таким образом, интеграл Гаусса перепишется так:

$$G = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\lambda + \frac{y-\eta}{r^3}\cos\mu + \frac{z-\zeta}{r^3}\cos\nu\right) dS = \\ = \iint\limits_{(S)} \frac{x-\xi}{r^3}\,dy\,dz + \frac{y-\eta}{r^3}\,dz\,dx + \frac{z-\zeta}{r^3}\,dx\,dy.$$

Здесь

$$P = \frac{x-\xi}{r^3}, \quad Q = \frac{y-\eta}{r^3}, \quad R = \frac{z-\zeta}{r^3},$$

так что

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}.$$

Легко проверить выполнение условия (В) во всем пространстве, исключая точку $A(\xi, \eta, \zeta)$, в которой функции P, Q, R терпят разрыв. Следовательно, интеграл Гаусса, взятый по замкнутой поверхности, равен нулю, если поверхность не охватывает точки A. Для всех же поверхностей, содержащих эту точку внутри себя, интеграл сохраняет одно и то же значение. Его легко найти, если за поверхность (S) взять, например, сферу, описанную радиусом R вокруг точки A. Здесь радиус-вектор точки сферы сохраняет постоянную длину, а направление его совпадает с направлением внешней нормали к сфере, так что $\cos(r,\ n) = 1$. Имеем:

$$G = \iint\limits_{(S)} \frac{dS}{R^2} = \frac{S}{R^2} = 4\pi;$$

таково значение интеграла Гаусса для всех поверхностей, окружающих точку A.

Все эти результаты легко устанавливаются и непосредственно, если исходить из геометрического смысла интеграла Гаусса, как *меры телесного угла*, под которым поверхность (S) видна из точки A.*

Для доказательства этого предположим сначала, что поверхность (S) пересекается с каждым лучом, исходящим из точки A, не более, чем в одной точке. Пусть нормаль n направлена в сторону, противоположную точке A. Взяв элемент (dS) поверхности (S), выберем точку M на нем и проведем через эту

* Телесным углом называется часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью; вершина конуса является вершиной угла. Если вокруг вершины описать сферу единичного радиуса, то упомянутая коническая поверхность вырежет на ней фигуру, площадь которой и служит мерой телесного угла.

точку сферу с центром в точке A. Если спроектировать элемент (dS) из A на упомянутую сферу, то площадь проекции будет:

$$\cos(r,\ n)\,dS\,^*,$$

так что площадь фигуры, вырезанной исходящими из A лучами зрения на сфере единичного радиуса, будет:

$$\frac{\cos(r,\ n)}{r^2}\,dS.$$

Это и есть (телесный) угол видимости элемента (dS). Мерой же угла видимости всей поверхности (S) служит сумма всех элементарных углов, т. е. интеграл G.

Если поверхность (S) пересекается с лучами, исходящими из A, более чем в одной точке, ио может быть разложена на части, каждая из которых пересекается этими лучами уже лишь в одной точке, то нужно лишь просуммировать интегралы Гаусса, относящиеся к этим частям.

Обычно выбирается определенная сторона поверхности, и направление нормали n согласуют с этим выбором. Тогда для одних участков поверхности эта нормаль окажется направленной в сторону, противоположную A, и угол видимости получится с плюсом; для других же участков, где нормаль направлена в сторону A, этот угол получится с минусом. Интеграл Гаусса будет алгебраической суммой этих углов видимости.

Из геометрического истолкования интеграла Гаусса непосредственно ясно, что если поверхность (S) замкнута и точка A лежит внутри ограниченной ее области, то $G=4\pi$. Наоборот, если точка лежит вне этой области, то углы видимости разных знаков взаимно уничтожаются и $G=0$.

Если точка A лежит на самой поверхности (S), то интеграл Гаусса становится несобственным. Легко понять, что если поверхность (S) в точке A имеет определенную касательную плоскость, то $G=2\pi$.

654. Примеры. 1) Преобразовать по формуле Остроградского поверхностные интегралы:

(а) $$I_1=\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

(б) $$I_2=\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu)\,dS,$$

(в) $$I_3=\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy,$$

считая, что поверхность (S) ограничивает тело (V).

Ответ. (а) $I_1=2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dV$, б) $I_2=\iiint\limits_{(V)}\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$.

(в) $I_3=3V$ [ср. 638 (16)!].

* При этом мы приближенно считаем как элемент (dS), так и его проекцию плоскими и пользуемся формулой для ортогональной (а не центральной) проекции. Но для бесконечно малого элемента (dS) и допускаемая здесь относительная погрешность будет бесконечно мала.

2) Доказать с помощью формулы Остроградского формулы:

(а) $$\iiint\limits_{(V)} \Delta u\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

(б) $$\iiint\limits_{(V)} v\Delta u\, dx\, dy\, dz =$$
$$= -\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz + \iint\limits_{(S)} v\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

(в) $$\iiint\limits_{(V)} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS,$$

если положить

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x,\ n) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(y,\ n) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(z,\ n)$$

и разуметь под n внешнюю нормаль к поверхности.

Указание. Решение этой и ближайших задач вполне аналогично решению задач 3), 4), 5), 6), 7) n° **602**.

3) Функция u, непрерывная вместе со своими производными и удовлетворяющая в области (V) уравнению $\Delta u = 0$, называется гармонической в этой области. Доказать, что *гармоническая функция характеризуется выполнением условия*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$$

для любой содержащейся в области (V) *простой замкнутой поверхности* (S).

4) Доказать следующее утверждение:

Если функция u — *гармоническая в замкнутой области* (V), *то ее значения внутри области однозначно определяются ее значениями на поверхности* (S), *ограничивающей эту область.*

5) Пусть u есть гармоническая функция в области (V), (x_0, y_0, z_0) — какая-либо внутренняя точка этой области и (S_R) — сфера радиуса R с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Тогда имеет место формула:

$$u(x_0,\ y_0,\ z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{(S_R)} u(x,\ y,\ z)\, dS.$$

Доказать это.

Указание. См. доказательство в **602**, 6); лишь в качестве вспомогательной гармонической функции здесь следует взять $v = \frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

6) Доказать, что *функция* $u(x,\ y,\ z)$, *непрерывная в замкнутой области* (V) *и гармоническая внутри области, не может достигать своего наибольшего (наименьшего) значения внутри области* (если только не сводится к постоянной).

Пользуясь этим, усилить результат в 4) наподобие того, как это сделано в **602**, 7).

7) Доказать, что жесткая замкнутая поверхность, подвергнутая всестороннему равномерному давлению, остается в равновесии.

С этой целью установим, что равны нулю *главный вектор* и *главный момент* (относительно какой-либо точки) всей системы приложенных к поверхности сил.

Выделим элемент (dS) поверхности. Если через $p = \text{const.}$ обозначить давление, т. е. силу, действующую на единицу площади, то элементарная сила, действующая на (dS) по нормали к этому элементу, будет иметь проекции на оси

$$-p\cos\lambda\, dS, \quad -p\cos\mu\, dS, \quad -p\cos\nu\, dS \tag{7}$$

(знак минус поставлен потому, что давление направлено внутрь поверхности, а λ, μ, ν суть углы внешней нормали с координатными осями).

Проекции R_x, R_y, R_z главного вектора получаются из проекций (7) элементарных сил суммированием их:

$$R_x = -p\iint\limits_{(S)} \cos\lambda\, dS, \quad R_y = -p\iint\limits_{(S)} \cos\mu\, dS, \quad R_z = -p\iint\limits_{(S)} \cos\nu\, dS.$$

Но все эти интегралы равны нулю, что видно из формулы Остроградского, если положить в ней

$$P = 1, \quad Q = R = 0; \quad Q = 1, \quad P = R = 0; \quad R = 1, \quad P = Q = 0.$$

Итак, *главный вектор давлений равен нулю.*

Для определения главного момента системы элементарных сил, скажем, относительно начала координат, просуммируем составляющие по осям моментов этих элементарных сил:

$$p(z\cos\mu - y\cos\nu)\, dS, \quad p(x\cos\nu - z\cos\lambda)\, dS, \quad p(y\cos\lambda - x\cos\mu)\, dS\,^*.$$

Таким образом, проекции главного момента давлений относительно начала будут:

$$L_x = p\iint\limits_{(S)} (z\cos\mu - y\cos\nu)\, dS, \quad L_y = p\iint\limits_{(S)} (x\cos\nu - z\cos\lambda)\, dS,$$

$$L_z = p\iint\limits_{(S)} (y\cos\lambda - x\cos\mu)\, dS.$$

Если в формуле Остроградского взять $P = 0$, $Q = pz$, $R = -py$, то получим, что $L_x = 0$. Так же легко установить, что и $L_y = L_z = 0$. *Главный момент давлений (относительно начала) равен нулю.* Этим и завершается доказательство.

8) В качестве последнего примера применения формулы Остроградского выведем один из основных законов гидростатики — *закон Архимеда.*

Известно, что давление жидкости на погруженную в нее площадку направлено по нормали к площадке и равно весу столба жидкости, основанием которого служит эта площадка, а высотой — глубина погружения площадки. Допустим теперь, что в жидкость погружено твердое тело (V); на каждый элемент (dS) его поверхности (S) по указанному закону давит жидкость. Требуется определить равнодействующую элементарных давлений и ее точку приложения.

---

* Напомним, что если слагающие силы по осям суть X, Y, Z, и приложена она в точке (x, y, z), то момент силы относительно точки (ξ, η, ζ) имеет следующие проекции на оси:

$$L_x = (y - \eta)Z - (z - \zeta)Y, \quad L_y = (z - \zeta)X - (x - \xi)Z,$$
$$L_z = (x - \xi)Y - (y - \eta)X.$$

Для решения этой задачи выберем координатную систему, совместив плоскость xy со свободной поверхностью жидкости, а ось z направив вертикально вниз.

Пусть удельный вес жидкости равен ρ, а глубина погружения элемента (dS) есть z; тогда испытываемое этим элементом давление будет:

$$\rho z\, dS,$$

а составляющие его по осям

$$-\rho z \cos\lambda\, dS, \quad -\rho z \cos\mu\, dS, \quad -\rho z \cos\nu\, dS.$$

В таком случае для проекций главного вектора на оси имеем:

$$R_x = -\rho \iint\limits_{(S)} z\cos\lambda\, dS, \quad R_y = -\rho \iint\limits_{(S)} z\cos\mu\, dS,$$
$$R_z = -\rho \iint\limits_{(S)} z\cos\nu\, dS.$$

С помощью формулы Остроградского, как и в предыдущей задаче, легко получить

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\rho \iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V.$$

Таким образом, *главный вектор давлений направлен вертикально вверх и равен весу вытесненной телом жидкости.*

Рассмотрим теперь моменты элементарных сил относительно центра тяжести $C(\xi, \eta, \zeta)$ тела (*здесь и дальше имеется в виду центр тяжести геометрического тела* при равномерном распределении масс; он может не совпадать с центром тяжести физического тела). Составляющие элементарных моментов по осям будут

$$\rho z\,[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu], \quad \rho z\,[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda],$$
$$\rho z\,[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu],$$

а для составляющих главного момента (относительно точки C) получим:

$$L_x = \rho \iint\limits_{(S)} z\,[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\, dS,$$
$$L_y = \rho \iint\limits_{(S)} z\,[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]\, dS,$$
$$L_z = \rho \iint\limits_{(S)} z\,[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\, dS.$$

Применяя к первому интегралу формулу Остроградского, найдем:

$$L_x = \rho \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right] dV =$$
$$= \rho \iiint\limits_{(V)} (\eta - y)\, dV = \rho\left[\eta V - \iiint\limits_{(V)} y\, dV\right] = 0,$$

ибо интеграл $\iiint\limits_{(V)} y\, dV$ есть статический момент тела относительно плоскости xz и равен ηV. Аналогично устанавливается, что $L_y = 0$; непосредственно получается, наконец, что и $L_z = 0$.

Итак, *главный момент давлений относительно центра тяжести тела равен нулю.* Сопоставляя это утверждение с ранее доказанным предложением о главном векторе, приходим к такому заключению: *на тело, погруженное в жидкость, со стороны последней действует сила, равная весу жидкости, вытесненной телом; эта сила приложена к центру тяжести (геометрического) тела и направлена вертикально вверх.*

§ 3. Замена переменных в тройных интегралах

655. Преобразование пространств и криволинейные координаты. Идеи, развитые в n° **603** в связи с преобразованием плоских областей, естественно переносятся и на случай пространственных областей.

Пусть имеем пространство, отнесенное к системе прямоугольных координат xyz, и другое пространство с системой координат $\xi\eta\zeta$. Рассмотрим две замкнутые области (D) и (Δ) в этих пространствах, ограниченные соответственно поверхностями (S) и (Σ), которые мы всегда будем предполагать кусочно-гладкими. Допустим, что эти области связаны между собой взаимно однозначным непрерывным соответствием, которое осуществляется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(\xi,\ \eta,\ \zeta),\\ y&=y(\xi,\ \eta,\ \zeta),\\ z&=z(\xi,\ \eta,\ \zeta). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

При этом, необходимо, *точкам поверхности* (Σ) *отвечают именно точки поверхности* (S), *и наоборот.*

Пусть функции (1) имеют в области (Δ) непрерывные частные производные; тогда и якобиан

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)} \tag{2}$$

также является непрерывной функцией в (Δ). Мы и здесь [ср. n° **603**] будем считать, что *этот определитель всегда отличен от нуля, сохраняя определенный знак.*

Если в области (Δ) взять кусочно-гладкую поверхность:

$$\xi=\xi(u,\ v),\quad \eta=\eta(u,\ v),\quad \zeta=\zeta(u,\ v) \tag{3}$$

(предполагая, что параметры изменяются в некоторой области E на плоскости uv), то формулы (1) преобразуют ее в кусочно-гладкую же поверхность в области (D). Эта поверхность будет иметь уравнения

$$x=x(\xi(u,\ v),\ \eta(u,\ v),\ \zeta(u,\ v))=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v). \tag{4}$$

Ограничимся случаем гладкой поверхности (2): на ней особых точек нет, так что определяем:

$$\frac{D(\eta,\ \zeta)}{D(u,\ v)},\quad \frac{D(\zeta,\ \xi)}{D(u,\ v)},\quad \frac{D(\xi,\ \eta)}{D(u,\ v)} \tag{5}$$

одновременно в нуль не обращаются. Проверке подлежит лишь отсутствие особых точек и на поверхности (3).

По формуле (6) n° **204** имеем линейные равенства относительно величин (4):

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y, z)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)},$$

$$\frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \frac{D(z, x)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)},$$

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}.$$

Определитель, составленный из коэффициентов при этих величинах, т. е. из алгебраических дополнений к элементам определителя (2), — по известной теореме алгебры равен квадрату этого последнего и, следовательно, вместе с ним о т л и ч е н о т н у л я. Если бы левые части написанных равенств в какой-нибудь точке (u, v) одновременно обратились в нуль, то нулями были бы и все три определителя (5), что противоречило бы допущению.

Числа ξ, η, ζ, однозначно характеризующие положение точки в пространстве xyz, называются *криволинейными координатами* этой точки. Точки пространства xyz, для которых одна из этих координат сохраняет постоянное значение, образуют *координатную поверхность*. Всего будет существовать три семейства таких координатных поверхностей; через каждую точку области (D) проходит по одной поверхности каждого семейства.

Впрочем, все это будет так лишь в предположении строгой однозначности соответствия между областями (D) и (Δ). На практике эта однозначность часто нарушается.

656. Примеры. 1) *Цилиндрические координаты* представляют соединение полярных координат в плоскости xy с обычной декартовой аппликатой z (черт. 110). Формулы, связывающие их с декартовыми, имеют вид

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z. \qquad (2)$$

Эти формулы отображают область

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

Черт. 110.

на всё пространство xyz. Отметим, однако, что прямая $\rho = 0$, $z = z$ отображается в одну точку $(0, 0, z)$; этим нарушается взаимная однозначность соответствия.

Координатные поверхности в рассматриваемом случае будут:
(а) $\rho = \text{const.}$ — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z; направляющими для них служат окружности на плоскости xy с центром в начале;
(б) $\theta = \text{const.}$ — полуплоскости, проходящие через ось z;
(в) $z = \text{const.}$ — плоскости, параллельные плоскости xy.
Якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Исключая случай $\rho = 0$, якобиан сохраняет положительный знак.

2) *Сферические координаты*, называемые иначе *полярными координатами в пространстве*, связаны с декартовыми формулами:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\varphi,$$

где

$$0 \leqslant r < +\infty,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Геометрический смысл величин r, φ, θ ясен из черт. 111: r есть радиус-вектор OM, соединяющий начало (полюс) с данной точкой M; φ — угол, составляемый этим радиусом-вектором с осью z (полярной осью); θ — угол, составляемый с осью x проекцией $OP = r\sin\varphi$ радиуса-вектора OM на плоскость xy (перпендикулярную к полярной оси).

Черт. 111.

В этом случае мы снова сталкиваемся с нарушением взаимной однозначности соответствия: плоскость $r = 0$ пространства $r\varphi\theta$ отображается в начало координат $x = y = z = 0$, прямая $\varphi = 0$ (π), $r = r$ отображается в одну точку:

$$x = y = 0,\ z = r.$$

Координатные поверхности составляют три семейства:
(а) $r = \text{const.}$ — концентрические сферы с центром в начале координат;
(б) $\varphi = \text{const.}$ — круговые конусы, осью которых служит ось z;
(в) $\theta = \text{const.}$ — полуплоскости, проходящие через ось z.
Якобиан этого преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - r^2\sin\varphi.$$

Якобиан сохраняет знак плюс, за исключением упомянутых выше случаев, когда $r = 0$, либо $\varphi = 0\ (\pi)$, и якобиан обращается в нуль.

3) Преобразование пространства самого в себя по формулам:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},\quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 0)$ однозначно обратимо:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},\quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},\quad \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Оно, как и в случае плоскости [**604**, 2)], называется *инверсией* и имеет наглядно геометрическое истолкование; предоставляем читателю установить его, равно как и найти отвечающие этому преобразованию три семейства координатных поверхностей.

4) *Эллиптические координаты.* Рассмотрим семейство софокусных и соосных поверхностей второго порядка:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1 \qquad (0<h<k), \tag{2}$$

состоящее из эллипсоидов (при $\lambda>k$), однополостных гиперболоидов (при $k>\lambda>h$) и, наконец, двуполостных гиперболоидов (при $0<\lambda<h$).

Через каждую точку (x, y, z) пространства, не лежащую на координатных плоскостях, проходит по одной поверхности каждого типа. Действительно, левая часть уравнения, получаемого из (2):

$$\lambda^2(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)-(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)x^2-\lambda^2(\lambda^2-k^2)y^2-$$
$$-\lambda^2(\lambda^2-h^2)z^2=0,$$

имеет знак минус при $\lambda=0$, знак плюс при $\lambda=h$, снова знак минус при $\lambda=k$ и, наконец, знак плюс при больших λ. Отсюда следует, что уравнение имеет т р и п о л о ж и т е л ь н ы х корня: один $\lambda>k$ (что отвечает эллипсоиду), второй $\mu<k$, но $>h$ (он дает однополостный гиперболоид), третий $\nu<h$ (двуполостный гиперболоид).

Используя свойства корней написанного выше уравнения, которое мы можем рассматривать как кубическое уравнение относительно λ^2, а именно:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+h^2+k^2,$$
$$\lambda^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\nu^2\lambda^2=(h^2+k^2)x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2;$$
$$\lambda^2\mu^2\nu^2=h^2k^2x^2,$$

найдем:

$$x=\pm\frac{\lambda\mu\nu}{hk},\quad y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$
$$z=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-k^2)(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}}.$$

Если ограничиться первым координатным октантом, то в этих формулах надлежит сохранить лишь положительные знаки. Числа λ, μ, ν можно рассматривать, как криволинейные координаты точек этого угла. Их и называют *эллиптическими координатами*. Три семейства координатных поверхностей — это и будут семейства эллипсоидов, однополостных и двуполостных гиперболоидов, о которых была речь выше.

Якобиан преобразования имеет вид:

$$J=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}.$$

657. Выражение объема в криволинейных координатах. Возвращаясь к предположениям и обозначениям n° **655**, поставим себе задачей выразить объем (ограниченного) тела (D) в пространстве xyz тройным интегралом, распространенным на соответствующее тело (Δ) в пространстве $\xi\eta\zeta$ *.

* Как и в n° **605**, мы и здесь предполагаем дополнительно существование и непрерывность частных производных, скажем,

$$x''_{\xi\eta},\ x''_{\eta\xi},\ \ldots,\ y''_{\xi\eta},\ y''_{\eta\xi},\ \ldots;$$

это облегчает доказательство, хотя не существенно для верности самого результата.

Искомый объем выражается прежде всего поверхностным интегралом второго типа [см. **613** (14)]:

$$D=\iint_{(\Delta)} z\,dx\,dy,$$

распространенным на в н е ш н ю ю сторону поверхности (S). Отсюда постараемся перейти к обыкновенному двойному интегралу.

Будем исходить из параметрических уравнений (3) поверхности (5) (u, v изменяются в области (E) на плоскости uv). Тогда уравнения (4) выразят, очевидно, поверхность (S).

Полагая

$$C=\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)},$$

по формуле (8) n° **636** имеем:

$$D=\iint_{(E)} z\,C\,du\,dv.$$

При этом интеграл берется со знаком плюс, если ориентация поверхности (S), связанная с рассмотрением в н е ш н е й ее стороны, соответствует ориентации плоскости uv, что всегда можно предположить [**620, 621**].

Так как x, y зависят от u, v через посредство переменных ξ, η, ζ, то, по известному свойству функциональных определителей, [**204**, (6)]:

$$C=\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(u,\ v)}+\frac{D(x,\ y)}{D(\eta,\ \zeta)}\frac{D(\eta,\ \zeta)}{D(u,\ v)}+\frac{D(x,\ y)}{D(\zeta,\ \xi)}\frac{D(\zeta,\ \xi)}{D(u,\ v)}.$$

Подставляя выражение C в полученный выше интеграл, найдем:

$$D=\iint_{(E)} z\left[\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(u,\ v)}+\frac{D(x,\ y)}{D(\eta,\ \zeta)}\frac{D(\eta,\ \zeta)}{D(u,\ v)}+\right.$$
$$\left.+\frac{D(x,\ y)}{D(\zeta,\ \xi)}\frac{D(\zeta,\ \xi)}{D(u,\ v)}\right]du\,dv. \qquad (6)$$

Сопоставим этот интеграл с поверхностным интегралом второго типа, распространённым на в н е ш н ю ю сторону поверхности (Σ):

$$\iint_{(\Sigma)} z\left[\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}d\xi,\ d\eta+\frac{D(x,\ y)}{D(\eta,\ \zeta)}d\eta\ d\zeta+\frac{D(x,\ y)}{D(\zeta,\ \xi)}d\zeta\ d\xi\right]. \qquad (7)$$

Если его преобразовать, исходя из параметрических уравнений (3), к обыкновенному двойному интегралу, по формуле, аналогичной формуле (10) n° **636**, то придем как раз к интегралу (4). Единствен-

ное различие между этими интегралами может заключаться лишь в знаке: если ориентация плоскости uv соответствует ориентации поверхности (Σ), связанной с рассмотрением внешней ее стороны, то интегралы равны, в противном же случае они разнятся знаками.

Наконец, от интеграла (7) по формуле Остроградского можно перейти к тройному интегралу по области (Δ):

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[z \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right] \right\} d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Подинтегральное выражение равно:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} +$$
$$+ z \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right].$$

Сумма, стоящая здесь в первой строке, равна якобиану:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

в чем легко убедиться, разлагая этот определитель по элементам последней строки; сумма же в квадратных скобках, как показывает непосредственное вычисление, равна нулю *.

Таким образом, приходим к формуле:

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Если вспомнить, что по предположению якобиан сохраняет знак, который он сообщает и интегралу, то станет ясно (так как мы здесь считаем $D > 0$), что знак перед интегралом должен совпасть со зна-

---

* Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi},$$
$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} = \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим справа тождественно нуль.

ком якобиана. Это дает нам право переписать полученный результат в окончательной форме:

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{8}$$

или, обозначая якобиан для краткости через $J(\xi, \eta, \zeta)$:

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{8*}$$

Подинтегральное выражение

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

обычно называют *элементом объема в криволинейных координатах*.

658. Дополнительные замечания. 1°. На поверхностях (Σ) и (S) мы фиксировали определенные стороны, именно, внешние по отношению к ограниченным ими телам. В связи с этим для названных поверхностей установлены и определенные ориентации [**620**]. Если точка на поверхности (Σ) опишет простой замкнутый контур, разделяющий поверхность, и мы остановимся на любой из двух ограничиваемых им областей, то соответствующая ей по формулам (1) точка на поверхности (S) опишет подобный же контур, причем на этот раз нам не придется производить выбор из двух областей, ибо этот выбор осуществится сам собою по тому же закону соответствия (1). Если направление обхода первого контура с точки зрения ориентации поверхности (Σ) было, скажем, положительным, то направление обхода второго контура, если исходить из ориентации поверхности (S), может оказаться как положительным, так и отрицательным. В первом случае мы будем говорить, что ориентации обеих поверхностей соответствуют одна другой по формулам преобразования, а во втором — что они не соответствуют.

Так как мы с самого начала считали ориентацию поверхности (S) отвечающей ориентации плоскости uv, то тот или другой случай имеет место в зависимости от того, будет ли ориентация поверхности (Σ) отвечать ориентации плоскости uv или нет. С этим, в свою очередь, был связан выбор того или иного знака перед интегралом в формуле для объема. Но в конце обнаружилось, что упомянутый знак совпадает со знаком якобиана.

Сопоставляя все сказанное, мы приходим к заключению:

В зависимости от того, сохраняет ли якобиан положительный или отрицательный знак, ориентации обеих поверхностей (Σ) *и* (S) *оказываются соответствующими одна другой по формулам преобразования* (1) *или нет.*

2°. Применяя к формуле (8*) теорему о среднем, получаем соотношение

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})| \Delta, \tag{9}$$

где $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ есть некоторая точка из области (Δ), а Δ — объём этой области. Отсюда легко вывести, что при стягивании области (Δ) к точке (ξ, η, ζ) будем иметь [ср. и **644** 8°]:

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta},$$

так что абсолютная величина якобиана есть коэффициент растяжения пространства $\xi\eta\zeta$ (в данной его точке) при преобразовании его в пространство xyz.

3°. Формула (8) [(8*)] выведена при известных предположениях (взаимно однозначное и непрерывное соответствие между областями (D) и (Δ) и т. д.). Однако, как и в **606**, 4°, можно показать, что нарушение этих условий в отдельных точках или вдоль отдельных линий и поверхностей не мешает формуле быть верной, лишь бы якобиан оставался ограниченным или, по крайней мере, интегрируемым (хотя бы в несобственном смысле).

659. Геометрический вывод. Вывод формулы (6) можно построить и на чисто геометрических соображениях (которые и здесь впервые сформулировал М. В. Остроградский, ср. **609**). Бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду в пространстве $\xi\eta\zeta$ с измерениями $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ сопоставляется элементарное тело в пространстве xyz между координатными поверхностями «ξ» и «$\xi + d\xi$», «η» и «$\eta + d\eta$», «ζ» и «$\zeta + d\zeta$», которое приближенно можно рассматривать как косоугольный параллелепипед. Его объем равен ушестеренному объему тетраэдра с вершинами в точках:

$$P_1(x, y, z), \quad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi\right),$$

$$P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta\right),$$

$$P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta,\right.$$
$$\left. z + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta\right)$$

и по известной из аналитической геометрии формуле выражается (по абсолютной величине) определителем:

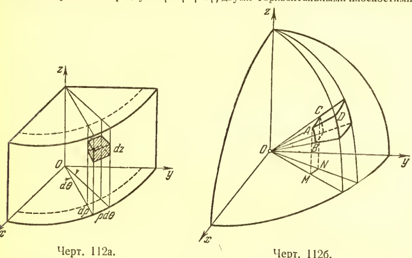
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Суммируя эти отдельные «элементы объема», приходим к формуле (6).

Таким образом, *существо дела и здесь в том, что для определения объема тела оно разлагается на элементы не с помощью взаимно перпендикулярных плоскостей, а с помощью сетки координатных поверхностей.*

В простых случаях выражение для «элемента объема» в криволинейных координатах может быть получено непосредственно.

Для примера в случае цилиндрических координат рассмотрим элементарную область (в пространстве xyz), ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$, двумя горизонтальными плоскостями,



Черт. 112а. Черт. 112б.

лежащими на высотах z и $z + dz$, и двумя полуплоскостями, проходящими через ось z и наклоненными к плоскости xz под углами θ и $\theta + d\theta$ (черт. 112а). Считая приближенно эту область прямоугольным параллелепипедом, без труда находим, что измерения его суть $d\rho$, $\rho\, d\theta$ и dz, так что объем его равен $\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$, а якобиан, представляющий отношение этого объема к объему $d\rho\, d\theta\, dz$ элементарного параллелепипеда в пространстве $\rho\theta z$, равен ρ.

Аналогично в случае сферических координат рассмотрим элементарную область (в пространстве xyz), ограниченную сферами радиусов r и $r + dr$, конусами φ и $\varphi + d\varphi$ и полуплоскостями θ и $\theta + d\theta$ (черт. 112б). И эту область можно принять за прямоугольный параллелепипед с измерениями $AD = dr$, $AB = r\, d\varphi$ и, наконец, AC. Так как дуга AC равна своей проекции MN, а последняя описана радиусом $OM = r \sin \varphi$ и отвечает центральному углу $d\theta$, то $AC = r \sin \varphi\, d\theta$. В силу этого объем рассматриваемой области равен $r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$, а якобиан есть $r^2 \sin \varphi$.

Оба эти результата, найденные из элементарно-геометрических соображений, согласуются со сказанным в **656**, 1) и 2).

660. Примеры. 1) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

(а) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$,

(б) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz$,

(в) $(x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}$.

Решение. (а) Тело расположено симметрично относительно плоскостей yz и zx, ибо x и y входят в уравнение только в квадратах. Далее, поскольку левая часть уравнения всегда положительна, необходимо и $z \geqslant 0$, т. е. все тело лежит вверх от плоскости xy. Эти замечания позволяют ограничиться вычислением объема четверти нашего тела, лежащей в первом октанте.

Наличие в уравнении выражения $x^2+y^2+z^2$ подсказывает нам переход к сферическим координатам. Подставляя в уравнение (а) поверхности выражения

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\varphi,$$

придем к уравнению поверхности в сферических координатах: $r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$. Так как первый октант характеризуется неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, то, учитывая значение якобиана $J = r^2\sin\varphi$ [656, 2)], будем иметь:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2\sin\varphi\,dr = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

(б) Тело лежит в первом, третьем, шестом и восьмом октантах, для которых, соответственно:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0;\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ z \geqslant 0;$$
$$x \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 0;\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0,\ z \leqslant 0;$$

оно состоит из четырех частей, которые попарно симметричны относительно одной из координатных осей (ни левая, ни правая части уравнения не изменяются при одновременном изменении знаков любых двух из величин x, y, z).

Переходя к сферическим координатам, получим:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}} r^2\sin\varphi\,dr =$$
$$= \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{a^3}{6}.$$

(в) Формулы перехода к сферическим координатам здесь проще взять в виде

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\theta,\quad z = r\sin\varphi\sin\theta.$$

Тогда уравнение поверхности примет форму $r = \cos^{3n-1}\varphi$.

Ответ. $V = \dfrac{\pi}{3(3n-1)}$.

2) Найти объем тела, ограниченного поверхностью

(а) $(x^2+y^2)^2+z^4 = y$,

(б) $(x^2+y^2)^3+z^6 = 3z^3$.

(а) Решение. Хотя тип задачи и несколько отличен от предыдущих, но и здесь выгодно применить сферические координаты. Уравнение поверхности примет форму:

$$r^3(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi) = \sin\varphi\sin\theta.$$

Учитывая симметрию, будем иметь:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}} r^2\sin\varphi\,dr=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}=\frac{4}{3}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

(б) Указание.

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi}=\pi\int_0^1\frac{u\,du}{3u^2-3u+1}$$

(если положить $u=\cos^2\varphi$). *Ответ.* $V=\dfrac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

3) Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

(а) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2y}{h^3}$;

(б) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$;

(в) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\dfrac{z}{c}$.

(а) Решение. При наличии выражения $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ в уравнении поверхности часто бывает полезен переход к *обобщенным сферическим координатам** по формулам:

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\varphi;$$

якобиан в этом случае равен $J=abc\,r^2\sin\varphi$. Имеем (с учетом симметрии):

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a^2b\sin^3\varphi\cos^2\theta\sin\theta}{h^3}} abc\,r^2\sin\varphi\,dr=$$

$$=\frac{4}{3}\,\frac{a^7b^4c}{h^9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}\varphi\,d\varphi,$$

так что окончательно

$$V=\frac{\pi}{192}\,\frac{a^7b^4c}{h^9}.$$

---

* Которые аналогичны обобщенным полярным координатам на плоскости.

(б) *Ответ.* $V=\frac{\pi^2}{4}abc.$ (в) *Ответ.* $V=\frac{\pi}{60}abc.$

4) Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=16,\ z^2=x^2+y^2,\ z=0,\ y=0,\ y=x.$$

Указание. Эти поверхности определяют промежутки изменения для сферических координат:

$$1\leqslant r\leqslant 4;\quad \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\quad\left(\text{или } \pi\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\right).$$

Тело состоит из двух обособленных кусков (в первом и третьем координатных октантах).

Ответ. $V=\frac{21\sqrt{2}\pi}{4}.$

5) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Решение. Введем новые координаты по формулам:

$$x=ar\sin^3\varphi\cos^3\theta,\quad y=br\sin^3\varphi\sin^3\theta,\quad z=cr\cos^3\varphi$$

$$(0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

В этом случае якобиан

$$J=9\,abc\,r^2\sin^5\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

так что

$$V=9abc\int_0^1 r^2\,dr\int_0^\pi\sin^5\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{4}{35}\pi\,abc.$$

6) Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$(x+y+z)^2=ay,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

Указание. Положить

$$x=r\sin^2\varphi\cos^2\theta,\quad y=r\sin^2\varphi\sin^2\theta,\quad z=r\cos^2\varphi$$

$$\left(r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Якобиан

$$J=4r^2\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

Ответ. $V=\frac{a^3}{60}.$

7) Найти объем косоугольного параллелепипеда, ограниченного шестью плоскостями:

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3,$$

предполагая, разумеется, что определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Решение. Введем новые переменные

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$\eta = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$\zeta = a_3x + b_3y + c_3z$$
$$(-h_1 \leqslant \xi \leqslant h_1, \quad -h_2 \leqslant \eta \leqslant h_2, \quad -h_3 \leqslant \zeta \leqslant h_3).$$

Определитель $\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}$ проще всего найти, заметив, что он равен обратной величине определителя $\frac{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{D(x,\ y,\ z)}$. Имеем

$$V = \frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1} d\xi \int_{-h_2}^{h_2} d\eta \int_{-h_3}^{h_3} d\zeta = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

8) Найти объем тела, ограниченного
(а) цилиндром

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 = R^2$$

и плоскостями

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \text{и} \quad a_3x + b_3y + c_3z = h;$$

(б) эллипсоидом

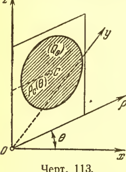
$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2$$

(при прежнем предположении, что определитель $\Delta \neq 0$).

Ответ. (а) $V = \frac{\pi R^2 h}{|\Delta|}$; (б) $V = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{|\Delta|}$.

9) Применение *цилиндрических координат* к вычислению объема тела приводит к интересной формуле.

Рассмотрим тело (V), ограниченное кусочно-гладкой поверхностью, и предположим, что исходящая из оси z полуплоскость, отвечающая $\theta = \text{const.}$, пересекает тело по некоторой плоской фигуре (Q_θ), при изменении θ от α до β (черт. 113). Тогда



Черт. 113.

$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_\alpha^\beta d\theta \iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz,$$

причем фигуру (Q_θ) удобно отнести к прямоугольной системе координат ρz, вращающейся вместе с упомянутой полуплоскостью вокруг оси z*.

Теперь легко видеть, что двойной интеграл $\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz$ представляет статический момент фигуры (Q_θ) относительно оси z, который равен произведению площади $Q(\theta)$ этой фигуры на расстояние $\rho_C(\theta)$ ее центра тяжести C от оси z:

$$\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz = Q(\theta)\rho_C(\theta).$$

* Вместо того, чтобы тождественную с ней фигуру относить к **неподвижной** плоскости ρz в пространстве $\rho\theta z$.

Подставляя это выражение для объема, придем к окончательной формуле:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\theta)\,\rho_C(\theta)\,d\theta.$$

Эта формула была указана П. П. Кусковым. Она особенно удобна для определения объема тел, получающихся при винтовом движении плоской фигуры (постоянной или деформирующейся), как-то: винтовых нарезок, пружин и т. п.

Если тело (V) есть попросту тело вращения неизменной фигуры (Q), не пересекающей оси z, вокруг этой оси, то $Q = \text{const.}$, $\rho_C = \text{const.}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, и формула принимает вид:

$$V = Q \cdot 2\pi\rho_C.$$

Она выражает известную теорему Гульдина [351], гласящую, что *объем тела вращения плоской фигуры около не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры*. Таким образом, формула Кускова является естественным обобщением этой классической теоремы (и, наоборот, легко может быть из нее получена).

10) Объем трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$$

многократно вычислялся; он равен $\frac{4}{3}\pi abc$. Попробуем, однако, к вычислению этого объема привлечь *эллиптические координаты* λ, μ, ν [655, 4)]. Если положить

$$h^2 = a^2 - b^2, \; k^2 = a^2 - c^2,$$

то сам данный эллипсоид получается при $\lambda = a$.

Первому октанту эллипсоида отвечает изменение λ от k до a, μ от h до k, ν от 0 до h. Поэтому

$$\frac{1}{8}V = \int_0^h d\nu \int_h^k d\mu \int_k^a \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}\,d\lambda.$$

Но, как указано, этот объем равен

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi}{6}\,a\,\sqrt{(a^2-h^2)(a^2-k^2)}.$$

Таково, следовательно, значение написанного выше сложного интеграла; найти это значение иным путем представило бы значительные трудности.

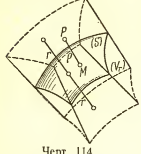
В заключение дадим два интересных применения основной формулы (8), позволяющих установить связь понятий площади кривой поверхности и длины кривой с принципиально более простым понятием объема тела.

11) Пусть задана гладкая поверхность (S):

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v),$$

причем в области (Δ) изменения параметров u, v эти функции имеют непрерывные производные и второго порядка.

На нормали к поверхности в каждой ее точке M отложим, симметрично в обе стороны от поверхности, отрезок длины $2r > 0$. Эти отрезки заполнят некоторое тело (V_r)*, в котором содержится и заданная поверхность (черт. 114).



Черт. 114.

Обозначая через x, y, z координаты точки M поверхности, а через X, Y, Z — координаты любой точки P на упомянутом отрезке нормали в ней, будем иметь, очевидно,

$$X = x + \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho,$$
$$Y = y + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho,$$
$$Z = z + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\rho,$$

где A, B, C имеют обычное значение, а ρ означает расстояние MP (с соответствующим знаком, так что $-r \leqslant \rho \leqslant r$). Параметры (u, v, ρ) служат, таким образом, криволинейными координатами для точек упомянутой области (V_r). По формуле (8) объем V_r этого тела равен

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} \right| du\, dv\, d\rho.$$

Но

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, \rho)} = \begin{vmatrix} x'_u + \alpha_1(u, v)\rho & y'_u + \alpha_2(u, v)\rho & z'_u + \alpha_3(u, v)\rho \\ x'_v + \beta_1(u, v)\rho & y'_v + \beta_2(u, v)\rho & z'_v + \beta_3(u, v)\rho \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{vmatrix} =$$
$$= \sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1(u, v)\rho + \gamma_2(u, v)\rho^2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ означают некоторые непрерывные функции от u, v. Очевидно, при достаточно малом r (так как $|\rho| \leqslant r$) это выражение будет иметь знак первого слагаемого, т. е. станет положительным. Поэтому

$$V_r = \int_{-r}^{r} d\rho \iint_{(\Delta)} \{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1\rho + \gamma_2\rho^2\} du\, dv +$$
$$= 2r \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv + Lr^3 \quad (L = \text{const.}).$$

Отсюда легко вытекает окончательный результат

$$\lim_{r \to 0} \frac{V_r}{2r} = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv;$$

в последнем интеграле мы узнаем площадь S кривой поверхности. *Таким образом эта площадь может быть получена, исходя из объема.*

---

* Можно доказать, что *при достаточно малом* r упомянутые отрезки между собой не пересекаются, так что каждая точка тела лежит на одной нормали.

12) Пусть задана гладкая кривая

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T),$$

причем функции x, y, z имеют и непрерывные вторые производные. В плоскости, нормальной к кривой в любой ее точке M, вообразим себе круг радиуса $r > 0$ с центром в M. Из всех таких кругов составится некоторое тело (V_r)*, содержащее кривую.

Не умаляя общности, можно предположить, что на рассматриваемом участке кривой всегда $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$. Тогда, желая построить в упомянутой плоскости, нормальной к кривой, прямоугольную систему координат, мы можем принять за оси координат две взаимно перпендикулярные нормали с направляющими косинусами

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ 0 \text{ и } \frac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$\frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Обозначив соответствующие координаты через u, v, мы можем выразить координаты X, Y, Z любой точки P тела (V_r) так:

$$X = x + \frac{y'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{x'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$Y = y - \frac{x'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{y'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$Z = z - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,v.$$

Здесь t, u, v играют роль криволинейных координат точки P, так что

$$V_r = \iiint \left| \frac{D(X,\ Y,\ Z)}{D(t,\ u,\ v)} \right| dt\,du\,dv.$$

Легко видеть, однако, что

$$\frac{D(X,\ Y,\ Z)}{D(t,\ u,\ v)} =$$

$$= \begin{vmatrix} x' + \alpha_1(t)\,u + \beta_1(t)\,v & y' + \alpha_2(t)\,u + \beta_2(t)\,v & z' + \alpha_3(t)\,u + \beta_3(t)\,v \\ \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & -\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & 0 \\ \dfrac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & \dfrac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & -\dfrac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} + \alpha(t)\,u + \beta(t)\,v,$$

---

* И здесь можно доказать, что — снова при достаточно малом r — эти круги попарно не имеют общих точек, так что каждая точка тела принадлежит лишь одному из них.

где $\alpha_1, \ldots, \beta$ — непрерывные функции от t. Это выражение сохраняет положительный знак при достаточно малом r (так как $|u|, |v| \leqslant r$). Тогда

$$V_r = \int_{t_0}^{T} dt \iint_{u^2+v^2 \leqslant r^2} \left\{ \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \alpha(t)\, u + \beta(t)\, v \right\} du\, dv =$$

$$= \pi r^2 \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt + \iint_{u^2+v^2 \leqslant r^2} (Ku + Lv)\, du\, dv,$$

где K и L — постоянные. В первом интеграле узнаем длину s дуги, второй же интеграл обращается в нуль. Поэтому

$$V_r = \pi r^2 s, \quad s = \frac{V_r}{\pi r^2}.$$

Длина дуги получается из объема еще более непосредственно, даже без предельного перехода!

661. Замена переменных в тройных интегралах. С помощью выражения объема в криволинейных координатах нетрудно установить и общую формулу замены переменных в тройных интегралах.

Пусть между областями (D) и (Δ) пространств xyz и $\xi\eta\zeta$ существует соответствие, охарактеризованное в n° **655**. Считая соблюденными все условия, при которых была выведена формула (8), мы покажем теперь, что имеет место следующее равенство:

$$\iiint_{(D)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))\, |J(\xi, \eta, \zeta)|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (10)$$

$$\left(\text{где } J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}\right),$$

вполне аналогичное формуле замены переменных в двойных интегралах. При этом функцию $f(x, y, z)$ мы предполагаем непрерывной или, самое большее, допускающей разрывы вдоль конечного числа кусочно-гладких поверхностей (но во всяком случае сохраняющей ограниченность). Таким образом, существование обоих интегралов в равенстве (10) не вызывает сомнений; нужно установить лишь самое равенство.

Для доказательства поступаем так же, как и в n° **609**. Разложив кусочно-гладкими поверхностями области (D) и (Δ) на (соответствующие друг другу) элементарные части (D_i) и (Δ_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, применим к каждой паре областей (D_i), (Δ_i) формулу (7); мы получим

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\, \Delta_i, \qquad (11)$$

где $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$ есть некоторая точка области Δ_i, не зависящая от нашего выбора. Возьмем соответствующую точку $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ области (D_i), т. е. положим

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i),\ \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i),\ \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \qquad (12)$$

и составим интегральную сумму для первого из интегралов (10):

$$\sigma = \sum_i f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\, D_i.$$

Подставив сюда вместо $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i$ выражения (12), а вместо D_i — выражение (10), придем к сумме

$$\sigma = \sum_i f(x(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i),\ y(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \zeta_i),\ z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i))\,|\,J(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i)\,|\,\Delta_i,$$

которая, очевидно, уже является интегральной суммой для второго из интегралов (10).

Устремим к нулю диаметры областей Δ_i, вследствие чего в силу непрерывности соответствия устремятся к нулю и диаметры областей (D_i). Сумма σ должна стремиться одновременно к обоим интегралам, откуда и следует требуемое равенство.

Как и в случае двойных интегралов, формула (10) имеет место и при нарушении сформулированных выше при доказательстве формулы (8) предположений в отдельных точках или вдоль конечного числа кусочно-гладких линий и поверхностей, лишь бы якобиан сохранял ограниченность.

Можно пойти дальше в расширении условий применимости формулы (10), допуская и несобственные интегралы. Мы предоставляем читателю перефразировать для рассматриваемого случая изложенное в n° **617**. Подчеркнем еще раз, что при указанных там условиях формула имеет место в предположении существования одного из интегралов (10), существование другого отсюда уже будет вытекать.

В заключение упомянем, что формулы (8) и (10) могли бы быть написаны и без знака абсолютной величины при якобиане. Для того чтобы иметь право на это, следовало бы ввести понятие об ориентированном теле (в связи с ориентированием его границы), затем в зависимости от его ориентации приписывать тот или другой знак его объему и распространенному на тело интегралу. Подробности предоставляем читателю, отсылая его к n° **616** и к замечанию 1° в n° **658**.

662. Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_{(V)} \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где (V) есть тело, ограниченное сверху поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2xy,$$

а снизу плоскостью $z=0$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Уравнение поверхности примет вид

$$r^2 = a^2\ \sin^2\varphi\ \sin\theta\ \cos\theta,$$

а интеграл, с учетом симметрии тела относительно оси z, преобразуется так:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\, dr =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^3\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{144}.$$

2) Вычислить интеграл

$$H = \iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}} \quad (\alpha>\beta>\gamma>0)$$

[ср. 648, 11)].

Решение. В сферических координатах

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\varphi}}.$$

Удобно произвести подстановку $\sin^2\varphi = u$, $\sin^2\theta = v$. Тогда

$$H = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^R r^4 \frac{u\,dr\,du\,dv}{\sqrt{\alpha^2u(1-v)+\beta^2uv+\gamma^2(1-u)}} =$$

$$= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\,du \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)u]+(\beta^2-\alpha^2)uv}} =$$

$$= \frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

3) Вычислить интеграл

$$K = \iiint\limits_{(V)} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2},$$

где (V) есть трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

Решение. Если перейти к обобщенным сферическим координатам по формулам

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi,$$
$$J = abc\,r^2\sin\varphi,$$

то интеграл перепишется в виде

$$K = a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}.$$

Подстановка $\sin^2\varphi = u$, $\sin^2\theta = v$. Окончательный результат:

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{8(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)} \times$$
$$\times \left\{b^2c^2 \ln\frac{c}{b} + c^2a^2 \ln\frac{a}{c} + a^2b^2 \ln\frac{b}{a}\right\}.$$

4) Вычислить повторный интеграл

$$\int_1^\infty dz \int_1^\infty y\,dy \int_0^{\frac{1}{yz}} e^{xyz} x^2 dx.$$

Решение. Заменяя его тройным интегралом

$$\iiint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y,\ z\geqslant 1\\ xyz\leqslant 1}} e^{xyz} x^2 y\,dx\,dy\,dz,$$

прибегнем затем к подстановке

$$x = u, \quad y = \frac{u+v}{u}, \quad z = \frac{u+v+w}{u+v},$$
$$J = \frac{1}{u(u+v)}.$$

Интеграл приведется к такому:

$$\iiint\limits_{\substack{u,\ v,\ w\geqslant 0\\ u+v+w\leqslant 1}} e^{u+v+w} du\,dv\,dw,$$

который вычисляется легко.

Ответ. $\frac{e}{2} - 1$.

5) Вернемся к вычислению двойного интеграла:

$$B = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta\,dx\,dy$$

[ср. 617, 21)]. Так как при $b > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{b}{4\theta^2}}\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{b}}$$

[497, 8)], то, полагая $b = a\sqrt{x^2+y^2}$, получаем:

$$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\theta^2 - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\,d\theta.$$

Подставляя это в интеграл B и меняя порядок интегрирований, найдем

$$B=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\,d\theta\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

или, если перейти к переменным $u=\frac{ax}{2\theta}$ и $v=\frac{ay}{2\theta}$:

$$B=\frac{8}{\sqrt{\pi a^2}}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\theta^2 d\theta\left\{\int_0^\infty e^{-u^2}\cos\frac{2\theta u\xi}{a}\,du\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\frac{2\theta v\eta}{a}\,dv\right\}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{\pi a^2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{a^2}(a^2+\xi^2+\eta^2)}\theta^2 d\theta$$

[519, 6) (а)]. Интегрируя по частям, нетрудно уже получить окончательный результат:

$$B=\frac{\pi}{2}\,\frac{a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Перестановка интегрирований обосновывается существованием тройного интеграла.

6) Найти массу и определить положение центра тяжести сферы

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$$

при следующем законе распределения масс:

$$\rho=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

[ср. 650, 5)].

Указание. Перейти к сферическим координатам.

7) Найти притяжение, испытываемое произвольной точкой пространства со стороны однородной сферы. [Ср. 650, 9).]

Решение. Перейдя к сферическим координатам, найдем

$$F_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho r^2(r\cos\varphi-a)\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но, определяя притяжение сферическим слоем [633, 11)], мы уже нашли значение двойного интеграла

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-a)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}0 & \text{при } a<r,\\ -\frac{4\pi}{a^2} & \text{при } a>r.\end{cases}$$

В таком случае при $a>R$

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^R r^2dr=-\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\frac{1}{a^2},$$

а при $a<R$

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^a r^2dr=-\frac{4}{3}\pi\rho a.$$

8) Найти потенциал однородной сферы на произвольную точку [ср. **650**, 12)].
Указание. Перейти к сферическим координатам и использовать результаты задачи 12), **633**.

9) Решить наново задачи, относящиеся к притяжению и потенциалу сферы, при более общем законе распределения масс:

$$\rho = f(r),$$

где f — произвольная функция расстояния точки от центра.

Отметим, что заключения, сформулированные нами в **650**, 9) и 12), остаются в силе и в настоящем случае.

10) Найти моменты инерции I_z и I_x тора [ср. **650**, 13)].

Указание. Учитывая, что тор получается от вращения круга (см. черт. 108), положение точки в этом теле естественно определить, во-первых, углом φ, который составлен меридиональным сечением с плоскостью xz, и, во-вторых, обыкновенными полярными координатами ρ, θ — в пределах самого сечения. Тогда

$$x = (d + \rho\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (d + \rho\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\theta,$$
$$J = \rho(d + \rho\cos\theta),$$

причем ρ изменяется от 0 до a, а φ и θ — от 0 до 2π.

11) Вычисление потенциала однородного ($\rho = 1$) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \qquad (a > b > c)$$

на его центр приводит к эллиптическому интегралу.

Введем сферические координаты, но, взяв на этот раз ось x за полярную ось:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\varphi\sin\theta.$$

Будем иметь

$$W = \iiint\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi\sin\theta}{c}\right)^2}}} r\,dr =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{B\cos^2\theta + C\sin^2\theta},$$

где

$$B = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}, \quad C = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{c^2}.$$

Внутренний интеграл равен $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$. Полагая, далее, $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\cos\varphi = t$, получим эллиптический интеграл первого рода

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t^2\right)}},$$

который, в свою очередь, с помощью подстановки $t = \sin\lambda$ приводится к форме Лежандра:

$$W = \frac{2\pi\, abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int\limits_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2\lambda}} = \frac{2\pi\, abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\lambda_0,\ k_0),$$

где для краткости положено

$$\lambda_0 = \arcsin\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

663. Притяжение со стороны тела и потенциал на внутреннюю точку. Вернемся теперь к общим выражениям (17) и (18) п° 649 для проекций на координатные оси притяжения телом точки $A(\xi, \eta, \zeta)$ и потенциала на эту точку, но остановимся специально на том случае, когда сама точка A принадлежит телу. Это снова даст повод использовать замену переменных.

Легко убедиться, прежде всего, в существовании упомянутых несобственных интегралов. Достаточно перейти к сферическим координатам, выбрав за полюс точку A, чтобы эти интегралы преобразовались в собственные. Если вырезать из тела (V) сферу (v_0) радиуса r_0 с центром в A, то получим

$$\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho dv}{r} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0} \rho\, \frac{r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}{r} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0} \rho\, r \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta;$$

аналогично

$$\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,(x-\xi)}{r^3}\, dv = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0} \rho \cos\theta \sin^2\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

и т. д. Подинтегральные функции здесь оказываются непрерывными *.

Гораздо более тонких соображений требует установление для рассматриваемого случая соотношений (19) п° 649. Здесь также оказываются полезными сферические координаты.

Прежде всего из предыдущих равенств получаются неравенства

$$\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\, dv}{r} \leqslant 2\pi L r_0^2 \tag{13}$$

$$\left| \iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,(x-\xi)\, dv}{r^3} \right| \leqslant 2\pi L r_0 \quad (L = \max \rho), \tag{14}$$

которыми мы ниже воспользуемся.

Придадим теперь ξ приращение h и наряду с точкой $A(\xi, \eta, \zeta)$ рассмотрим точку $A_1(\xi + h, \eta, \zeta)$. Обозначая по-прежнему через r расстояние AM от точки A до произвольной точки $M(x, y, z)$ тела, через r_1 обозначим расстояние A_1M. Нужно доказать, что при $h \to 0$ и разность

$$\Delta = \frac{1}{h}\left\{ \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho\, dV}{r_1} - \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho\, dV}{r} \right\} - \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho\,(x-\xi)}{r^3}\, dV$$

стремится к нулю.

---

* Плотность ρ мы считаем непрерывной функцией от координат.

Выделим из тела (V) сферу (v_0) радиуса $2|h|$ с центром в A (черт. 115); тогда Δ представится в виде суммы четырех членов:

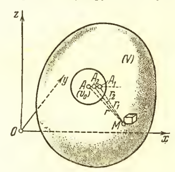
$$\Delta = \frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,dv}{r_1} - \frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,dv}{r} - \iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,(x-\xi)}{r^3}\,dv + \\ + \iiint\limits_{(V)-(v_0)} \rho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) - \frac{x-\xi}{r^3}\right\} dV.$$

Второй и третий члены сразу оцениваются с помощью неравенств (13) и (14) при $r_0 = 2|h|$:

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,dv}{r} \leqslant \frac{2\pi L\,(2h)^2}{|h|} = 8\pi L\,|h|,$$

$$\left|\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,(x-\xi)}{r^3}\,dv\right| \leqslant 2\pi L\cdot 2\,|h| = 4\pi L\,|h|.$$

Чтобы удобнее оценить первый член, окружим точку A_1 сферой (v_1) радиуса



Черт. 115.

$3|h|$; в ней целиком содержится сфера (v_0). Тогда, снова пользуясь неравенством вида (13), будем иметь

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\rho\,dv}{r_1} \leqslant \frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_1)} \frac{\rho\,dv}{r_1} \leqslant \frac{2\pi L\,(3h)^2}{|h|} = 18\pi L\cdot|h|.$$

Наконец, обращаемся к последнему члену. Если ввести функцию

$$f(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{1}{r},$$

то выражение в фигурных скобках есть не что иное, как

$$\frac{f(\xi+h,\ \eta,\ \zeta) - f(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{h} - f'_{\xi}(\xi,\ \eta,\ \zeta),$$

что по формуле Тейлора может быть заменено через

$$\frac{h}{2} f''_{\xi^2}(\xi+\theta h,\ \eta,\ \zeta) \qquad (0<\theta<1).$$

Но в нашем случае

$$f''_{\xi^2}(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \frac{3\,(x-\xi)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

поэтому

$$|f''_{\xi^2}(\xi+\theta h, \eta, \zeta)| \leqslant \frac{4}{r_2^3},$$

где r_2 есть расстояние A_2M от точки M до точки $A_2(\xi+\theta h, \eta, \zeta)$.

Из треугольника AMA_2 (см. чертеж) имеем $A_2M > AM - AA_2$. Но точка M лежит вне сферы (v_0) радиуса $2|h|$, а AA_2, очевидно, меньше $|h|$, так что $AA_2 < \frac{1}{2}AM$ и $A_2M > \frac{1}{2}AM$, т. е. $r_2 > \frac{1}{2}r$. Учитывая все это, приходим к такой оценке:

$$\left|\iiint\limits_{(V)-(v_0)} \rho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{x-\xi}{r^3}\right\}dV\right| \leqslant 16L|h| \cdot \iiint\limits_{(V)-(v_0)} \frac{dV}{r^3}.$$

Возьмем теперь сферу (V_1), с центром в A, столь большого радиуса R, чтобы в ней целиком содержалось тело (V). Тогда полученное выражение в свою очередь оказывается меньшим, чем

$$16L|h| \iiint\limits_{(V_1)-(v_0)} \frac{dV}{r^3} = 16L|h| \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{2|h|}^{R} \frac{\sin\varphi}{r}\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$
$$= 64\pi L \cdot |h|(\ln R - \ln 2|h|).$$

Окончательно

$$|\Delta| \leqslant C_1|h| + C_2|h|\ln 2|h|,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые нетрудно подсчитать. Отсюда ясно, что Δ вместе с h стремится к нулю, т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x.$$

Аналогично устанавливаются и другие два из соотношений (19) п° 649. Наконец, подобными же соображениями можно доказать и непрерывность производных $\frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ даже для точек A, принадлежащих телу (V).

§ 4. Элементы векторного анализа

664. Скаляры и векторы. Применение интегрального исчисления к вопросам математической физики и механики часто удобнее проводить в векторной форме. Поэтому читателю полезно ознакомиться с некоторыми основными понятиями векторного анализа, которые приводят к векторной интерпретации интегральных образований и связывающих их формул интегрального исчисления.

Мы предполагаем, что читатель уже знаком с понятием скаляра или скалярной величины, которая вполне характеризуется своим численным значением (как, например, объем, масса, плотность, температура) и с понятием вектора или векторной величины, которая для полного своего определения требует еще указания на направление (перемещение, скорость, ускорение, сила и т. п.). Говоря о векторе, мы, как обычно, будем представлять себе изображающий его направленный отрезок. Условимся обозначать векторы буквами со стрелками над ними: $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \ldots$; те же буквы без стрелок: $A, r, v, \ldots$ будут означать длины векторов:

$$A = |\vec{A}|, \quad r = |\vec{r}|, \quad v = |\vec{v}|,$$

а буквы со значками, например $A_x, r_y, v_n, \ldots$ — векторов $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \ldots$ проекции, соответственно, на оси $x, y, n, \ldots$ Проекции A_x, A_y, A_z вектора $\vec{A}$ на коор-

динатные оси вполне его определяют и по длине (численному значению) и по направлению.

Мы считаем также, что читатель владеет и основными сведениями из векторной алгебры. Ограничимся напоминанием, что *скалярным произведением* векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется скаляр (число)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\vec{A},\ \vec{B}),$$

которое через проекции на оси выражается так:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \tag{1}$$

Векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ есть вектор с длиною $AB\,|\sin(\vec{A},\ \vec{B})|$, перпендикулярный к обоим сомножителям и направленный в ту сторону, с которой вращение от $\vec{A}$ к $\vec{B}$ (на угол, меньший 180°) кажется происходящим против часовой стрелки; его обозначают через $\vec{A}\times\vec{B}$. Проекции векторного произведения на оси будут

$$A_yB_z-A_zB_y,\quad A_zB_x-A_xB_z,\quad A_xB_y-A_yB_x, \tag{2}$$

если, как мы это впредь и будем предполагать, в основу положена правая система координат [620].

665. Скалярное и векторное поля. Если с каждой точкой M определенной пространственной области (которая может охватывать и все пространство) связана некоторая скалярная или векторная величина, то говорят, что задано *поле* этой величины, соответственно, *скалярное* или *векторное*. В ближайших пп° нам все время придется иметь дело с такими полями.

Примером скалярного поля может служить поле температуры или электрического потенциала. Если положение точки M определять ее координатами по отношению к некоторой произвольно выбранной координатной системе $Oxyz$, то задание поля скалярной величины U равносильно просто заданию числовой функции $U(x,\ y,\ z)$. Мы всегда будем предполагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Если эти производные не обращаются одновременно в нуль, то уравнение

$$U(x,\ y,\ z)=C \qquad (C=\text{const.})$$

определяет некоторую поверхность (без особых точек), вдоль которой величина U сохраняет постоянное значение; такая поверхность называется *поверхностью уровня*. Вся рассматриваемая область заполнена этими поверхностями, так что через каждую точку ее проходит одна и только одна поверхность уровня. Ясно, что поверхности уровня между собой не пересекаются.

Примером векторного поля может служить силовое поле или поле скоростей; подобные поля нам уже встречались. Если положить в основу некоторую систему координат $Oxyz$, то задание поля векторной величины $\vec{A}$ может быть осуществлено путем задания ее проекций на оси

$$A_x(x,\ y,\ z),\quad A_y(x,\ y,\ z),\quad A_z(x,\ y,\ z) \tag{3}$$

как функций от координат точки M, с которой величина $\vec{A}$ связана. И эти функции мы будем предполагать имеющими непрерывные производные. При изучении векторного поля важную роль играют *векторные линии;* векторной линией называется кривая, направление которой в каждой ее точке M совпадает с направлением вектора $\vec{A}$, отвечающего этой точке. Если вспомнить [234], что направляющие косинусы касательной к кривой пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz, то получится, что векторная линия характеризуется равенствами

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}.$$

В предположении, что вектор $\vec{A}$ не обращается в нуль, можно доказать, опираясь иа «теорему существоваиия» из теории линейных систем дифференциальных уравнений, что вся рассматриваемая область заполняется векторными линиями, причем через каждую точку ее проходит одна и только одна такая линия. Векторные линии между собой не пересекаются.

Иногда приходится рассматривать поверхности, составлеиные из векторных линий; их иазывают *векторными поверхностями.* Векторная поверхность характеризуется тем, что в каждой ее точке M соответствующий вектор $\vec{A}(M)$ лежит в плоскости, касательиой к поверхности в этой точке (или тем, что проекция A_n вектора $\vec{A}$ иа иормаль n к поверхности во всех ее точках равна нулю). Если взять в рассматриваемой области какую-нибудь линию, отличную от векторных линий, и через каждую ее точку провести векторную линию, то геометрическое место этих линий и даст нам векторную поверхность. В случае, если упомянутая «направляющая» линия является замкнутой, получается трубкообразная векторная поверхность, которая и называется *векторной трубкой.*

666. Градиент. Пусть задано скалярное поле $U(M) = U(x, y, z)$. *Вектор $\vec{g}$ с проекциями на оси*

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \ \frac{\partial U}{\partial y}, \ \frac{\partial U}{\partial z} \tag{4}$$

называется градиентом величины U (в соответствующей точке) и обозиачается так:

$$\vec{g} = \operatorname{grad} U.$$

Это формальиое определение имеет тот недостаток, что использует координатиые оси и оставляет открытым вопрос о независимости понятия градиента от их выбора.

Чтобы убедиться в этой независимости, вспомним данное еще в первом томе [184] определение производиой от функции по заданиому направлению l: $\frac{\partial U}{\partial l}$, которая выражает скорость возрастаиия фуикции по иаправлению l. Мы имели там формулу

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть направляющие косинусы направлеиия l; если через $\vec{\lambda}$ обозначить едииичный вектор, проведениый в этом иаправлеиии, то ее можно переписать и так:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \vec{\lambda} = \operatorname{grad}_l U.$$

Наибольшего значения эта производная, очевидно, достигает в том случае, когда направление l совпадает с направлеиием градиента, причем это наибольшее значение равно

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Это приводит иас к такому определению [ср. 184]: *градиентом скалярной величины U в данной точке называется вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость возрастания величины U.* Здесь уже координатная система не упоминается вовсе.

Легко усмотреть, что направление градиента совпадает с направлением иормали к поверхиости уровня $U(x, y, z) = C$, проходящей через данную точку.

Итак, скалярное поле $U(M)$ порождает векториое поле **градиента** $\operatorname{grad} U$.

Гамильтон (W. R. Hamilton) ввел в рассмотрение символический вектор с проекциями

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z}$$

на оси координат, который он назвал «наблой» и обозначил через ∇. Пользуясь этим обозначением, можно написать, что

$$\operatorname{grad} U = \nabla U.$$

Действительно, если упомянутый «вектор» формально «умножить» на скаляр U, то и получится вектор с проекциями (4)!

Примеры. 1) Обозначая через $\vec{r}$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий некоторую постоянную точку O с переменной точкой M пространства, а через r — его длину, положим

$$U(M) = \varphi(r),$$

где φ — какая-нибудь скалярная функция от положительного скалярного аргумента r, имеющая производную постоянного знака. Поверхностями уровня, очевидно, будут сферы радиуса r с центром в O, так что направление градиента совпадает с радиальным или прямо противоположно ему, смотря по тому, будет ли $\varphi'(r) > 0$ или < 0. Легко видеть, что

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

В частности,

$$\operatorname{grad} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3}\vec{r} \qquad (c = \text{const.}).$$

Если поместить в точке O массу m и рассмотреть поле ньютоновского притяжения, то его напряжение $\vec{F}$ в точке M будет

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

и, таким образом,

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r}.$$

Вопрос о том, может ли данное векторное поле быть рассматриваемо как поле градиента для некоторой скалярной величины, имеет большую важность. По существу он для нас не нов; мы вернемся к нему ниже [670].

2) Рассмотрим поле температуры U. Взяв элемент поверхности (dS) с определенным образом направленной нормалью n, подсчитаем количество dQ тепла, протекшего через этот элемент в направлении n за бесконечно малый промежуток времени dt. Тепло течет от более нагретых частей тела или среды к менее нагретым, и притом тем быстрее, чем быстрее убывает температура. Обычно принимают, что упомянутое выше элементарное количество тепла dQ пропорционально dS, dt и, наконец, $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$. Обозначая через $k > 0$ коэффициент пропорциональности («коэффициент внутренней теплопроводности» для данного места), можно написать

$$dQ = -k\, dS\, dt \frac{\partial U}{\partial n};$$

в согласии со сказанным выше количество тепла dQ оказывается положительным именно в том случае, когда $\frac{\partial U}{\partial n}$ отрицательно, т. е. когда в направлении n температура U убывает.

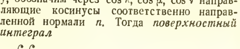
Если ввести так называемый вектор потока тепла

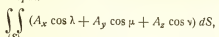
$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} U,$$

то выражение для dQ можно переписать короче:

$$dQ = dS\, dt\, q_n.$$

667. Поток вектора через поверхность. Пусть теперь задано некоторое векторное поле $\vec{A}(M)$, т. е. заданы три функции (3). Возьмем поверхность (S) и, выбрав определенную ее сторону, обозначим через $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ направляющие косинусы соответственно направленной нормали n. Тогда *поверхностный интеграл*





$$\iint\limits_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu)\, dS,$$

который короче можно написать так:

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS,$$

называют потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность (S) в указанную сторону.

Черт. 116.

Обратимся к примерам.

1) Самое название «поток» связано с некоторой гидромеханической задачей. Рассмотрим движение жидкости в пространстве; в общем случае мы не предполагаем его стационарным, так что скорость движения $\vec{v}$ зависит не только от положения точки M, к которой она относится, но и от времени t. Поставим себе задачей вычислить количество жидкости, протекающее через поверхность (S) в определенную сторону за бесконечно малый промежуток времени dt. Через элемент (dS) поверхности протечет количество жидкости, которое заполнит собой цилиндр с основанием dS и высотой $v_n dt$ (черт. 116), где нормаль n предполагается направленной именно в выбранную сторону. Если через ρ обозначить плотность жидкости, которая также может зависеть и от положения точки, и от времени, то масса протекшей через dS жидкости будет

$$\rho\, dS\, v_n dt.$$

Для всей поверхности (S) получим

$$dt \iint\limits_{(S)} \rho v_n dS.$$

Количество же протекшей жидкости Q, отнесенное к единице времени, выразится интегралом

$$Q = \iint\limits_{(S)} \rho v_n dS; \tag{5}$$

читатель узнает в нем «поток вектора» $\rho\vec{v}$ через поверхность (S)!

2) Аналогично можно говорить и о потоке тепла. Легко видеть, что [при обозначениях п° **641**, 2)] за время dt через поверхность (S) протечет количество тепла, равное

$$dt \iint\limits_{(S)} q_n dS.$$

Если отнести количество протекшего тепла к единице времени, то получим

$$\iint\limits_{(S)} q_n dS,$$

т. е. «поток вектора» $\vec{q}$ через поверхность (S). Отсюда и название вектора

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} U$$

— «вектор потока тепла».

Замечание. Так как оба рассмотренных в 1) и 2) процесса мы не предполагали установившимися, то на деле величина Q сама, вообще говоря, зависит от времени. Она имеет характер скорости и точнее может быть названа *скоростью возрастания количества протекшей через (S) жидкости (или протекшего тепла) в рассматриваемый момент времени.*

3) Если рассматривается поле ньютоновского притяжения [о котором была речь в **666**, 1)]

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^3}\vec{r},$$

то поток этого вектора через поверхность (S)

$$\iint\limits_{(S)} F_n dS = -m \iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r, n)}{r^2}\, dS$$

оказывается связанным с телесным углом, под которым поверхность (S) видна из точки O [**653**].

668. Формула Остроградского. Дивергенция. Возвращаясь к общему случаю векторного поля $\vec{A}$, рассмотрим тело (V), ограниченное замкнутой поверхностью (S); через n будем обозначать внешнюю нормаль к поверхности. Тогда по формуле Остроградского [**651** (5)], если положить в ней $P = A_x$, $Q = A_y$, $R = A_z$, можно преобразовать поток вектора $\vec{A}$ через поверхность (S) вовне в тройной интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS = \iint\limits_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu)\, dS =$$
$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV.$$

Стоящее под знаком тройного интеграла выражение называется дивергенцией (или расходимостью) вектора $\vec{A}$ (в соответствующей точке) и обозначается символом

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Таким образом, формула Остроградского перепишется в виде

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{A}\, dV, \tag{7}$$

в каком она чаще всего и применяется.

Введенная только что величина, дивергенция, есть скаляр; но ее определение формально связано с выбором координатной системы. Для того чтобы освободиться от этого недостатка, поступим следующим образом. Окружим точку M каким-нибудь телом (V) с поверхностью (S) и напишем формулу (7); если обе части разделить на объем V тела и перейти к пределу, стягивая тело

(V) в точку M, то [644, 8°] справа как раз и получится $\operatorname{div}\vec{A}$ в точке M. Итак,

$$\operatorname{div}\vec{A}=\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(S)}A_n dS}{V};\tag{8}$$

это равенство также может служить определением дивергенции, причем в этой форме определение уже не зависит от выбора координатной системы.

На этот раз в е к т о р н о е п о л е $\vec{A}$ п о р о ж д а е т с к а л я р н о е п о л е д и в е р г е н ц и и $\operatorname{div}\vec{A}$.

Заметим, что определение (6) дивергенции может быть с помощью символического вектора ∇ Г а м и л ь т о н а записано так:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A};$$

это станет ясно, если вспомнить выражение (1) скалярного произведения двух векторов.

П р и м е р. Остановимся на движении н е с ж и м а е м о й жидкости ($\rho=1$) при наличии источников (или стоков). *Производительностью источников*, заключенных внутри замкнутой поверхности (S), называется количество вытекающей через (S) жидкости, отнесенное к единице времени, т. е. поток вектора-скорости $\vec{v}$

$$\iint\limits_{(S)}v_n dS$$

[см. 667, 1)]. Если источники распределены н е п р е р ы в н о по рассматриваемой области, то вводится понятие *плотности источников*. Так называют предельное значение производительности источников в теле (V), окружающем точку M, рассчитанное на единицу объема, т. е.

$$\lim_{(V)\to M}\frac{\iint\limits_{(V)}v_n dS}{V}.$$

Но, как мы только что видели [см. (8)], этот предел равен $\operatorname{div}\vec{v}$; итак, $\operatorname{div}\vec{v}$ и е с т ь п л о т н о с т ь и с т о ч н и к о в.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для теплового потока при наличии источников тепла, лишь вместо вектора-скорости пришлось бы взять вектор потока тепла.

669. Циркуляция вектора. Формула Стокса. Вихрь. Пусть снова дано какое-нибудь векторное поле $\vec{A}(M)$. *Интеграл*

$$\int\limits_{(l)}A_x dx+A_y dy+A_z dz=\int\limits_{(l)}A_l dl,$$

взятый по некоторой кривой (l) *в пределах рассматриваемой области, называется линейным интегралом от вектора* $\vec{A}$ *вдоль кривой* (l). В случае з а м к н у т о й кривой этот интеграл называют *циркуляцией вектора* $\vec{A}$ *вдоль* (l).

Если поле $\vec{A}$ есть силовое поле, то линейный интеграл выражает работу сил поля при перемещении точки по кривой (l) [ср. 554].

Представим себе некую поверхность (S), ограниченную замкнутым контуром (l). Тогда по известной уже читателю формуле Стокса [639 (21*)] циркуляция вектора $\vec{A}$ вдоль этого контура может быть выражена поверхностным интегралом:

$$\int\limits_{(l)} A_l dl = \iint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\mu + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\nu \right\} dS.$$

Вектор с проекциями на оси

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{9}$$

называется вихрем или ротором вектора $\vec{A}$ и обозначается символом

$$\operatorname{rot} \vec{A}\,*.$$

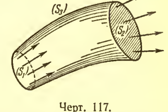
Таким образом, в векторной форме формула Стокса запишется так:

$$\int\limits_{(l)} A_l dl = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\, dS. \tag{10}$$

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура оказывается равной потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром. При этом направление обхода контура и сторона поверхности должны соответствовать друг другу, как это разъяснено в п° 620.

Данное выше определение понятия «вихрь» страдает обычным недостатком: в нем используется определенная координатная система. Взяв любое направление n, исходящее из данной точки M, окружим ее в перпендикулярной к n плоскости площадкой (σ) с контуром (λ) (черт. 117). Тогда по формуле Стокса

$$\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\, d\sigma;$$



Черт. 117.

разделив обе части равенства на площадь σ упомянутой площадки и «стягивая» последнюю к данной точке, в пределе получим

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda\,**}{\sigma}.$$

Таким образом, удается определить проекцию вектора $\operatorname{rot} \vec{A}$ на любую ось, а значит, — и сам вектор, без всякой ссылки на предварительно выбранную координатную систему.

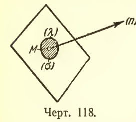
Подчеркнем, что здесь векторное поле A порождает векторное же поле вихря $\operatorname{rot} \vec{A}$. С помощью гамильтонова вектора ∇ можно

* От английского слова rotation — вращение; употребительно и обозначение $\operatorname{curl} \vec{A}$ — от английского слова curl, означающего «завиток».

** Легко усмотреть здесь своеобразное дифференцирование по области; обосновать его предоставляем читателю.

просто записать и определение вихря: $\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$ [см. выражения (2) для проекций векторного произведения!].

Пример. Рассмотрим произвольное движение некоего твердого тела. Если фиксировать в нем точку O (черт. 118), то, как доказывается в кинематике, для любого момента времени поле скорости $\vec{v}$ точек тела определяется формулой



Черт. 118.

$$\vec{v} = \vec{v}^O + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{v}^O$ есть «поступательная скорость», т. е. скорость точки O, $\vec{\omega}$ — мгновенная «угловая скорость», а $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с произвольной точкой M тела. Проекции этого вектора на оси произвольной системы $Oxyz$ будут [см. (2)]

$$v_x^O + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y^O + \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z^O + \omega_x y - \omega_y x.$$

Если, воспользовавшись выражениями (9), подсчитать проекции вихря для этого поля, то получим $2\omega_x$, $2\omega_y$, $2\omega_z$, так что $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$.

Таким образом, с точностью до числового множителя, ротор поля скорости $\vec{v}$ дает как раз мгновенную угловую скорость; с этим связано и самое название «ротор».

670. Специальные поля. В этом и следующем п° для простоты мы ограничимся рассмотрением полей, связанных с прямоугольными пространственными областями, в частности со всем трехмерным пространством.

1) *Потенциальное поле.* Векторное поле $\vec{A}$ называется потенциальным, если существует скалярная величина U, для которой $\vec{A}$ служит градиентом:

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U.$$

Это равенство распадается на следующие три [см. (4)]:

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и равносильно утверждению, что выражение

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

является полным дифференциалом от функции $U(x, y, z)$. Первообразная функция U называется потенциальной функцией (или скалярным потенциалом) поля $\vec{A}$.

Перефразируя уже известное нам [564 и 641; см. условия (Б)], можно сказать, что

для того чтобы поле $\vec{A}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялись равенства

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

т. е. чтобы $\operatorname{rot}\vec{A}$ *обращался в нуль.*

Таким образом, понятие потенциального поля оказывается совпадающим с понятием «безвихревого» поля.

Опираясь на сказанное в n° **564** и **641**, можно охарактеризовать потенциальное поле и тем, что *циркуляция по простому замкнутому контуру всегда будет нулем, а линейный интеграл по кривой, соединяющей любые две точки поля, оказывается не зависящим от формы кривой.*

Сама потенциальная функция U, с точностью до произвольного постоянного слагаемого, и определяется линейным интегралом

$$\int\limits_{(l)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int\limits_{(l)} A_l dl,$$

взятым от некоторой фиксированной точки M_0 до переменной точки M рассматриваемой области по любой соединяющей эти точки кривой (l).

Все эти факты получают естественное истолкование в терминах работы для случая потенциального силового поля. Таким будет, как известно, поле ньютоновского притяжения как в случае отдельных притягивающих центров, так и при непрерывном распределении притягивающих масс.

2) *Соленоидальное поле.* Векторное поле $\vec{A}$ называется соленоидальным, или трубчатым (от греческого слова σωλὴν — трубка), если существует векторная величина $\vec{B}$, для которой $\vec{A}$ служит вихрем:

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Это равенство распадается на следующих три [см. (9)]:

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \quad (12)$$

Сам вектор $\vec{B}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{A}$.

Докажем теперь следующую теорему, дающую легко проверяемое условие соленоидальности:

для того чтобы поле $\vec{A}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей рассматриваемой области выполнялось равенство

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Необходимость проверяется непосредственно вычислением: если $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$, то [см. (12)]

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Достаточность. Пусть имеет место равенство (13). Постараемся найти хотя бы частное решение (B_x, B_y, B_z) уравнений (12).

В целях упрощения положим с самого начала $B_x \equiv 0$. Тогда первые два из уравнений (12) примут вид

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y$$

и при интегрировании по z дадут следующие выражения для B_x и B_y:

$$B_y = -\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y), \quad B_x = \int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)\, dz,$$

где z_0 — произвольное из допустимых значений z, а $\varphi(x, y)$ — еще подлежащая определению функция двух переменных. Дифференцируя интегралы по правилу Лейбница, найдем

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}\, dz.$$

Используя равенство (13) для того, чтобы удовлетворить последнему из уравнений (12), получим такое условие на функцию φ

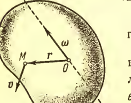
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x(x, y, z_0),$$

откуда φ легко определяется интегрированием по x (с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от y).

Итак, наше утверждение доказано. Представляет интерес еще установить, какая степень произвола остается при определении векторного потенциала $\vec{B}$ из уравнения (11). Если $B^{(0)}$ есть какое-либо фиксированное его решение, то общее решение $\vec{B}$ определяется условием $\operatorname{rot}(\vec{B} - \vec{B}^{(0)}) = 0$ и, в силу 2), представится в виде

$$\vec{B} = \vec{B}^{(0)} + \vec{C},$$

где C есть любой потенциальный вектор.



Черт. 119.

Из соображений n° **652** явствует, что условие (13), характеризующее соленоидальное поле $\vec{A}$, равносильно *требованию, чтобы поток вектора $\vec{A}$ через любую замкнутую* (и ограничивающую некоторое тело (V)) *поверхность* (S) *был равен нулю.*

Рассмотрим теперь в качестве тела (V) отрезок векторной трубки (черт. 119) между двумя произвольными ее сечениями (S_1) и (S_2); боковую поверхность отрезка трубки обозначим через (S_3). Тогда — в случае соленоидального поля, — по сказанному,

$$\left\{ \iint_{(S_1)} + \iint_{(S_2)} + \iint_{(S_3)} \right\} A_n dS = 0,$$

причем нормаль направлена в о в н е по отношению к телу. Вдоль поверхности (S_3), очевидно, $A_n = 0$ **(665)**; если в сечении (S_1) изменить направления нормалей (так, чтобы они — в некотором смысле — были направлены согласно с нормалями в (S_2), см. черт. 119), то придем к равенству:

$$\iint\limits_{(S_1)} A_n dS = \iint\limits_{(S_2)} A_n dS.$$

Таким образом, мы получаем следующее свойство соленоидального поля: *поток вектора через поперечные сечения векторной трубки сохраняет постоянную величину*; ее называют и н т е н с и в н о с т ь ю векторной трубки.

Легко показать, что указанное свойство вполне характеризует соленоидальное поле. Это сразу следует из формулы (8) для расходимости вектора $\vec{A}$, если в качестве тела (V), окружающего выбранную точку M, взять именно отрезок векторной трубки: тогда $\iint\limits_{(S)} A_n dS = 0$, а с ним и $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

Если вернуться к приведенной выше гидромеханической интерпретации векторного поля, то окажется, что в случае несжимаемой жидкости и п р и о т с у т с т в и и и с т о ч н и к о в $(\operatorname{div} \vec{v} = 0)$ расход жидкости через поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение для всех сечений.

3) *Разложение произвольного векторного поля.* Мы покажем теперь, что *произвольный вектор A всегда может быть представлен в виде суммы п о т е н ц и а л ь н о г о вектора $\vec{A}'$ и с о л е н о и д а л ь н о г о вектора $\vec{A}''$*:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}''$$
$$(\operatorname{rot} \vec{A}' = 0, \ \operatorname{div} \vec{A}'' = 0).$$

Положим сразу же $\vec{A}' = \operatorname{grad} \Phi$, где Φ — еще подлежащая определению скалярная функция; равенство $\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$ этим уже обеспечено. Теперь $\vec{A}'' = \vec{A} - \operatorname{grad} \Phi$, так что Φ нужно выбрать под условием

$$\operatorname{div} \vec{A}'' = \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0.$$

Но

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi,$$

если, как обычно, под $\Delta \Phi$ разуметь оператор Л а п л а с а. Таким образом, для определения Φ имеем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{A},$$

которое всегда имеет решения (и даже бесчисленное множество их).

671. Обратная задача векторного анализа. Она состоит в разыскании векторного поля $\vec{A}$ по наперед заданным его расходимости $\operatorname{div}\vec{A} = F$ (F — скалярная функция) и вихрю $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$. Ввиду 2), ясно, что для разрешимости задачи во всяком случае необходимо условие: $\operatorname{div}\vec{B} = 0$; *предположим это условие выполненным.*

Естественно (если вспомнить 3)) искать решение $\vec{A}$ в виде суммы решений $\vec{A}'$ и $\vec{A}''$ таких систем:

$$(1)\ \operatorname{rot}\vec{A}' = 0,\ \operatorname{div}\vec{A}' = F,\ (2)\ \operatorname{rot}\vec{A}'' = \vec{B},\ \operatorname{div}\vec{A}'' = 0.$$

(1) Из первого уравнения, в силу 1), $\vec{A}' = \operatorname{grad}\Phi$. Для определения Φ обратимся ко второму уравнению:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = F \quad \text{или} \quad \Delta\Phi = F,$$

так что Φ есть одно из решений уже знакомого нам дифференциального уравнения.

(2) Ввиду того, что (по предположению) $\operatorname{div} B = 0$, в силу 2), уравнение первое рассматриваемой системы имеет решение.* Обозначая через $\vec{A}_0''$ какое-нибудь фиксированное частное решение этого уравнения, общее его решение можно написать в виде $\vec{A}'' = \vec{A}_0'' + \vec{C}$, где $\vec{C}$ — произвольный потенциальный вектор, $\vec{C} = \operatorname{grad}\Phi$. Остается удовлетворить еще и второму уравнению системы (2), т. е. определить Φ из условия

$$\operatorname{div}\vec{A}'' = \operatorname{div}\vec{A}_0'' + \Delta\Phi = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\Phi = -\operatorname{div}\vec{A}_0''.$$

Поставленная задача решена. Установить теперь степень произвола в определении искомого вектора $\vec{A}$. Легко сообразить, что два решения разнятся таким вектором $\vec{G}$, который удовлетворяет двум уравнениям:

$$\operatorname{div}\vec{G} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{G} = 0.$$

Второе из них дает: $\vec{G} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{G} = 0$, а из первого получаем тогда, что $\Delta H = 0$: H есть произвольная гармоническая функция. Однозначно вектор $\vec{A}$ получается, если установлены и «граничные условия», которые приводят к однозначному определению упомянутой гармонической функции.

Результаты двух последних n° распространяются и на области общего вида, удовлетворяющие — это нужно подчеркнуть — требованиям односвязности того или другого типа, смотря по случаю.

672. Приложения. В заключение этого параграфа мы приведем различные примеры использования понятий векторного анализа и основных интегральных формул в векторной форме. Начнем с примеров на применение формулы Остроградского и связанных с нею понятий.

---

* Обращаем внимание читателя на изменение обозначений — по сравнению с 2.

1°. *Уравнение неразрывности.* Рассмотрим вновь движение жидкости при отсутствии источников, но не будем, вообще говоря, предполагать ее несжимаемой. Считая, что жидкость сплошным образом заполняет пространство или определенную его часть, вырежем из жидкости произвольное тело (V), ограниченное поверхностью (S). Количество жидкости Q, вытекающее вовне из этого тела, рассчитанное на единицу времени, как мы знаем, выразится формулой (5). Подсчитаем это же количество иначе. Если учесть изменение плотности ρ за промежуток dt на величину $\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt$, то масса $\rho\,dV$ элемента (dV) тела изменится на $\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\,dV$, а масса всего рассматриваемого тела на

$$dt\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV.$$

Такое количество жидкости должно за промежуток времени dt протечь внутрь тела; изменив его знак, получим количество жидкости, вытекающей за этот промежуток вовне. Наконец, если отнести количество вытекающей жидкости к единице времени, то найдем

$$Q=-\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV.$$

Чтобы удобнее было приравнять оба выражения для Q, преобразуем поверхностный интеграл (5) по формуле Остроградского (7) также к тройному интегралу. Таким путем мы получим

$$\iiint\limits_{(V)}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\overrightarrow{\rho v})\right\}dV=0.$$

Так как это равенство имеет место для любого тела (V) в пределах рассматриваемой области, то, в силу 644, 8°, отсюда следует, что тождественно

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\overrightarrow{\rho v})=0. \tag{9}$$

Это равенство и известно под наименованием *уравнения неразрывности.*

2°. *Основное уравнение движения идеальной жидкости.* Пусть на жидкость в общем случае действуют как внешние, так и внутренние силы. Внешние силы мы считаем пропорциональными массе, так что, если $\vec{F}$ есть сила, действующая на единицу массы, то на элемент жидкости (dV) будет действовать сила $\rho\,dV\vec{F}$.

Что же касается внутренних сил, т. е. сил, действующих на выделенное из жидкости тело (V) со стороны остальной жидкости, то идеальная жидкость характеризуется именно тем, что эти силы приводятся к нормальному по отношению к поверхности (S) этого тела давлению, направленному внутрь тела. При этом самая величина p давления, приходящегося на единицу площади, зависит не от ориентации той бесконечно малой площадки, к которой давление приложено, а лишь от ее координат. Таким образом, на элемент поверхности (dS) действует сила, проекции которой на оси будут

$$-p\,dS\cos\lambda,\quad -p\,dS\cos\mu,\quad -p\,dS\cos\nu,$$

если через $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ обозначить направляющие косинусы внешней нормали к поверхности. На все тело (V) будет действовать сила, определяемая проекциями

$$-\iint\limits_{(S)}p\cos\lambda\,dS,\quad -\iint\limits_{(S)}p\cos\mu\,dS,\quad -\iint\limits_{(S)}p\cos\nu\,dS,$$

или — если снова прибегнуть к преобразованию по формуле Остроградского, — интегралами

$$-\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial y} dV, \quad -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Сила, приходящаяся на долю элемента (dV) жидкости, будет иметь проекции

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} dV, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} dV,$$

и, следовательно, как вектор, представится в виде

$$-dV \operatorname{grad} p.$$

Если теперь через $\vec{a}$ обозначить отвечающее элементу (dV) ускорение, то по закону движения Ньютона

$$\rho\, dV \vec{a} = \vec{F} \rho\, dV - dV \operatorname{grad} p,$$

откуда окончательно

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{14}$$

Это и есть *основное уравнение движения идеальной жидкости* в векторной форме. Оно распадается на три скалярных уравнения, если перейти к проекциям на три оси координат.

3°. *Уравнение теплопроводности.* В качестве последнего примера применения формулы Остроградского рассмотрим вопрос о тепловом состоянии тела под действием внутренней теплопроводности при отсутствии источников тепла.

Если выделить тело (V), ограниченное поверхностью (S), то, как мы видели в 667, 2), количество тепла, вытекающего из тела через поверхность (S) вовне, рассчитанное на единицу времени, будет равно

$$Q = -\iint\limits_{(S)} k \operatorname{grad}_n U dS$$

(мы сохраняем прежние обозначения). Изменив знак в этом выражении и преобразуя его к тройному интегралу, для количества тепла, втекающего внутрь тела, найдем выражение

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} (k \operatorname{grad} U)\, dV. \tag{15}$$

Это тепло повлечет за собой изменение температуры внутри тела (V) и может быть подсчитано иначе. Увеличение температуры U на $dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$ за промежуток времени dt потребует сообщения элементу (dV) тела количества тепла

$$c\, dU \rho\, dV = c \frac{\partial U}{\partial t} dt\, \rho\, dV,$$

где c означает теплоемкость тела в рассматриваемой точке. Все тело (V) за время dt поглотит количество тепла

$$dt \iiint\limits_{(V)} c\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dV;$$

если же отнести его к единице времени, то получим

$$\iiint\limits_{(V)} c\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dV. \tag{16}$$

Приравнивая выражения (15) и (16), придем к равенству

$$\iiint\limits_{(V)} \left\{ c\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) \right\} dV,$$

которое выполняется для любого тела (V), взятого в рассматриваемой области. Отсюда, как и выше в 1°, заключаем, что в этой области имеем тождественно:

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U).$$

Это и есть *уравнение теплопроводности.*

В случае однородной среды оно принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U,$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ и Δ означает оператор Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

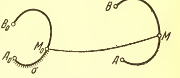
Наконец, при стационарном распределении температуры U она не зависит от времени и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0,$$

т. е. является гармонической функцией координат точки.

Перейдем к примерам приложения формулы Стокса и связанных с нею понятий. Эти приложения относятся к движению жидкости.

4°. Рассматривая внутри жидкости линию или поверхность в некий момент времени, мы будем интересоваться тем, какой образ составится из тех же жидких частиц в другой момент. В этих исследованиях важную роль будет играть такое вспомогательное утверждение: *производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру равна циркуляции ускорения по этому же контуру.*



Черт. 120.

Рассмотрим какой-нибудь контур $(L_0) = (A_0B_0)$ в момент времени t_0. Выберем за параметр, определяющий положение точки M_0 на нем, скажем, дугу $\sigma = \overset{\frown}{A_0M_0}$ (черт. 120); если в момент t жидкий контур $(L_0) = (A_0B_0)$ перешел в $(L) = (AB)$, то положение точки M, в которую перешла точка M_0, определится уравнениями вида

$$x = \varphi(\sigma, t), \quad y = \psi(\sigma, t), \quad z = \chi(\sigma, t) \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant \bar{\sigma}).$$

Циркуляция скорости

$$J = \int\limits_{(L)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int\limits_0^{\bar{\sigma}} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma \tag{17}$$

может быть продифференцирована по t по правилу Лейбница:

$$\frac{dJ}{dt}=\int_0^{\bar\sigma}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)d\sigma+$$

$$+\int_0^{\bar\sigma}\left(v_x\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma\partial t}+v_y\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma\partial t}+v_z\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma\partial t}\right)d\sigma=$$

$$=\int_0^{\bar\sigma}\left(a_x\frac{\partial x}{\partial\sigma}+a_y\frac{\partial y}{\partial\sigma}+a_z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)d\sigma+$$

$$+\int_0^{\bar\sigma}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial\sigma}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial\sigma}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial\sigma}\right)d\sigma.$$

Первый из полученных двух интегралов дает циркуляцию ускорения

$$\int_{(L)} a_x dx+a_y dy+a_z dz.$$

Второй же непосредственно вычисляется, так как подинтегральное выражение есть производная по σ от

$$\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}v^2;$$

он равен

$$\left.\frac{1}{2}v^2\right|_A^B,$$

что в случае замкнутого контура (L) обращается в 0.

Итак, окончательно:

$$\frac{dJ}{dt}=\int_{(L)} a_x dx+a_y dy+a_z dz, \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

5°. Пусть мы имеем дело с идеальной жидкостью в смысле 2°. Кроме того, сделаем еще два предположения: 1) сила $\vec F$ имеет потенциал, т. е.

$$\vec F=\operatorname{grad} U;$$

2) плотность ρ есть однозначная функция от давления *:

$$\rho=\varphi(p).$$

Введем величину

$$\Phi(p)=\int\frac{dp}{\varphi(p)};$$

* Жидкость, удовлетворяющая последнему требованию, иногда называется «баротропной».

тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

и аналогично

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

так что

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Мы имели уже основное уравнение гидродинамики (14). Теперь оно напишется в виде

$$\vec{a} = \operatorname{grad}(U - \Phi).$$

Если подставить это в полученное выше равенство (18), то окажется

$$\frac{dJ}{dt} = \int\limits_{(L)} d(U - \Phi) = 0, \text{ так что } J = \text{const}.$$

Таким образом, *циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру постоянна во времени.* Это есть теорема Томсона (W. Thomson).

Отсюда, как простое следствие, получается интересное предложение Лагранжа: *если рассматриваемая масса жидкости не имеет вихрей в некий определенный момент времени, то она не может иметь вихрей и во всякий другой момент.* Действительно, отсутствие вихрей равносильно обращению в нуль циркуляции скорости вдоль любого замкнутого контура [**670,1°**]. Если это обстоятельство имеет место однажды, то по теореме Томсона то же будет и всегда.

6°. Теперь мы в состоянии доказать две важные теоремы Гельмгольца, относящиеся к «вихревым» линиям и трубкам *. При этом мы все время сохраняем предположения, указанные в начале 5°.

Теорема о сохранении вихревых линий. *Частицы жидкости, образующие вихревую линию в некий момент времени, и во все время движения образуют вихревую линию.*

Нам проще доказать это сначала относительно вихревой поверхности. Пусть (S_0) будет такой поверхностью в момент времени t_0; тогда в каждой ее точке вихрь скорости

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

будет лежать в касательной к (S_0) плоскости, т. е. $\Omega_n = 0$. Если взять на поверхности любой замкнутый контур (λ_0), ограничивающий часть (σ_0) поверхности, то по формуле Стокса (14)

$$\int\limits_{(\lambda_0)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = \iint\limits_{(\sigma_0)} \Omega_n dS_0 = 0.$$

---

* Вихревой линией или поверхностью (в частности, трубкой) называется, соответственно, векторная линия или поверхность (трубка) для поля вихря.

В момент времени t жидкая поверхность (S_0) перейдет в поверхность (S), ее часть (σ_0) — в (σ), а жидкий контур (λ_0) — в контур (λ). Но по теореме Томсона и сейчас

$$\int\limits_{(\lambda)} v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0,$$

так что (снова по формуле Стокса)

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Omega_n dS = 0.$$

Ввиду произвольности (σ) отсюда легко заключить, что вдоль (S) тождественно

$$\Omega_n = 0,$$

так что и поверхность (S) оказывается вихревой.

Так как вихревую линию всегда можно рассматривать как пересечение двух вихревых поверхностей, то теорема доказана. В частности, отсюда следует и сохранение вихревых трубок.

Теперь уж совсем легко получается

Теорема о сохранении интенсивности вихревых трубок. *Интенсивность любой вихревой трубки во все время движения остается постоянной.*

По формуле Стокса интенсивность вихревой трубки, т. е. поток вихря через поперечное сечение трубки, приводится к циркуляции скорости по контуру этого сечения [ср. 670, 23]. В таком случае требуемое заключение прямо следует из теоремы Томсона [3°].

Этими примерами применения введенных понятий и основных формул интегрального исчисления мы и ограничимся.

§ 5. Многократные интегралы

673. Задача о притяжении и потенциале двух тел. Потребности анализа и его приложений не исчерпываются уже изученными типами определенных интегралов: простыми, двойными и тройными.

Проиллюстрируем это на примере задачи о притяжении двух тел. Будем обозначать через x_1, y_1, z_1 координаты точек первого тела, (V_1), а через x_2, y_2, z_2, — координаты точек второго тела, (V_2). Пусть в функции от этих координат заданы и плотности распределения масс в обоих телах: $\rho_1 = \rho_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\rho_2 = \rho_2(x_2, y_2, z_2)$. Если в каждом из тел выделить по элементу с массой, соответственно, $\rho_1 dx_1 dy_1 dz_1$ и $\rho_2 dx_2 dy_2 dz_2$, то второй из них действует на первый по закону Ньютона с силой

$$\frac{\rho_1\rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}^2}\ ^*,$$

где $r_{1,2}$ есть расстояние между элементами:

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

* Коэффициент пропорциональности в ньютоновой формуле закона всемирного тяготения мы, как обычно, полагаем равным 1.

Так как эта сила направлена от точки (x_1, y_1, z_1) к точке (x_2, y_2, z_2), то ее направляющие косинусы будут $\frac{x_2 - x_1}{r_{1,2}}$, $\frac{y_2 - y_1}{r_{1,2}}$, $\frac{z_2 - z_1}{r_{1,2}}$. Поэтому проекция, скажем, на ось x силы притяжения первого элемента вторым равна

$$\frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2.$$

Проекция же F_x результирующей силы, с какой второе тело притягивает первое, получается суммированием найденных выражений по всем элементам обоих тел, т. е. выражается ш е с т и к р а т н ы м интегралом

$$F_x = \iiiiiint \frac{\rho_1 \rho_2 (x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

распространенным на ш е с т и м е р н у ю область $(V) = (V_1) \times (V_2)$ точек $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, где (x_1, y_1, z_1) взято из (V_1), а (x_2, y_2, z_2) из (V_2). Так же выражаются и другие две проекции.

Аналогично этому величина

$$\frac{\rho_1 \rho_2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{1,2}}$$

есть потенциал одного элемента на другой. Суммируя эти выражения, получим потенциал одного тела на другое, снова в виде шестикратного интеграла:

$$W = \iiiiiint\limits_{(V)} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{1,2}} dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2.$$

Если оба тела тождественны, то подобный интеграл, деленный на 2 (ибо иначе каждая пара элементов учитывалась бы дважды!), даст нам п о т е н ц и а л т е л а н а с е б я.

Предложим себе для примера вычислить потенциал на себя однородной $(\rho_1 = \rho_2 = 1)$ сферы $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, т. е. интеграл

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiiiiint\limits_{\substack{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leqslant R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leqslant R^2}} \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{1,2}}.$$

Вычисление можно провести так. Потенциал сферы $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leqslant R^2$ на элемент $dx_1\, dy_1\, dz_1$ с координатами x_1, y_1, z_1, отстоящий на расстояние $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ от центра, мы уже знаем [650, 12)]; он выражается т р о й н ы м интегралом и равен

$$\left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2\right) dx_1\, dy_1\, dz_1 {}^*.$$

* Следует учесть, что масса точки, на которую здесь вычисляется потенциал, есть не 1, а $dx_1\, dy_1\, dz_1$; кроме того, роль a, которое фигурирует в выведенной раньше формуле, здесь играет r_1.

Остается еще просуммировать подобные выражения по всем элементам сферы $x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant R^2$, т. е. взять еще один тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant R^2} \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2\right) dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Это легко выполнить, переходя к сферическим координатам. Окончательно получим:

$$W_0 = \frac{16}{15}\pi^2 R^5.$$

В данном случае вычисление шестикратного интеграла свелось к вычислению двух тройных интегралов, из которых один к тому же был уже известен.

Перейдем теперь к установлению относящихся сюда общих понятий, хотя в большинстве случаев придется ограничиться ссылкой на аналогию с изученными выше видами интегралов.

674. Объем n-мерного тела, n-кратный интеграл. Наподобие того, как при определении простого, двойного, тройного интеграла, мы пользовались понятием длины отрезка, площади плоской фигуры, объема пространственного тела, в основе определения n-кратного интеграла лежит понятие объема* n-мерной области. Для простейшей n-мерной области — n-мерного прямоугольного параллелепипеда

$$[a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ \ldots;\ a_n,\ b_n] \tag{1}$$

объемом называется произведение его измерений

$$(b_1-a_1)\ (b_2-a_2)\ \ldots\ (b_n-a_n).$$

Само собою ясно, что́ разуметь под объемом тела, составленного из конечного числа таких параллелепипедов. Элементарно можно показать, что объем не зависит от того, каким образом тело разложено на параллелепипеды.

Рассматривая такие «параллелепипедальные» тела, входящие в данное n-мерное тело (V) и выходящие из него, можно обычным образом построить понятие объема V для тела (V) [ср. **340**].

Мы будем иметь дело только с телами, для которых объем существует; он заведомо существует для тел, ограниченных гладкими или кусочно-гладкими поверхностями**, в частности, для

---

* Мы решили сохранить этот термин, хотя смысл его, разумеется, меняется вместе с n: речь идет об „n-мерном объеме". Можно было бы заменить его одним из слов: „протяженность", „мера" и т. п.

** Гладкой поверхностью называется здесь образ в n-мерном пространстве, определяемый n параметрическими уравнениями с $n-1$ параметрами, причем фигурирующие в уравнениях функции параметров должны быть непрерывны вместе с частными производными, и определители $(n-1)$-го порядка матрицы производных не должны одновременно обращаться в нуль.

простейших знакомых нам n-мерных областей — n-мèрного симплекса

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant h$$

и n-мерной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2;$$

ниже мы вычислим их объемы [**650**, 1) и 2)].

Пусть в области (V) задана функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; тогда, разлагая эту область на элементарные части и повторяя другие столь привычные уже нам операции [ср. **643**], придем к понятию n-кратного интеграла

$$I = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{(V)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (2)$$

В случае непрерывной подинтегральной функции он наверное существует.

Вычисление такого интеграла приводится к вычислению интегралов низшей кратности, вплоть до простых. В случае, когда область интегрирования (V) представляет собою прямоугольный параллелепипед (1), имеет место формула, аналогичная формуле (10) n° **645**:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \qquad (3)$$

Для областей более общего вида, характеризуемых неравенствами

$$x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant X_1,\ x_2^0(x_1) \leqslant x_2 \leqslant X_2(x_1), \ldots$$
$$\ldots,\ x_n^0(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant X_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

применима формула, аналогичная формуле (10*) n° **646**

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_n^0(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \qquad (4)$$

Подобным же образом (для соответствующего вида областей, который в каждом случае нетрудно установить) имеют место и другие формулы, аналогичные формулам (8*) и (11*) n° **646**, где вычисление n-кратного интеграла приводится к последовательному вычислению интегралов низших кратностей, в сумме дающих n.

Все это доказывается совершенно так же, как для случаев $n = 2$ или $n = 3$, без привлечения каких бы то ни было новых идей, так что нет надобности на этом задерживаться. Без дальнейших пояснений очевидно, как определяются *несобственные* n-кратные интегралы и как на них распространяются упомянутые выше формулы.

Замечание. Можно было бы для функции от n переменных установить понятие и об интеграле, распространенном на $(n-1)$-мерную поверхность [см. замечания к примерам 3) и 16) n° **676**]. Ввиду сложности предмета, мы не можем здесь на этом останавливаться. Отметим лишь, что М. В. Остроградским — в обобщение формулы (4) n° **651** — было установлено соотношение, связывающее такой интеграл, взятый по замкнутой поверхности, с неким n-кратным интегралом, распространенным на ограниченное ею тело.

675. Замена переменных в n-кратном интеграле. Этот вопрос мы рассмотрим несколько подробнее. Пусть даны две n-мерные области: (D) в пространстве $x_1x_2\ldots x_n$ и (Δ) в пространстве $\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$, ограниченные каждая одной непрерывной — гладкой или кусочно-гладкой — поверхностью. Предположим, что между ними с помощью формул

$$\left.\begin{array}{l} x_1=x_1(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),\\ x_2=x_2(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x_n=x_n(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n) \end{array}\right\} \tag{5}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие. Тогда, при обычных предположениях относительно производных и сохранения знака якобианом

$$J=\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{D(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial x_1}{\partial\xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial\xi_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_n} \end{vmatrix},$$

интеграл от непрерывной в (D) функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ может быть преобразован по формуле

$$\overbrace{\int\limits_{(D)}\cdots\int}^{n} f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n=$$

$$=\overbrace{\int\limits_{(\Delta)}\cdots\int}^{n} f(x_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots,x_n(\xi_1,\ldots,\xi_n))\,|J|\,d\xi_1\ldots d\xi_n, \tag{6}$$

которая совершенно аналогична формулам преобразования двойных и тройных интегралов [**609** (21); **661** (8)].

Доказательство этой формулы мы проведем по методу математической индукции. Так как для $n=2$ и $n=3$ она уже была

установлена, то достаточно, предположив справедливость подобной формулы преобразования для $(n-1)$-кратного интеграла, доказать ее для интеграла n-кратного.

Без умаления общности можно предположить, что какая-либо из частных производных $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$ сохраняет знак (иначе пришлось бы лишь разложить область (Δ) на части, для которых это справедливо); пусть это будет производная $\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$.

Выделив в предложенном интеграле (2) интегрирование по x_1, перепишем этот интеграл в виде

$$\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \overbrace{\int \ldots \int_{(D_{x_1})}}^{n-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n; \tag{7}$$

здесь (D_{x_1}) означает область изменения переменных $x_2, \ldots, x_n$, отвечающую фиксированному значению x_1.

Разрешив первое из уравнений (5) относительно переменной ξ_1, выразим ее в функции от $x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

и подставим это выражение в остальные формулы. Таким путем мы получим новые формулы преобразования:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_2(\bar{\xi}_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \xi_2, \ldots, \xi_n) = \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n = x_n(\bar{\xi}_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \xi_2, \ldots, \xi_n) = \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Преобразуем, исходя из этих формул, $(n-1)$-кратный внутренний интеграл в (7) к переменным $\xi_2, \ldots, \xi_n$, что по предположению можно сделать по формуле, аналогичной (6). Мы придем к интегралу

$$\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \overbrace{\int \ldots \int_{(\Delta_{x_1})}}^{n-1} f(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots$$
$$\ldots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n))\, |J^*|\, d\xi_2 \ldots d\xi_n, \tag{9}$$

где

$$J^* = \frac{D(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{D(\xi_2, \ldots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

Поставим теперь в нем интегрирование по x_1 на первое место:

$$\overbrace{\int \ldots \int_{(\Delta^*)}}^{n-1} d\xi_2 \ldots d\xi_n \int\limits_{x_1^0(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{X_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f(x_1, \overline{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots$$
$$\ldots, \overline{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \, |J^*| \, dx_1,$$

и во внутреннем интеграле перейдем от переменной x_1 к переменной ξ_1 по первой из формул (5) (при фиксированных $\xi_2, \ldots, \xi_n$). Мы получим

$$\overbrace{\int \ldots \int_{(\Delta^*)}}^{n-1} d\xi_2 \ldots d\xi_n \int\limits_{\xi_1^0(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{\Xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f(x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$
$$x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1$$

или, возвращаясь к n-кратному интегралу:

$$\overbrace{\int \ldots \int_{(\Delta)}}^{n} f(x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Чтобы придти к (6), остается только убедиться в тождестве

$$J = J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}.$$

Но, дифференцируя сложные функции (8) по $\xi_2, \ldots, \xi_n$ и используя для выражения производных от функции $\overline{\xi}_1$ правило дифференцирования неявной функции, найдем

$$\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \overline{\xi}_1}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$$
$$(i, k = 2, \ldots, n).$$

Поэтому, если в определителе J к элементам k-й строки ($k = 2, \ldots, n$) прибавить соответственные элементы первой строки, умноженные на $-\dfrac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$, то он примет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{x}_2}{\partial \xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial \overline{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dfrac{\partial \overline{x}_2}{\partial \xi_n} & \ldots & \dfrac{\partial \overline{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

откуда и ясно, что он равен $J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$. Этим и завершается доказательство.

Заметим, что мы молчаливо предполагали $(n-1)$-мерные области (D_{x_1}) и (Δ_{x_1}) ограниченными всякий раз одной непрерывной, гладкой или кусочно-гладкой, поверхностью (в соответствующем пространстве). Раздробив предварительно область (D) и одновременно с нею (Δ) на части, всегда можно добиться того, чтобы сказанное было верно, по крайней мере, для каждой части в отдельности. Формула (6), справедливая для этих частей, будет справедлива и для всей области в целом.

Обычным образом формула замены переменных распространяется и на случай несобственных интегралов.

676. Примеры. 1) Найти объем T_n n-мерного симплекса [162]

$$(T_n):\quad x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant h.$$

Решение. Имеем

$$T_n = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{(T_n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{h-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n.$$

Заменяя в этих простых интегралах последовательно переменные по формулам

$$x_1 = h\xi_1, \quad x_2 = h\xi_2, \ldots, x_n = h\xi_n,$$

причем нет надобности пользоваться общей формулой (6), придем к результату

$$T_n = h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{1-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}} d\xi_n =$$

$$= h^n \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0 \ldots \xi_n \geqslant 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant 1}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \alpha_n h^n,$$

если через α_n обозначить значение интеграла, подобного предложенному, но отвечающего $h = 1$.

С другой же стороны, имеем (попутно используя полученный результат)

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0 \ldots \xi_{n-1} \geqslant 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} \leqslant 1-\xi_n}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} =$$

$$= \alpha_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1}\, d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}.$$

Найденное рекуррентное соотношение (с учетом того, что $\alpha_1 = 1$) дает нам

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

так что окончательно

$$T_n = \frac{h^n}{n!}.$$

2) Найти объем V_n n-мерной сферы [162]

$$(V_n):\quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2.$$

Решение. На этот раз речь идет о вычислении интеграла

$$V_n = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Полагая

$$x_1 = R\xi_1, \quad x_2 = R\xi_2, \ldots, \quad x_n = R\xi_n\ *,$$

легко получить, что $V_n = \beta_n R^n$, где числовой коэффициент β_n выражает объем n-мерной сферы радиуса 1.

Для определения β_n преобразуем

$$\beta_n = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2 \leq 1} d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= \int_{-1}^{1} d\xi_n \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2 \leq 1-\xi_n^2} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}.$$

Внутренний интеграл представляет объем $(n-1)$-мерной сферы радиуса $\sqrt{1-\xi_n^2}$ и, следовательно, равен $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Подставляя, придем снова к рекуррентному соотношению

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta$$

или [см. 534, 4) (б)]

$$\beta_n = \beta_{n-1} \cdot \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

---

* И здесь также не нужна общая формула (6): представив кратный интеграл по формуле (4) в виде повторного, можно затем последовательно заменять переменные в каждом из простых интегралов в отдельности.

Так как $\beta_1 = 2$, то легкое вычисление дает

$$\beta_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Искомый же объем равен

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n.$$

Для случаев n четного и нечетного получаются формулы

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m}, \qquad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1}.$$

В частности, для V_1, V_2, V_3, естественно, находим хорошо известные значения $2R$, πR^2, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3) Вычислить (несобственный!) интеграл

$$S = \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leq 1} \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}} \qquad (n>2).$$

Решение. Преобразуем предложенный интеграл так:

$$S = \int \cdots \int_{x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_{n-2} \times$$

$$\times \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-2}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-2}^2}} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-2}^2-x_{n-1}^2}}.$$

Внутренний интеграл здесь равен π, так что [см. 2)]

$$S = \pi \int \cdots \int_{x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_{n-2} = \pi\beta_{n-2} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Замечание. Любопытно отметить, что вычисленный только что интеграл, с точностью до множителя 2, выражает площадь поверхности n-мерной сферы $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$. Не входя в подробности, упомянем, что в случае явного задания поверхности

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где точка $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ изменяется в $(n-1)$-мерной области (E), площадь этой поверхности выражается интегралом

$$\overbrace{\int\limits_{(E)}\cdots\int}^{n-1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\,^*.$$

В частности, для полусферы

$$x_n = \sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}$$

имеем

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leq 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n} = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leq 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}}.$$

Таким образом, площадь поверхности n-мерной сферы радиуса 1 равна $2\pi\beta_{n-2}$; в случае сферы радиуса R площадь, очевидно, будет

$$2\pi\beta_{n-2}R^{n-1} = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,R^{n-1}.$$

Этот результат принадлежит Якоби.

4) Доказать формулу Дирихле:

$$\overbrace{\int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\ldots+x_n\leq 1}}\cdots\int}^{n} x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)}$$

$$(p_1,\ldots, p_n > 0).$$

Применим метод математической индукции, опираясь на то, что при $n=2$ формула уже была установлена [697, 12); 617, 14)]. Допустим ее верность для $(n-1)$-кратного интеграла. Переписав левую часть формулы в виде

$$\int\limits_0^1 x_n^{p_n-1}\,dx_n \overbrace{\int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_{n-1}\geq 0\\ x_1+\ldots+x_{n-1}\leq 1-x_n}}\cdots\int}^{n-1} x_1^{p_1-1}\ldots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\ldots dx_{n-1},$$

---

* Она по строению совершенно аналогична формуле (4а) **329** для длины дуги плоской кривой и формуле (5) **626** для площади кривой поверхности, где в обоих случаях имеется в виду явное задание.

произведем во внутреннем интеграле подстановку

$$x_1 = (1 - x_n)\,\xi_1, \ldots, \; x_{n-1} = (1 - x_n)\,\xi_{n-1} \; *$$

и затем применим к $(n-1)$-мерному интегралу формулу Дирихле. Мы получим

$$\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_{n-1} + 1)} \int_0^1 x_n^{p_n - 1}(1 - x_n)^{p_1 + \ldots + p_{n-1}}\, dx_n;$$

если заменить интеграл его выражением через Γ:

$$\frac{\Gamma(p_n)\,\Gamma(p_1 + \ldots + p_{n-1} + 1)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n + 1)},$$

то придем к требуемому результату.

5) Формулу Дирихле легко обобщить:

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{x_1, \ldots, x_n \geq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \leq 1}} x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{p_n}{\alpha_n} + 1\right)}$$

$$(a_i, \; \alpha_i, \; p_i > 0).$$

Эта формула приводится к уже доказанной, если перейти к новым переменным $\xi_i = \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *.

В частности, при $p_1 = \ldots = p_n = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 2$, $a_1 = \ldots = a_n = R$, отсюда снова получается формула для объема V_n n-мерной сферы ** [(см. 2)].

---

* См. сноску на стр. 392.

** Следует лишь иметь в виду, что в связи с ограничением положительными значениями переменных формула Дирихле непосредственно дает лишь $\frac{1}{2^n}$ объема.

6) Особо отметим формулу Дирихле для случая $n=3$:

$$\iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geq 0\\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leq 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)},$$

$$(p,\ q,\ r>0),$$

которая полезна при определении объемов, статических моментов, моментов инерции и центробежных моментов для однородных тел указанной формы.

Например, для части эллипсоида $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leq 1$ $(\alpha=\beta=\gamma=2)$, содержащейся в первом октанте, получаем (считая плотность равной 1):

при $p=q=r=1$ $\quad V=\frac{abc}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\pi}{6}abc,$

при $p=2,\ q=r=1$ $\quad M_{yz}=\frac{a^2bc}{8}\,\frac{\Gamma(1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\pi}{16}a^2bc,$

при $p=3,\ q=r=1$ $\quad I_{yz}=\frac{a^3bc}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{\pi}{30}a^3bc,$

при $p=1,\ q=r=2$ $\quad K_{yz}=\frac{ab^2c^2}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,[\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{15}ab^2c^2$, и т. д.

7) Доказать формулу Лиувилля $(p_1, p_2, \ldots, p_n>0)$:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\ldots+x_n\leq 1}} \varphi(x_1+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}\,x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,du,$$

в предположении абсолютной сходимости простого интеграла справа.

Для $n=2$ эта формула уже известна [597, 16); 611,17); 617, 14)]. Допустим ее справедливость для $(n-1)$-кратного интеграла. Левую часть доказываемой формулы перепишем так:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{x_1,\dots x_{n-1}\geq 0\\ x_1+\dots+x_{n-1}\leq 1}} x_1^{p_1-1}\dots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\dots dx_{n-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}}\varphi(x_1+\dots+x_n)\,x_n^{p_n-1}dx_n.$$

Если положить

$$\psi(t)=\int\limits_0^{1-t}\varphi\;(t+x_n)\,x_n^{p_n-1}\,dx_n,$$

то внутренний интеграл здесь заменится через $\psi(x_1+\dots+x_{n-1})$, а тогда по формуле Лиувилля, примененной к $(n-1)$-кратному интегралу, последний представится так:

$$\frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\dots+p_{n-1})}\int\limits_0^1\psi(t)\,t^{p_1+\dots+p_{n-1}-1}dt.$$

Подставляя вместо $\psi(t)$ его выражение, мы заменим полученный повторный интеграл двойным:

$$\iint\limits_{\substack{t,x_n\geq 0\\ t+x_n\leq 1}}\varphi(t+x_n)\,t^{p_1+\dots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}\,dt\,dx_n.$$

Остается лишь применить к последнему уже доказанную формулу, чтобы придти к требуемому результату.

8) Отсюда легко получить более общую формулу:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\dots,x_n\geq 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leq 1}}\varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)x_1^{p_1-1}\;\dots\;x_n^{p_n-1}\,dx_1\dots dx_n=$$

$$=\frac{a_1^{p_1}\dots a_n^{p_n}}{\alpha_1\dots\alpha_n}\;\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\dots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,du$$

(все числа a_i, α_i, p_i предполагаются положительными).

Эта формула, например, позволяет вычислить следующие интегралы, устанавливая попутно и условия их существования *:

$$\text{(а)}\quad \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(1-x_1^{\alpha_1}-\ldots-x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(1-\mu+\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

(при $\mu<1$);

$$\text{(б)}\quad \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}-\mu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

$$\left(\text{при } \mu<\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right);$$

$$\text{(в)}\quad \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\leq 1}} x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\sqrt{\frac{1-x_1^{\alpha_1}-\ldots-x_n^{\alpha_n}}{1+x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}}}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\right\},$$

где для краткости положено

$$m=\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}.$$

---

* Поскольку абсолютная сходимость интеграла справа в формуле Лиувилля имеет место одновременно со сходимостью интеграла слева.

9) Доказать с помощью математической индукции формулу:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\ldots+x_n\leq 1}} \varphi(x_1+\ldots+x_n)\,\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n}{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b)^{p_1+\ldots+p_n}}=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 \varphi(u)\,\frac{u^{p_1+\ldots+p_n-1}}{(a_1u+b)^{p_1}\ldots(a_nu+b)^{p_n}}\,du$$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n\geq 0,\ b>0)$$

[см. 611, 18); воспользоваться 534, 2)].

10) Покажем, следуя Коши, как вычисление кратного интеграла

$$K=\int\limits_0^\infty\cdots\int\limits_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,e^{-(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}}{(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)^q}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$(p_i,\ a_i,\ b_j,\ q>0)$$

может быть приведено к вычислению простого интеграла.

По известной формуле [531 (13)]

$$\frac{1}{(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)^q}=\frac{1}{\Gamma(q)}\int\limits_0^\infty e^{-u(b_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n)}\,u^{q-1}\,du.$$

Подставляя это в интеграл K и изменяя порядок интегрирований, представим его в виде

$$K=\int\limits_0^\infty e^{-b_0u}\,u^{q-1}\,du\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^\infty e^{-(a_1+b_1u)\,x_1}\,x_1^{p_1-1}\,dx_1\ldots\int\limits_0^\infty e^{-(a_n+b_nu)\,x_n}\,x_n^{p_n-1}\,dx_n\right\}$$

или, наконец, если для интегралов в фигурных скобках снова использовать указанную формулу:

$$K=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-b_0u}\,u^{q-1}\,du}{(a_1+b_1u)^{p_1}\ldots(a_n+b_nu)^{p_n}}.$$

Результат этот имеет место и при $b_0=0$, но в предположении, что $p_1+\ldots+p_n>q$.

11) Приведем вычисление интеграла

$$L_{2k}=\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leq 1}\cdots\int(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{2k}\,dx_1\ldots dx_n,$$

где $2k$ — четное натуральное число, а $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — произвольные вещественные числа.

Имеем, прежде всего, по формуле для степени многочлена

$$(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^{2k} = \sum_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 2k} \frac{2k!}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Если интегрировать по сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, то интегралы от членов, для которых хоть один из показателей λ — нечетное число, оказываются нулями. Таким образом,

$$L_{2k} = \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_n = k} \frac{2k!}{2\mu_1! \ldots 2\mu_n!} a_1^{2\mu_1} \ldots a_n^{2\mu_n} \times$$

$$\times \int \ldots \int_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1} x_1^{2\mu_1} \ldots x_n^{2\mu_n} \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Но по обобщенной формуле Дирихле [см. 5)] написанный интеграл имеет значение *

$$\frac{\Gamma\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)}.$$

Полагая здесь

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu - \frac{3}{2}\right) \ldots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2\mu - 1)!!}{2^\mu} \sqrt{\pi},$$

после преобразований получим:

$$L_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} \sum_{\mu_1 + \ldots + \mu_n = k} \frac{k!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} a_1^{2\mu_1} \ldots a_n^{2\mu_n} =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k + 1\right)} (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^k.$$

Этот интеграл (правда, другим путем) впервые вычислил Н. Я. Сонин. Заметив, что интеграл

$$L_{2k+1} = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1} (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^{2k+1} \, dx_1 \ldots dx_n$$

равен всегда нулю, Сонин получил затем, с помощью разложения показа-

* При этом следует учесть, что формула Дирихле предполагает ограничения $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$; поэтому результат, который она дает, должен быть еще умножен на 2^n.

тельной функции в ряд и почленного интегрирования, значение и такого интеграла:

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1} e^{a_1x_1+\ldots+a_nx_n} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k},$$

где для краткости положено

$$\rho = \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}.$$

При четном $n = 2m$ этот результат может быть переписан в виде

$$\pi^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{(2\pi)^m}{(i\rho)^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{i\rho}{2}\right)^{2k+m} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(i\rho)^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(i\rho),$$

т. е. выражается через бесселеву функцию со значком $m = \frac{n}{2}$ [395, 14)] от мнимого аргумента. Нужно сказать, впрочем, что, если ввести в рассмотрение и бесселевы функции с дробным значком, то полученный результат сохранит силу также при *нечетном* n.

12) Перейдем теперь к примерам применения к вычислению кратных интегралов *общей формулы* (6) замены переменных.

Естественно начать с обобщенного *полярного* преобразования по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Если в пространстве $x_1x_2\ldots x_n$ рассматривается *сфера* $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2$, то ей в новом пространстве $r\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$, очевидно, можно поставить в соответствие *прямоугольный параллелепипед*

$$0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi;$$

если же берется только часть сферы, отвечающая ограничениям $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$, то изменение всех углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ ограничивается промежутком $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Якобиан преобразования

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$$

вычисляется непосредственно по определению очень кропотливо. Поэтому мы вычислим его обходным путем. Формулы (10) легко приводят к системе уравнений:

$$F_1 \equiv r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0,$$
$$F_2 \equiv r^2 \sin^2 \varphi_1 - (x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0,$$
$$F_3 \equiv r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 - (x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n \equiv r^2 \sin^2 \varphi_1 \ldots \sin^2 \varphi_{n-1} - x_n^2 = 0,$$

для которой, обратно, система функций (10) и будет решением. В таком случае по формуле n° 210, 8),

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.$$

Оба последних определителя вычисляются сразу, ибо приводятся к произведениям диагональных членов; они равны соответственно

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(r, \ldots, \varphi_{n-1})} =$$
$$= (-1)^n 2^n r^{2n-1} \sin^{2n-3} \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cos \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1},$$
$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 2^n x_1 x_2 \ldots x_n =$$
$$= 2^n r^n \sin^{n-1} \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^{n-2} \varphi_2 \cos \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_{n-1}.$$

Таким образом, окончательно,

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2}.$$

Рассмотрим для примера интеграл

$$G = \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2} f\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Если прибегнуть к полярному преобразованию, то его вычисление непосредственно приведется к вычислению n отдельных, один от другого не зависящих, интегралов:

$$G = \int_0^R r^{n-1} f(r)\, dr \cdot \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 \, d\varphi_1 \ldots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} \, d\varphi_{n-3} \times$$
$$\times \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} \, d\varphi_{n-2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}.$$

Если использовать для вычисления интегралов от степеней синуса формулу из 534, 4) (б):

$$\int_0^\pi \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{a+1}{2}\right)},$$

то после упрощений получим

$$G = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^R r^{n-1} f(r)\, dr,$$

так что вопрос свелся к вычислению одного простого интеграла по r.

В этом, как частные случаи, содержатся результаты упражнений 2) и 3). В свою очередь, полученный результат содержится в формуле Лиувилля 8).

13) Если возвести формулы (10) в квадрат, заменить $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ через $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, а r^2, $\sin^2\varphi_1, \ldots, \sin^2\varphi_{n-1}$ — через $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то придем к такой системе соотношений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1(1-u_2),\\ x_2 &= u_1u_2(1-u_3),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} &= u_1u_2\ldots u_{n-1}(1-u_n),\\ x_n &= u_1u_2\ldots u_n. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Преобразование (11), таким образом, в *некотором смысле* равносильно полярному преобразованию (10). В случае $n=2$ его применил Якоби для доказательства известного соотношения между функциями В и Г [**617** (13)].

Предлагается *непосредственно* установить формулу Лиувилля 7), применив к интегралу в левой части преобразование (11). Симплексу

$$x_1 \geqslant 0,\; x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,\;\; x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1$$

при этом отвечает куб $[0, 1; \ldots; 0, 1]$ в пространстве $u_1 \ldots u_n$. Якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \ldots & u_2\ldots u_{n-1}(1-u_n) & u_2\ldots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \ldots & u_1u_3\ldots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\ldots u_n \\ 0 & -u_1u_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_1\ldots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\ldots u_{n-2}u_n \\ 0 & 0 & \ldots & -u_1\ldots u_{n-1} & u_1\ldots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Если к элементам каждого столбца прибавить соответственные элементы всех последующих столбцов, то все элементы ниже диагонали заменятся нулями, а диагональные элементы окажутся равными

$$1,\; u_1,\; u_1u_2,\; \ldots,\; u_1 \ldots u_{n-1}.$$

Таким образом, окончательно

$$J = u_1^{n-1}\, u_2^{n-2} \ldots u_{n-1}.$$

По формуле (6) наш интеграл приводится к следующему:

$$\overbrace{\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1}^{n} \varphi(u_1)\, u_1^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1} (1-u_2)^{p_1-1} \times$$
$$\times\, u_2^{p_2+\ldots+p_n-1} \ldots (1-u_n)^{p_{n-1}-1}\, u_n^{p_n-1}\, du_1 \ldots du_n,$$

* Конечно, в таком случае эти переменные могут принимать лишь *неотрицательные* значения.

а этот уже представляется в виде произведения простых интегралов; остальное ясно.

14) То же преобразование переменных позволяет получить и видоизмененную формулу Лиувилля, где n-кратный интеграл оказывается распространенным на бесконечную область:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+\ldots+x_n\geq 1}} \varphi(x_1+x_2+\ldots+x_n)\, x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_1^{\infty}\varphi(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,du;$$

при этом предполагается, что интеграл справа сходится абсолютно.

Эта формула обобщается так же, как и предшествующая [ср. 8)]:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\geq 1}} \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)x_1^{p_1-1}\ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\;\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int_1^{\infty}\varphi(u)\,u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,du.$$

С помощью последней формулы можно установить, например, что

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n}\geq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n}{(x_1^{\alpha_1}+\ldots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n\left(\mu-\frac{p_1}{\alpha_1}-\ldots-\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\;\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

$$\left(\text{при } \mu>\frac{p_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right).$$

15) Доказать формулу (также принадлежащую Лиувиллю):

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(v_1 v_2 \dots v_n)(1-v_1)^{p_1-1}(1-v_2)^{p_2-1} \dots$$

$$\dots (1-v_n)^{p_n-1} v_2^{p_1} v_3^{p_1+p_2} \dots v_n^{p_1+\dots+p_{n-1}}\, dv_1 \dots dv_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_0^1 \varphi(u)(1-u)^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} du.$$

Указание. Формула выводится из соотношения, данного в 7), если заменить там $\varphi(u)$ на $\varphi(1-u)$ и положить

$$x_1 = (1-v_1)\, v_2 \dots v_n,$$
$$x_2 = (1-v_2)\, v_3 \dots v_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1} = (1-v_{n-1})\, v_n,$$
$$x_n = 1 - v_n.$$

Якобиан преобразования в этом случае имеет значение

$$J = (-1)^n v_2 v_3^2 \dots v_{n-1}^{n-2} v_n^{n-1}.$$

16) Рассмотрим, вместе с Каталаном, интеграл ($n \geqslant 3$):

$$K = \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{x_1^2+\dots+x_n^2=1} f(m_1x_1+\dots+m_nx_n) \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{|x_n|}^{*} =$$

$$= 2 \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \leqslant 1} f(m_1x_1+\dots+m_nx_n) \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}};$$

при этом, полагая

$$M = \sqrt{m_1^2+\dots+m_n^2},$$

считаем функцию $f(u)$ непрерывной для $|u| \leqslant M$.

Прибегнем к линейному ортогональному преобразованию всех переменных, включая и x_n, по формулам

$$x_1 = a_1u_1 + b_1u_2 + \dots + k_1u_{n-1} + l_1u_n,$$
$$x_2 = a_2u_1 + b_2u_2 + \dots + k_2u_{n-1} + l_2u_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = a_nu_1 + b_nu_2 + \dots + k_nu_{n-1} + l_nu_n,$$

* В первой форме этот интеграл по сути является поверхностным интегралом

$$\int \dots \int f(m_1x_1 + m_nx_n)\, dS,$$

распространенным на поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве [ср. замечание к (3)].

где n^2 коэффициентов подчинены $\frac{n(n+1)}{2}$ условиям

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = 1, \qquad k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_n l_n = 0.$$

Из них следует, что

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

и мы берем за новые независимые переменные $u_1, \ldots, u_{n-1}$, полагая

$$u_n = \pm \sqrt{1 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1}^2}.$$

Произвол в выборе коэффициентов настолько велик, что мы вправе конкретно положить

$$a_i = \frac{m_i}{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и даже дополнительно потребовать, чтобы определитель, составленный из коэффициентов преобразования, был равен $+1$. При таком предположении, как известно, алгебраическое дополнение, отвечающее какому-либо элементу определителя, равно самому элементу. С учетом этого якобиан

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 - l_1 \frac{u_1}{u_n} & b_1 - l_1 \frac{u_2}{u_n} & \ldots & k_1 - l_1 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ a_2 - l_2 \frac{u_1}{u_n} & b_2 - l_2 \frac{u_2}{u_n} & \ldots & k_2 - l_2 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_1}{u_n} & b_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_2}{u_n} & \ldots & k_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} \end{vmatrix}$$

оказывается равным

$$l_n + a_n \frac{u_1}{u_n} + b_n \frac{u_2}{u_n} + \ldots + k_n \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{x_n}{u_n}.$$

Таким образом,

$$K = 2 \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \leq 1} f(Mu_1) \frac{du_1 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1}^2}} =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} f(Mu_1)\, du_1 \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2} \frac{du_2 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{(1 - u_1^2) - u_2^2 - \ldots - u_{n-1}^2}}.$$

Внутренний интеграл, как легко получить из 3), равен

$$\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}},$$

так что окончательно

$$K=2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}\,u\right)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}\,du.$$

Полагая здесь $u=\cos\lambda\ (0\leqslant\lambda\leqslant\pi)$, можно написать результат и в виде

$$K=2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi} f\left(\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}\cos\lambda\right)\sin^{n-2}\lambda\,d\lambda.$$

При $n=3$ отсюда получается известная формула Пуассона, которую мы вывели в 633, 3) и, по существу, тем же методом преобразования координат.

17) Известная уже нам формула Каталана [см. 597, 15) и 616, 16)] непосредственно — путем повторения тех же рассуждений — переносится на n-мерный случай:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant M} f(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(g(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n=$$
$$=(S)\int_m^M \varphi(u)\,d\psi(u)=(R)\int_m^M \varphi(u)\,\frac{d\psi(u)}{du}\,du, \tag{12}$$

где

$$\psi(u)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant u} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{13}$$

Здесь M может быть и $+\infty$, причем $\int_m^{+\infty}$ понимается как $\lim\limits_{M\to\infty}\int_m^M$.

Предполагается для примера по методу Каталана получить из формулы Дирихле 4) формулу Лиувилля 7).

18) Н. Я. Сонин обратил внимание на то, что формулу Каталана иной раз можно использовать в другом плане.

Предположим функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ однородной [187] степени s, а функцию $g(x_1,\ldots,x_n)$ — однородной же, но первой степени; например, функция g может иметь вид

$$x_1+\ldots+x_n \text{ или } \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Пусть, далее, $m=0$. Тогда, полагая в (13)

$$x_1=u\xi_1,\quad x_2=u\xi_2,\ldots,\ x_n=u\xi_n$$

(Якобиан $J = u^n$) и учитывая, что неравенство $0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant u$ перейдет при этом в неравенство $0 \leqslant g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant 1$, мы получим, что

$$\psi(u) = u^{n+s} \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{0 \leqslant g(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant 1} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Подставляем это в (12) (лишь вместо ξ снова пишем x):

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant M} f(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(g(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \cdot \int_0^M \varphi(u)\, du^{n+s}.$$

Теперь, *если* удается выбрать, во-первых, функцию φ и, во-вторых, предел M так, чтобы интеграл слева легко вычислялся, то отсюда получается выражение для интеграла

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Если, например, ограничиваясь неотрицательными значениями $x_1, \ldots, x_n$, взять

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n,$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} \quad (p_i > 0),$$
$$\varphi(u) = e^{-u}, \; M = +\infty,$$

то s окажется равным $p_1 + \ldots + p_n - n$, и мы получим формулу *Дирихле* [4)]:

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{x_1, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1}} x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{p_1 - 1}\, dx_1 \ldots \int_0^\infty e^{-x_n} x_n^{p_n - 1}\, dx_n}{(p_1 + \ldots + p_n) \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1 + \ldots + p_n - 1}\, du} = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \ldots + p_n + 1)}.$$

19) Предлагается тем же приемом осуществить приведение интеграла

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{\substack{x_1, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x_1 + \ldots + x_n \leqslant 1}} \frac{x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1}}{(b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n)^q}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

в предположении, что

$$p_i > 0, \; b_i > 0, \; p_1 + \ldots + p_n > q > 0.$$

Указание. Взять $\varphi(u)=e^{-u}$, $M=+\infty$; воспользоваться результатом 10) при $a_1=\ldots=a_n=1$ и $b_0=0$.

Ответ.

$$\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n-q+1)\,\Gamma(q)}\int_0^\infty \frac{u^{q-1}du}{(1+b_1u)^{p_1}\ldots(1+b_nu)^{p_n}}.$$

20) Н. Я. Сонину принадлежит также следующее обобщение формулы Каталана:

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant M}\varphi(x_1,\ldots,x_n,g(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=(\mathrm{R})\int_m^M\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}dt,$$

где

$$\Phi(t,c)=\int\ldots\int_{m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant t}\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)\,dx_1\ldots,dx_n.$$

[Формула Каталана отсюда получается, если функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)$ придать частную форму: $f(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(c)$.]

Приведем доказательство автора.

В очевидном равенстве

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}F(x_1,\ldots x_n,t)\,dx_1\ldots dx_n=\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}dx_1\ldots dx_n\int_m^M F(x_1,\ldots,x_n,t)\,dt$$

положим

$$F=\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}, & \text{если } m\leqslant g(x_1,\ldots,x_n)\leqslant t,\\ 0 & \text{при } g(x_1,\ldots,x_n)>t;\end{cases}$$

тогда получим

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}dx_1\ldots dx_n\int_g^M\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n\,t)}{\partial t}\,dt.$$

Если вычислить внутренний интеграл справа, то отсюда

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant M}\varphi(x_1,\ldots,x_n,g)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\Phi(M,M)-\int_m^M dt\overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n.\qquad(14)$$

С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции «полная производная»

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t)=\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}+\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial c}\right\}_{c=t}.$$

Применяя к вычислению второй производной справа правило Лейбница, заменим ее через

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqslant g\leqslant t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Проинтегрируем теперь это равенство по t от m до M; принимая во внимание, что $\Phi(m,m)=0$, найдем:

$$\Phi(M,M)-\int_m^M dt\int\cdots\int_{m\leqslant g\leqslant t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n=$$
$$=\int_m^M\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}dt. \qquad (15)$$

Если сопоставить (14) и (15), то и получится доказываемая формула.

21) Применим формулу Сонина к вычислению интеграла:

$$S=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqslant\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant1} e^{\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Здесь

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)=e^{\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{c}},$$
$$g(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$
$$m=0,\ M=1,$$
$$\Phi(t,c)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqslant\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant t} e^{\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{c}}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Имеем, очевидно,

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqslant\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant t} e^{\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{c}}\,dx_1\ldots dx_n=$$
$$=t^n\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqslant\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant1} e^{\frac{t}{c}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n.$$

Воспользовавшись результатом упражнения 11), легко получить разложение

$$\Phi(t,\ c) = \pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)} \left(\frac{\rho}{2c}\right)^{2k} t^{2k+n},$$

где

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Отсюда

$$\left[\frac{\partial \Phi(t,\ c)}{\partial t}\right]_{c=t} = t^{n-1} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k},$$

так что по формуле Сонина

$$S = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\,(\rho i)^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho i)$$

[ср. 11)].

22) Вычислить интеграл ($\lambda \geqslant 0$):

$$R(\lambda) = \overbrace{\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty}}^{n-1} e^{-\left(x_1 + \ldots + x_{n-1} + \frac{\lambda^n}{x_1 \ldots x_{n-1}}\right)} \times$$
$$\times\, x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

[ср. 617, 19)].

Дифференцируя (при $\lambda > 0$) по параметру λ под знаком интеграла и заменяя в результате одну переменную x_1 через

$$z = \frac{\lambda^n}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}},$$

получим, что

$$\frac{dR}{d\lambda} = -n \overbrace{\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty}}^{n-1} e^{-\left(x_2 + \ldots + x_{n-1} + z + \frac{\lambda^n}{x_2 \ldots x_{n-1} z}\right)} \times$$
$$\times\, x_2^{\frac{1}{n}-1} \ldots x_{n-1}^{\frac{n-2}{n}-1} z^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\, dz,$$

т. е.

$$\frac{dR}{d\lambda} = -nR.$$

Отсюда

$$R = Ce^{-n\lambda}.$$

Так как при $\lambda = 0$ интеграл R сохраняет непрерывность, то

$$C = R(0) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

[531, 6°]. Окончательно:

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-n\lambda}.$$

23) Лиувилль остроумно использовал этот интеграл для вывода теоремы умножения для функции Г, принадлежащей Гауссу [536].

Умножив обе части полученного равенства на λ^{p-1} $(p > 0)$, проинтегрируем его по λ от $\lambda = 0$ до $\lambda = +\infty$. Справа получится

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} e^{-n\lambda}\, d\lambda = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{p+\frac{1}{2}}}\,\Gamma(p). \tag{16}$$

Слева же перенесем интегрирование по λ на первое место (по порядку выполнения):

$$\overbrace{\int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty}^{n-1} e^{-(x_1+\ldots+x_{n-1})} x_1^{\frac{1}{n}-1} \ldots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\lambda^n}{x_1 \ldots x_{n-1}}} \cdot \lambda^{p-1} d\lambda.$$

Внутренний интеграл подстановкой $\dfrac{\lambda^n}{x_1 \ldots x_{n-1}} = t$ приводится к

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)(x_1 \ldots x_{n-1})^{\frac{p}{n}},$$

а тогда остающийся $(n-1)$-кратный интеграл распадается на произведение отдельных простых интегралов:

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \cdot \int\limits_0^\infty e^{-x_1} \cdot x_1^{\frac{p+1}{n}-1}\, dx_1 \ldots \int\limits_0^\infty e^{-x_{n-1}} \cdot x_{n-1}^{\frac{p+n-1}{n}-1}\, dx_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p+n-1}{n}\right).$$

Приравнивая это произведение выражению (16) и заменяя p через na $(a > 0)$, мы и придем к формуле Гаусса:

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\,\Gamma(na)$$

в ее обычном виде.

24) Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ будут ограниченные функции, интегрируемые в конечном промежутке $[a, b]$. Доказать, что

$$\frac{1}{n!}\overbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}^{n} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2 dx & \int_a^b f_1 f_2 dx & \ldots & \int_a^b f_1 f_n dx \\ \int_a^b f_2 f_1 dx & \int_a^b f_2^2 dx & \ldots & \int_a^b f_2 f_n dx \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b f_n f_1 dx & \int_a^b f_n f_2 dx & \ldots & \int_a^b f_n^2 dx \end{vmatrix}.$$

Определитель справа называется определителем Г р а м а (J. P. Gram).

Разложив промежуток $[a, b]$ на $m\ (> n)$ равных частей, введем в рассмотрение значения всех n функций в точках деления:

$$f_{ij}^{(m)} = f_i\left(a + j\,\frac{b-a}{m}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Возведем в квадрат прямоугольную матрицу, составленную из этих чисел. По известной теореме соответствующий ей определитель

$$\left| \sum_j f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|^*$$

оказывается равным сумме квадратов определителей упомянутой исходной матрицы:

$$\sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_n} \left| f_{ij_k}^{(m)} \right|^2,$$

где суммирование распространено на всевозможные с о ч е т а н и я из $m\ (> n)$ значков $0, 1, \ldots, m-1$ по n. Если от сочетаний перейти к р а з м е щ е н и я м, то каждый член воспроизведется $n!$ раз; можно не избегать и равенства значков j, ибо этому случаю отвечает нулевой член. В результате можно написать:

$$\frac{1}{n!} \sum_{j_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{m-1} \left| f_{ij_k}^{(m)} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}^{(m)} f_{kj}^{(m)} \right|.$$

Если каждое с л а г а е м о е кратной суммы слева умножить на $\left(\frac{b-a}{m}\right)^n$ и одновременно каждый э л е м е н т определителя справа на $\frac{b-a}{m}$, то получится равенство вроде доказываемого, но лишь с интегральными суммами вместо интегралов. Чтобы завершить доказательство, остается перейти к пределу при $m \to \infty$.

* Для краткости мы записываем в виде $|a_{ik}|$ определитель, у которого в пересечении i-й строки и k-го столбца стоит элемент a_{ik}.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

§ 677. Периодические величины и гармонический анализ. В науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, т. е. такими, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени T, называемый периодом. Примером может служить установившееся движение паровой машины, которая по истечении определенного числа оборотов снова проходит через свое начальное положение, затем явление переменного тока, и т. п. Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям и представляют, следовательно, периодические функции от времени t, характеризуемые равенством

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока или — в примере паровой машины — путь, скорость и ускорение крейцкопфа, давление пара, касательное усилие в пальце кривошипа и т. д.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является *синусоидальная величина:* $A\sin(\omega t+\alpha)$, где ω есть «частота», связанная с периодом T соотношением:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Наперед ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо, как легко убедиться, сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, ибо приводит опять к синусоидальной величине, притом той же частоты. Наоборот, если сложить несколько величин вида

$$\left.\begin{aligned} y_0=A_0,\ y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\ y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2),\\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3),\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

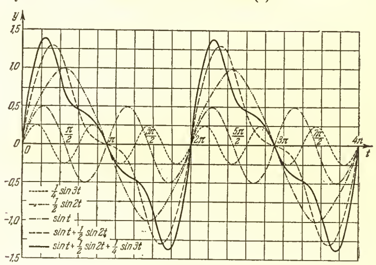
которые, если не считать постоянной, имеют частоты

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega, \ldots,$$

кратные наименьшей из них, ω, и периоды

$$T,\ \frac{1}{2}T,\ \frac{1}{3}T, \ldots,$$

то получится периодическая функция (с периодом T), но уже существенно отличная от величин типа (2).



Черт. 121.

Для примера мы воспроизводим здесь (черт. 121) сложение трех синусоидальных величин:

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t;$$

график этой функции по своему характеру уже значительно разнится от синусоиды. Еще в большей степени это имеет место для суммы бесконечного ряда, составленного из величин вида (2).

Теперь естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (2)? Как увидим ниже, по отношению к довольно широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, но только если привлечь именно всю бесконечную последовательность вели-

чин (2). Для функций этого класса имеет место разложение в «тригонометрический ряд»:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad (3)$$

причем A_0, A_1, α_1, A_2, $\alpha_2, \ldots$ суть постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота ω дается формулой (1).

Геометрически это означает, что *график периодической функции получается путем наложения ряда с и н у с о и д.* Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что здесь *сложное колебание, характеризуемое функцией $\varphi(t)$, разлагается на отдельные г а р м о н и ч е с к и е колебания.* В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения (3), называют *гармоническими составляющими* функции $\varphi(t)$ или просто ее *гармониками* (первой, второй и т. д.). Самый же процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа.*

Если за независимую переменную выбрать

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

то получится функция от x:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом 2π. Разложение же (3) примет вид

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \quad (4)$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы и положив

$$A_0 = a_0,\ A_n \sin\alpha_n = a_n,\ A_n \cos\alpha_n = b_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \ldots = \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5)$$

в которой мы всегда и будем его рассматривать*. Здесь функция от угла x, имеющая период 2π, оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных x.

Мы пришли к разложению функции в тригонометрический ряд, отправляясь от периодических, колебательных явлений и связанных с ними величин. Важно отметить, однако, уже сейчас, что подобные разложения часто оказываются полезными и при исследовании функций, заданных лишь в определенном конечном промежутке и вовсе не порожденных никакими колебательными явлениями.

678. Определение коэффициентов по методу Эйлера — Фурье. Для того чтобы установить возможность тригонометрического разложения (5) для заданной функции $f(x)$, имеющей период 2π, нужно исходить из определенного набора коэффициентов $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n\, b_n, \dots$ Мы укажем прием для определения их, который во второй половине XVIII века был применен Эйлером и независимо от него в начале XIX века — Фурье.

Будем предполагать функцию $f(x)$ интегрируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$ — в собственном или в несобственном смысле; в последнем случае мы дополнительно будем предполагать, что функция абсолютно интегрируема. Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно от $-\pi$ до π; мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right].$$

Но, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx &= \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{и} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx &= -\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, и окончательно найдем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Для того чтобы установить величину коэффициента a_m, умножим обе части равенства (5), которое мы все время предполагаем выпол-

* От этого разложения, разумеется, легко перейти в случае надобности обратно к разложению вида (4).

ненным, на $\cos mx$ и снова проинтегрируем почленно в том же промежутке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + $$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right].$$

Первый член справа исчезает ввиду (6). Далее имеем [ср. **308**, 4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (n+m) x + \sin (n-m) x] \, dx = 0; \quad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m) x + \cos (n-m) x] \, dx = 0, \quad (9)$$

если $n \neq m$, и, наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} \, dx = \pi. \quad (10)$$

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m. Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (11)$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично, умножая предварительно разложение (5) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, определим коэффициент при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (12)$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

При этом, кроме (6) и (8), мы опираемся еще на легко проверяемые соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad (13)$$

если $n \neq m$, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi. \quad (14)$$

Формулы (7), (11) и (12) известны под названием *формул Эйлера — Фурье*; вычисленные по этим формулам коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* данной функции, а составленный с их помощью тригонометрический ряд (5) — ее *рядом Фурье*. Рядами Фурье мы исключительно и будем заниматься в настоящей главе.

Дадим теперь себе отчет в том, какова логическая ценность проведенных рассуждений. Так как мы исходили из предположения, что тригонометрическое разложение (5) имеет место, то вопрос о том, отвечает ли это действительности, естественно, остается открытым. Но убедительны ли те соображения, с помощью которых по примеру Эйлера и Фурье мы определили коэффициенты разложения (5), даже в предположении, что оно осуществляется? Мы пользовались повторно почленным интегрированием ряда, а эта операция не всегда дозволительна **[434]**. Достаточным условием для ее применимости является равномерная сходимость ряда. Поэтому строго установленным можно считать лишь следующее:

если функция $f(x)$, имеющая период 2π, разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (5)*, *то последний необходимо будет ее рядом Фурье.*

Если же не предполагать наперед равномерности сходимости, то наши соображения не доказывают даже и того, что функция может разлагаться только в ряд Фурье [ср. ниже **759, 760**]. Каков же смысл приведенных соображений? Их можно рассматривать лишь как наведение, достаточное для того, чтобы в поисках тригонометрического разложения данной функции, по крайней мере, начать с ее ряда Фурье, обязуясь (уже со всею строгостью!) установить, при каких условиях он сходится и притом — именно к данной функции.

Пока же это не сделано, мы имеем право лишь формально рассматривать ряд Фурье данной функции $f(x)$, но не можем о нем ничего утверждать, кроме того, что он «порожден» функцией $f(x)$. Эту его связь с функцией f обычно обозначают так:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5a}$$

избегая знака равенства.

679. Ортогональные системы функций. Изложенное в предыдущем n° является образцом рассуждений, которыми часто приходится пользоваться в математическом анализе при изучении многих разложений.

---

* Заметим, что равномерная сходимость сохранится и при умножении всех членов ряда на ограниченные функции $\cos mx$, $\sin mx$ **[429]**. Равномерную сходимость можно было бы заменить здесь ограниченностью частичных сумм ряда **[528]**.

Назовем две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в промежутке $[a, b]$, *ортогональными* в этом промежутке, если их произведение имеет интеграл, равный нулю:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных в промежутке $[a, b]$ и интегрируемых в нем вместе с их квадратами; тогда, как мы знаем [**483**, 6)], и произведения этих функций, взятых попарно, также интегрируемы. Если функции данной системы попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \qquad (15)$$

$$(n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n \neq m),$$

то ее называют *ортогональной системой функций*. При этом мы всегда будем предполагать, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_m > 0, \qquad (16)$$

так что в составе нашей системы нет ни функции, тождественно равной нулю, ни какой-либо другой ей уподобляющейся, в некотором смысле* функции, интеграл от квадрата которой оказывается нулем.

При соблюдении условий $\lambda_n = 1$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, которая уже заведомо будет нормальной. Обратимся к примерам.

1) Важнейшим примером ортогональной системы функций как раз и является тригонометрическая система

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \qquad (17)$$

в промежутке $[-\pi, \pi]$, которую мы рассматривали выше; ее ортогональность следует из соотношений (6), (8), (9) и (13). Однако нормальной она не будет ввиду (10) и (14). Умножая тригонометрические функции (17) на надлежащие множители, легко получить нормальную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots \qquad (17^*)$$

---

* См. ниже, **733**.

2) Отметим, что та же система (17) или (17*) в урезанном промежутке $[0, \pi]$ уже не будет ортогональной, ибо

$$\int_0^\pi \sin nx \cos mx\, dx \neq 0,$$

если n и m — числа разной четности. Наоборот, каждая из частичных систем, состоящая либо только из косинусов:

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots, \tag{18}$$

либо только из синусов:

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots \tag{19}$$

в отдельности, будет в этом промежутке ортогональной, что легко проверить.

3) Несущественно разнятся от только что рассмотренных такие системы:

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots \tag{18*}$$

и

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots \tag{19*}$$

Каждая из них представляет собой ортогональную систему в промежутке $[0, l]$.

4) Чтобы дать пример более сложной ортогональной системы, состоящей из тригонометрических же функций, рассмотрим трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{tg}\xi = c\xi \quad (c = \text{const.}). \tag{20}$$

Можно доказать, что оно имеет бесконечное множество положительных корней:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots;$$

графически эти корни получаются, как абсциссы точек пересечения тангенсоиды $\eta = \operatorname{tg}\xi$ и прямой $\eta = c\xi$ (черт. 122). Составим систему

$$\sin\frac{\xi_1}{l}x, \sin\frac{\xi_2}{l}x, \ldots, \sin\frac{\xi_n}{l}x, \ldots$$

Легко вычислить (при $\alpha \neq \beta$), что

$$\int_0^l \sin\alpha x \sin\beta x\, dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right\} =$$

$$= \cos\alpha l \cos\beta l \; \frac{\beta\operatorname{tg}\alpha l - \alpha\operatorname{tg}\beta l}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Если положить здесь $\alpha = \frac{\xi_n}{l}$, $\beta = \frac{\xi_m}{l}$ (при $n \neq m$), то, используя уравнение (20), получим:

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_n}{l}x \cdot \sin\frac{\xi_m}{l}x \quad dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

Этим установлена ортогональность указанной системы в промежутке $[0, l]$.

Аналогичное заключение можно сделать относительно системы

$$\cos\frac{\xi_1'}{l}x,\ \cos\frac{\xi_2'}{l}x, \ldots, \cos\frac{\xi_n'}{l}x, \ldots,$$

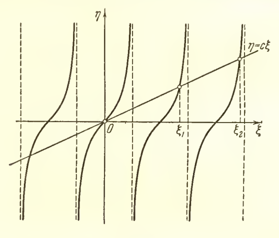
если

$$\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n', \ldots$$

есть последовательность положительных корней уравнения

$$\operatorname{ctg}\xi = c\xi \qquad (c = \text{const.}).$$

Однако ни та, ни другая система не будут нормальными.



Черт. 122.

5) Важный пример ортогональной системы в промежутке $[-1,1]$ доставляют многочлены Лежандра:

$$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[см. пп° 118, 320]. Так как

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

то для получения нормальной системы нужно было бы эти полиномы умножить, соответственно, на $\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

6) Наконец, рассмотрим еще один пример, связанный с бесселевыми функциями. Мы ограничимся для простоты письма функцией $J_0(x)$, но все сказанное будет справедливо и для функций $J_n(x)$ при $n > 0$.

В теории бесселевых функций устанавливается, что $J_0(x)$ имеет бесчисленное множество положительных корней:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$$

Переписав уравнение, которому удовлетворяет функция $J_0(x)$, в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dz}{dx}\right] = -xz,$$

легко получить, каковы бы ни были числа α и β:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\alpha x)}{dx}\right] = -\alpha^2 x J_0(\alpha x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\beta x)}{dx}\right] = -\beta^2 x J_0(\beta x).$$

Умножая первое из этих равенств на $J_0(\beta x)$, а второе — на $J_0(\alpha x)$, и почленно вычитая одно из другого, найдем:

$$(\beta^2-\alpha^2)\, xJ_0(\alpha x)\, J_0(\beta x) = \frac{d}{dx}\left[\alpha x J_0(\beta x)\, J_0'(\alpha x) - \beta x J_0(\alpha x)\, J_0'(\beta x)\right].$$

Отсюда, если $\alpha \neq \beta$:

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)\, J_0(\beta x)\, dx = \frac{\alpha J_0(\beta)\, J_0'(\alpha) - \beta J_0(\alpha)\, J_0'(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}. \qquad (21)$$

Если положить здесь $\alpha = \xi_n, \beta = \xi_m$ (при $n \neq m$), то придем к соотношению

$$\int_0^1 xJ_0(\xi_n x)\, J_0(\xi_m x)\, dx = 0,$$

которое показывает, что система функций $\{\sqrt{x}J_0(\xi_n x)\}$ ортогональна в промежутке $[0,1]$*. Эта система не будет нормальной.

Пусть в промежутке $[a, b]$ дана какая-нибудь ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$. Зададимся целью разложить определенную в $[a, b]$ функцию $f(x)$ в «ряд по функциям φ» вида:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \qquad (22)$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская его возможность, поступим так, как мы это сделали в частном случае выше. Именно, умножив обе части разложения на $\varphi_m(x)$, проинтегрируем его почленно:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx.$$

* Обобщая понятие ортогональности функций φ и ψ, вводят понятие *ортогональности с весом* $p(x)$, связывая его с выполнением равенства

$$\int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$$

Если воспользоваться этой терминологией, то можно сказать также, что система функций $\{J_0(\xi_n x)\}$ будет ортогональна с весом x.

В силу ортогональности [см. (15) и 16)], все интегралы справа, кроме одного, будут нулями, и легко получается:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x)\, dx. \qquad (23)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

[Формулы (7), (11), (12) являются частными случаями этой формулы.]

Ряд (22) с коэффициентами, составленными по формулам (23), называется (*обобщенным*) *рядом Фурье* данной функции, а сами коэффициенты — ее (*обобщенными*) *коэффициентами Фурье* относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. Особенно просто выглядят формулы (23) в случае нормальной системы; тогда

$$c_m = \int_a^b f(x) \varphi_m(x)\, dx \qquad (23^*)$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Конечно, здесь могут быть повторены те же замечания, какими мы закончили предыдущий n°. Обобщенный ряд Фурье, построенный для данной функции $f(x)$, связан с нею лишь формально. И в общем случае связь между функцией $f(x)$ и ее (обобщенным) рядом Фурье обозначают так:

$$f(x) \sim \sum_0^\infty c_n \varphi_n(x). \qquad (22^*)$$

Сходимость этого ряда к функции $f(x)$, как и в случае тригонометрического ряда, подлежит еще исследованию.

680. Тригонометрическое интерполирование. Можно естественным образом подойти к вопросу о представлении заданной функции $f(x)$ тригонометрическим рядом, отправляясь от тригонометрического интерполирования, т. е. приближения к функции $f(x)$ с помощью тригонометрического многочлена

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \qquad (24)$$

значения которого в ряде точек совпадают с соответствующими значениями функции.

Именно, всегда можно подобрать $2n+1$ коэффициентов: α_0, α_1, $\beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ тригонометрического многочлена n-го порядка (24) так, чтобы его значения были равны значениям функции $f(x)$ в $2n+1$ наперед указанных точках промежутка $(-\pi, \pi)$, например в точках

$$\xi_i = i\lambda \;\; (i = -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n),$$

где $\lambda=\frac{2\pi}{2n+1}$. Действительно, для определения этих $2n+1$ коэффициентов мы имеем столько же линейных уравнений:

$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos k\xi_i+\beta_k\sin k\xi_i)=f(\xi_i) \tag{25}$$
$$(i=-n,\ -n+1,\ \ldots,\ n).$$

Для решения этой системы нам придется вспомнить одно элементарное тригонометрическое тождество:

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ih=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h\ {}^*}{2\sin\frac{1}{2}h}. \tag{26}$$

Сложим почленно все равенства (25). Ввиду нечетности синуса коэффициент при β_k

$$\sum_{i=-n}^{n}\sin k\xi_i=0.$$

То же можно сказать и о коэффициенте при α_k, ибо по четности косинуса

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i=1+2\sum_{i=1}^{n}\cos ik\lambda=0 \tag{27}$$

в силу тождества (26), если взять в нем $h=k\lambda=\frac{2k\pi}{2n+1}$. Поэтому

$$\alpha_0=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i). \tag{28}$$

Чтобы определить $\alpha_m\ (1\leqslant m\leqslant n)$, умножим равенства (25), соответственно, на $\cos m\xi_i$ и снова почленно сложим. Коэффициент при α_0 будет нулем ввиду (27); равен, очевидно, нулю и коэффициент при β_k по нечетности синуса. Что же касается коэффициента при α_k, то он представится так:

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i\cos m\xi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k+m)\xi_i+\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k-m)\xi_i;$$

при $k\neq m$ обе суммы справа ввиду (27) обратятся в нуль, а при $k=m$ первая сумма будет нулем, в то время как вторая получит,

---

* Его легко получить, если умножить левую часть на $2\sin\frac{1}{2}h$ и каждое произведение $2\sin\frac{1}{2}h\cos ih$ заменить разностью $\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)h-\sin\left(i-\frac{1}{2}\right)h$. [Ср. 307 (2).]

очевидно, значение $\frac{2n+1}{2}$. Таким образом, лишь коэффициент при α_m оказывается отличным от нуля, именно, равным $\frac{2n+1}{2}$. Теперь уже легко найти

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \cos m\xi_i \qquad (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{29}$$

Совершенно аналогично, умножая равенства (25) на $\sin m\xi_i$ и складывая, найдем

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \sin m\xi_i \qquad (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{30}$$

Читатель несомненно заметил в примененном приеме сходство с методом Эйлера — Фурье для определения коэффициентов тригонометрического ряда. Однако здесь наши выкладки безупречны, ибо легко проверить, что полученные значения неизвестных действительно удовлетворяют уравнениям (25). Впрочем, это и без проверки ясно из простых алгебраических соображений. Мы видели, что система (25) может иметь, если вообще имеет, лишь *единственное* решение, которое дается формулами (28), (29), (30), *каков бы ни был набор правых частей*. Но в таком случае ее определитель необходимо отличен от нуля, и сама система является *определенной*. Итак, тригонометрический многочлен $\sigma_n(x)$ с найденными значениями коэффициентов удовлетворяет поставленным требованиям и может служить для интерполирования нашей функции в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Предположим теперь, что заданная функция в этом промежутке *интегрируема* (на этот раз — в собственном смысле!). Если мы станем увеличивать n до бесконечности, то интерполяционный многочлен $\sigma_n(x)$ будет меняться, совпадая с $f(x)$ на все более и более «густом» множестве точек. Он не только будет «удлиняться», но и уже вошедшие в игру его коэффициенты будут изменяться. Чтобы лучше разобраться в их поведении, представим себе промежуток $[-\pi, \pi]$ разложенным на $2n+1$ равных частей с помощью точек деления $x_i = (2i-1)\frac{\pi}{2n+1}$ $(-n \leqslant i \leqslant n+1)$. Точки ξ_i являются как раз серединами этих частичных промежутков, а длины последних все равны $\Delta x_i = \frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$. Если переписать формулы (28), (29) и (30) в виде

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \cos m\xi_i \Delta x_i,$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \sin m\xi_i \Delta x_i,$$

то суммы в правых частях окажутся интегральными суммами, отвечающими именно указанному разбиению промежутка. Теперь ясно, что при $n \to \infty$

$$\alpha_0 \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \alpha_m \to \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx,$$

$$\beta_m \to \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx,$$

так что *предельными значениями коэффициентов интерполяционного тригонометрического многочлена являются соответствующие коэффициенты Фурье нашей функции.* Можно сказать, что интерполяционный многочлен «в пределе» как бы переходит в ряд Фурье!

Этот процесс, разумеется, тоже может рассматриваться лишь как наведение. Он ничего не доказывает относительно связи между функцией и ее рядом Фурье, но, в свою очередь, достаточно мотивирует интерес именно к этому ряду. В последующих параграфах мы и займемся, наконец, непосредственно изучением поведения ряда Фурье для разных классов функций.

§ 2. Разложение функций в ряд Фурье

681. Постановка вопроса. Интеграл Дирихле. Пусть $f(x)$ будет функция с периодом 2π, абсолютно интегрируемая, хотя бы и в несобственном смысле, в промежутке $[-\pi, \pi]$, а следовательно, и в любом конечном промежутке. Вычислим постоянные (ее коэффициенты Фурье):

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du \tag{1}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

и по ним составим ряд Фурье нашей функции

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{2}$$

Читатель замечает здесь маленькое отступление от обозначений n° 678: коэффициент a_0 мы определяем теперь по общей формуле для a_m при $m = 0$, в разрез с формулой (7) упомянутого n°, но зато свободный член ряда пишем в виде $\frac{a_0}{2}$.

Заметим здесь же (этим замечанием мы будем пользоваться и в последующем), что для функции $F(u)$, имеющей период 2π, величина интеграла

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)\,du$$

по промежутку длины 2π не зависит от α [ср. **314**, 10) и **316**]. Поэтому и в формулах (1), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π; например, можно было бы писать

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (1^*)$$
$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

и т. п.

Для того чтобы исследовать поведение ряда (2) в какой-нибудь определенной точке $x = x_0$, составим удобное выражение для его частичной суммы

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0 + b_m\sin mx_0).$$

Подставим вместо a_m и b_m их интегральные выражения (1) и подведем *постоянные* числа $\cos mx_0$, $\sin mx_0$ под знак интеграла:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du +$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\cos mu\cos mx_0 + \sin mu\sin mx_0\right]du =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u - x_0)\right\}du.$$

Воспользовавшись для преобразования выражения в фигурных скобках формулой (26) п° **680**, будем иметь:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(u - x_0) = \frac{\sin(2n+1)\dfrac{u - x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u - x_0}{2}},$$

и окончательно

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u - x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u - x_0}{2}}\,du. \qquad (3)$$

Этот важный интеграл носит имя Дирихле (G. Lejeune-Dirichlet).

Так как мы имеем здесь дело с функциями от u периода 2π, то промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ по сделанному выше замечанию можно заменить, например, промежутком $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u) \frac{\sin (2n+1) \frac{u - x_0}{2}}{2 \sin \frac{u - x_0}{2}} du.$$

Подстановкой $t = u - x_0$ преобразуем этот интеграл к виду:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Затем, разбивая интеграл на два: $\int_0^\pi + \int_{-\pi}^0$ и приводя второй интеграл путем изменения знака переменной тоже к промежутку $[0, \pi]$, придем к такому окончательному выражению для n-й частичной суммы ряда Фурье:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt. \tag{4}$$

Таким образом, дело сводится к исследованию поведения именно этого интеграла, содержащего параметр n. *Своеобразие представляющейся здесь задачи заключается в том, что здесь не может быть использован предельный переход под знаком интеграла**, который до сих пор (см. главу XIV) служил нам единственным средством для разыскания предела интеграла, содержащего параметр. И с таким положением вещей нам в этой и в следующей главах придется сталкиваться систематически.

682. Первая основная лемма. Прежде чем продолжить наше исследование, докажем следующее важное для дальнейшего утверждение, которое принадлежит Риману:

Если функция $g(t)$ абсолютно интегрируема в некотором конечном промежутке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b g(t) \sin pt \, dt = 0$$

* В данном случае подинтегральное выражение при $n \to \infty$ вовсе не имеет предела.

и, аналогично,

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,dt=0.$$

Доказательство достаточно провести для первого из этих пределов. Заметим предварительно, что, каков бы ни был конечный промежуток $[\alpha, \beta]$, имеем такую оценку:

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\,dt\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}. \tag{5}$$

Допустим сначала, что функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей точками

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=b \tag{6}$$

и в соответствии с этим разложим и интеграл

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,dt.$$

Обозначив через m_i точную нижнюю границу значений $g(t)$ в i-м промежутке, можно преобразовать это выражение так:

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin pt\,dt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt\,dt.$$

Если ω_i есть колебание функции $g(t)$ в i-м промежутке, то в его пределах $g(t)-m_i\leqslant\omega_i$; с учетом неравенства (5) теперь легко получить для нашего интеграла оценку:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Задавшись произвольным числом $\varepsilon>0$, выберем сначала дробление (6) так, чтобы было

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2};$$

это сделать можно именно ввиду интегрируемости функции g [297]. Теперь, так как числа m_i тем самым уже определены, можем взять

$$p > \frac{4}{\varepsilon} \sum |m_i|,$$

и для этих значений p получим

$$\left| \int_a^b g(t) \sin pt\, dt \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

В случае, если функция $g(t)$ интегрируема в несобственном смысле (но обязательно абсолютно!) достаточно ограничиться предположением, что в промежутке $[a, b]$ имеется лишь одна особая точка, например точка b *.

Пусть $0 < \eta < b - a$. Разлагая интеграл на два:

$$\int_a^b = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b,$$

для второго интеграла справа имеем при любом p оценку:

$$\left| \int_{b-\eta}^b g(t) \sin pt\, dt \right| \leqslant \int_{b-\eta}^b |g(t)|\, dt,$$

что $< \frac{\varepsilon}{2}$, если выбрать η достаточно малым. Что же касается интеграла

$$\int_a^{b-\eta} g(t) \sin pt\, dt,$$

то при $p \to +\infty$ он стремится к нулю — по уже доказанному, так как в промежутке $[a, b-\eta]$ функция $g(t)$ интегрируема в собственном смысле слова; написанный интеграл по абсолютной величине также станет $< \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно большом p. Этим и завершается доказательство.

Мы обращаем внимание читателя на то, что уже здесь пределы, к которым стремятся интегралы, установлены помимо предельного перехода под знаком интеграла.

---

* Иначе можно было бы разложить промежуток на конечное число частей, содержащих лишь по одной особой точке, и применить рассуждение к каждой части в отдельности.

Если вспомнить формулы (1), выражающие коэффициенты Фурье, то в качестве первого непосредственного следствия отсюда получается утверждение:

Коэффициенты Фурье a_m, b_m абсолютно интегрируемой функции при $m \to +\infty$ стремятся к нулю.

683. Принцип локализации. Вторым непосредственным же следствием доказанной леммы является так называемый „принцип локализации".

Взяв произвольное положительное число $\delta < \pi$, разобьем интеграл в (4) на два: $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. Если второй из них переписать в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

то станет ясно, что множитель при синусе является абсолютно интегрируемой функцией от t в промежутке $[\delta, \pi]$, ибо знаменатель $2\sin\frac{1}{2}t$ в этом промежутке в нуль не обращается. В таком случае по лемме этот интеграл при $n \to \infty$ стремится к нулю, так что и самое существование предела для частичной суммы ряда Фурье, $s_n(x_0)$, и величина этого предела целиком определяются поведением одного лишь интеграла

$$\rho_n(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt. \tag{7}$$

Но в этот интеграл входят лишь значения функции $f(x)$, отвечающие изменению аргумента в промежутке от $x_0 - \delta$ до $x_0 + \delta$. Этим простым соображением и доказывается „принцип локализации", состоящий в следующем:

Теорема Римана. *Поведение ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой точке x_0* зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в непосредственной близости рассматриваемой точки,* т. е. в сколь угодно малой ее окрестности.

Таким образом, если, например, взять две функции, значения которых в произвольно малой окрестности точки x_0 совпадают, то как бы они ни разнились вне этой окрестности, соответствующие этим функциям ряды Фурье ведут себя в точке x_0 одинаково: либо оба сходятся, и притом к одной и той же сумме, либо

* Мы понимаем под этим сходимость или расходимость ряда в точке x_0, а также наличие для него (в случае сходимости) той или иной суммы.

оба расходятся. Этот результат покажется еще более разительным, если подчеркнуть, что самые коэффициенты Фурье рассматриваемых функций, зависящие от всех их значений, могут оказаться совершенно различными!

Эта теорема обычно связывается с именем Римана, ибо является следствием более общей его теоремы, доказанной в 1853 г. Следует, однако, отметить, что идея „принципа локализации" содержится в одной работе Остроградского 1828 г. по математической физике, а также отражена в исследованиях Лобачевского 1834 г. по тригонометрическим рядам.

684. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье. Возвращаемся к прерванному исследованию поведения частичной суммы $s_n(x_0)$ ряда Фурье, для которой мы получили интегральное выражение (4). Отметим, что упомянутое равенство имеет место для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям. Если, в частности, взять $f(x)\equiv 1$, то и $s_n(x)\equiv 1$, и из (4) получим, что

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Умножая обе части этого равенства на постоянное число S_0 — предполагаемую сумму нашего ряда, точное значение которой мы установим ниже, и вычитая результат из (4), найдем:

$$s_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt, \tag{8}$$

где для краткости положено

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0. \tag{9}$$

Если мы хотим установить, что S_0 действительно является суммой ряда, то для этого нужно доказать, что интеграл (8) при $n\to\infty$ стремится к нулю.

Обратимся к выбору самого числа S_0. Практически важны те случаи, когда (а) функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, либо (б) $f(x)$ имеет в этой точке с обеих сторон разве лишь разрывы первого рода (или скачки), так что оба предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуют. *Этими случаями мы впредь ограничимся и раз навсегда полагаем*:

в случае (а): $S_0=f(x_0)$,

в случае (б): $S_0=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

В различении случаев (а) и (б) нет надобности, если в точке x_0, где налицо разрыв первого рода, выполняется равенство

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Точки, где это условие соблюдено, иногда называют регулярными.

Отметим, что так как

$$\text{(а)} \lim_{t\to+0} f(x_0\pm t)=f(x_0) \quad \text{или} \quad \text{(б)} \lim_{t\to+0} f(x_0\pm t)=f(x_0\pm 0),$$

смотря по случаю, то при указанном выборе числа S_0 всегда будет

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t)=0. \qquad (10)$$

Имея это в виду, сформулируем теперь

Признак Дини (U. Dini). *Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0, если при некотором $h>0$ интеграл*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$

существует.

Действительно, при этом предположении существует и интеграл

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt.$$

Если переписать выражение (8) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

то непосредственно по основной лемме ясно, что оно при $n\to\infty$ стремится к нулю, так как функция $\frac{\varphi(t)}{t}$, а с нею и $\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$ абсолютно интегрируема. Этим и завершается доказательство.

В развернутом виде интеграл Дини может быть написан так:

в случае (а): $$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}\,dt,$$

в случае (б): $$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}\,dt.$$

Очевидно, достаточно предположить существование порознь интегралов (смотря по случаю)

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}\,dt \tag{11}$$

или

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,dt.$$

Отсюда можно получить ряд частных признаков, используя различные известные признаки существования интегралов. Например, ограничиваясь случаем (а), укажем

Признак Липшица (R. O. Lipschitz). *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0, где она непрерывна, к сумме $f(x_0)$, если для достаточно малых t выполняется неравенство*

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leqslant Lt^\alpha,$$

где L и α — положительные постоянные $(\alpha \leqslant 1)$.

В случае $\alpha = 1$ имеем попросту

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t}\right| \leqslant L,$$

так что интегралы (11) существуют как собственные [480]. Если же $\alpha < 1$, то

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t}\right| \leqslant \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

и так как справа стоит интегрируемая функция, то интегралы (11) все же существуют, хотя бы как несобственные [482].

В частности, условие Липшица при $\alpha = 1$ заведомо будет выполнено, если для функции $f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$ или, по крайней мере, конечные односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t},$$

хотя бы и различные между собой («угловая точка»). Таким образом, *в точке x_0, где функция $f(x)$ дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, ряд Фурье сходится, причем сумма его равна $f(x_0)$.*

Легко перефразировать признак Липшица и для случая (б). Как частное следствие отсюда, укажем и здесь, что *в точке x_0*

разрыва первого рода для сходимости ряда Фурье *достаточно предположить существование конечных пределов*:

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

причем на этот раз суммой ряда будет $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Упомянутые пределы в некотором смысле уподобляются односторонним производным, лишь значение $f(x_0)$ функции в точке x_0 заменяется, соответственно, ее предельными значениями справа или слева от этой точки.

Наиболее часто на практике приходится иметь дело с функциями $f(x)$, имеющими период 2π и дифференцируемыми или же кусочно-дифференцируемыми.* Как видим, для таких функций ряд Фурье всегда сходится к самой функции $f(x)$, за исключением «точек стыка» различных функций, где суммой ряда будет $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

685. Вторая основная лемма. Для построения дальнейших признаков мы будем нуждаться еще в одном вспомогательном утверждении, впервые установленном Дирихле:

Если функция $g(t)$ *монотонно возрастает, оставаясь ограниченной, в промежутке* $[0, h]$, *где* $h>0$, *то*

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}g(+0). \tag{12}$$

Доказательство. Прежде всего, рассматриваемый интеграл может быть представлен в виде суммы двух интегралов:

$$g(+0)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}\,dt+\int_0^h [g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}\,dt. \tag{13}$$

Если первый из них с помощью подстановки $pt=z$ преобразовать к виду

$$g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

* Фуикция $f(x)$ иазывается кусочио-диффереицируемой в промежутке $[a, b]$, если этот промежуток разлагается иа конечиое число частичных промежутков, виутри которых фуикция дифференцируема, а иа коицах не только имеет предельиые значеиия, ио и одностороииие производиые, при условии замеиы иа этих концах значеиий фуикций упомяиутыми предельиыми значеииями. Можно представить себе кусочио-дифференцируемую фуикцию как бы «склееииой» из иескольких функций, дифференцируемых (а следовательио, и иепрерывных) в замкнутых частичиых промежутках с тем лишь, что в «точках стыка» (равио как и на коицах a и b осиовиого промежутка) ее значеиия устаиавливаются особо.

то сразу ясно, что при $p \to +\infty$ он стремится к $\frac{\pi}{2} \cdot g(+0)$, ибо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, весь вопрос сводится к доказательству того, что второй из интегралов (13) стремится к нулю.

По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (можно считать $\delta < h$), что

$$0 \leqslant g(t) - g(+0) < \varepsilon \text{ для } 0 < t \leqslant \delta.$$

Разобьем теперь упомянутый только что интеграл на два:

$$\left(\int_0^\delta + \int_\delta^h\right) [g(t) - g(+0)] \frac{\sin pt}{t} dt = I_1 + I_2.$$

К интегралу I_1 применим формулу Бонне [306]; мы получим, что

$$I_1 = [g(\delta) - g(+0)] \int_\eta^\delta \frac{\sin pt}{t} dt = [g(\delta) - g(+0)] \int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz.$$

Но первый множитель $< \varepsilon$, а второй равномерно ограничен при всех значениях p. Действительно, из сходимости несобственного интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$ следует, что непрерывная (при $z \geqslant 0$) функция от z

$$\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz,$$

имеющая при $z \to +\infty$ конечный предел, будет ограничена при всех значениях z:

$$\left|\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz\right| \leqslant L \qquad (L = \text{const.}),$$

так что

$$\left|\int_{p\eta}^{p\delta} \frac{\sin z}{z} dz\right| = \left|\int_0^{p\delta} - \int_0^{p\eta}\right| \leqslant 2L.$$

Итак, для интеграла I_1 имеем независимо от p оценку

$$|I_1| < 2L\varepsilon. \tag{14}$$

Что же касается интеграла I_2, то при $p \to \infty$ (и фиксированном δ) он стремится к нулю по лемме n° 682, так как множитель при

$\sin pt$ есть интегрируемая в собственном смысле функция (ведь $t \geqslant \delta$!). Этим и завершается доказательство.

686. Признак Дирихле — Жордана. Обратимся теперь к выводу нового признака сходимости рядов Фурье, основанного на другой идее.

Признак Дирихле — Жордана. *Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме S_0, если в некотором промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ с центром в этой точке функция имеет ограниченное изменение.*

Мы видели в n° 683, что поведение частичной суммы $s_n(x_0)$ при $n \to \infty$ определяется поведением интеграла $\rho_n(\delta)$ [см. (7)], где за δ, в частности, можно взять и то число h, о котором была речь выше. Перепишем интеграл $\rho_n(h)$ в виде

$$\rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^h [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] \frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t} \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t}\, dt.$$

Сумма в квадратных скобках, по предположению, есть функция с ограниченным изменением; частное же $\dfrac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$ представляет собой возрастающую функцию. Таким образом, и произведение их имеет ограниченное изменение и, следовательно, представляется в виде разности двух монотонно возрастающих функций. Поскольку лемма предыдущего n° приложима к каждой из них в отдельности, она приложима и к их разности, и мы сразу получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(h) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Этим все доказано, ибо в точке непрерывности полученное выражение само собою обращается в $f(x_0)$.

Нужно сказать, что первоначально сформулированные самим Дирихле условия разложимости функции в ряд Фурье носили более частный характер. Именно, он установил следующее предложение:

Признак Дирихле. *Если функция $f(x)$ периода 2π кусочно-монотонна в промежутке $[-\pi, \pi]$* и имеет в нем не более, чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится*

* Под этим разумеется возможность разложить промежуток $[-\pi, \pi]$ на конечное число частичных промежутков, внутри которых по отдельности функция монотонна.

к сумме $f(x_0)$ *в каждой точке непрерывности и к сумме* $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *в каждой точке разрыва.*

С тех пор высказанные здесь условия известны под именем «условий Дирихле».

Так как функция, удовлетворяющая этим условиям, очевидно, имеет ограниченное изменение в любом конечном промежутке, то этот признак формально перекрывается предыдущим признаком.

Изложенных признаков вполне достаточно для удовлетворения практических потребностей анализа и его приложений. Другие предложенные признаки представляют, главным образом, теоретический интерес; на них мы не имеем возможности останавливаться.

Коснемся в заключение вопроса о взаимоотношении признаков Дини и Дирихле — Жордана. Можно показать, что они несравнимы между собой, т. е. не вытекают один из другого. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, которая в промежутке $[-\pi, \pi]$ определяется так*:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}} & \text{при } x\neq 0, \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и кусочно-монотонна и, значит, удовлетворяет условиям Дирихле. В то же время интеграл Дини, относящийся к точке $x=0$:

$$\int_0^h \frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}\,dt = 2\int_0^h \frac{dt}{t\ln\dfrac{t}{2\pi}}$$

явно расходится при любом $h>0$.

С другой стороны, если в промежутке $[-\pi, \pi]$ определить функцию равенствами*:

$$\begin{cases} f(x)=x\cos\dfrac{\pi}{2x} & \text{при } x\neq 0, \\ f(0)=0, \end{cases}$$

то в точке $x=0$ заведомо выполняется условие Липшица:

$$|f(x)-f(0)|\leqslant|x|,$$

а следовательно и условие Дини. Однако на этот раз функция $f(x)$ ни в какой окрестности точки $x=0$ не имеет ограниченного изменения [567].

---

* На остальную часть числовой оси функция распространяется по закону периодичности: $f(x+2\pi)=f(x)$.

687. Случай непериодической функции. Вся построенная выше теория исходила из предположения, что заданная функция определена для всех вещественных значений x и притом имеет период 2π. Между тем, чаще всего приходится иметь дело с непериодической функцией $f(x)$, иной раз даже заданной только в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Чтобы иметь право применить к такой функции изложенную теорию, введем взамен нее вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную следующим образом. В промежутке $[-\pi, \pi]$ мы отождествляем f^* с f:

$$f^*(x) = f(x) \qquad (-\pi < x \leqslant \pi), \tag{15}$$

затем полагаем

$$f^*(-\pi) = f^*(\pi),$$

а на остальные вещественные значения x распространяем функцию $f^*(x)$ по закону периодичности.

К построенной таким образом функции $f^*(x)$ с периодом 2π можно уже применять доказанные теоремы разложения. Однако если речь идет о точке x_0, лежащей строго между $-\pi$ и π, то при проверке условий этих теорем нам пришлось бы иметь дело ввиду (15) лишь с фактически заданной функцией $f(x)$. По той же причине и коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (1), не переходя к функции $f^*(x)$. Короче говоря, *все доказанное выше непосредственно переносится на заданную функцию* $f(x)$, минуя вспомогательную функцию $f^*(x)$.

Особого внимания, однако, требуют концы промежутка $x = \pm\pi$. При проверке для функции $f^*(x)$ условий какой-либо из теорем пп° **684, 686**, скажем в точке $x = \pi$, нам пришлось бы иметь дело как со значениями вспомогательной функции $f^*(x)$ слева от $x = \pi$, *где они совпадают с соответственными значениями данной функции* $f(x)$, так и со значениями $f^*(x)$ справа от $x = \pi$, *где они совпадают уже со значениями* $f(x)$ *справа от* $x = -\pi$. Поэтому, если бы мы пожелали перефразировать для случаев точек $x = \pm\pi$, например, признак Дирихле — Жордана, то нам в обоих случаях следовало бы потребовать, чтобы $f(x)$ имела ограниченное изменение как слева от $x = \pi$, так и справа от $x = -\pi$. При этом в качестве значения S_0 в обоих же случаях надлежало бы взять

$$S_0 = \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} = \\ = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Таким образом, если заданная функция $f(x)$ даже непрерывна при $x = \pm\pi$, но не имеет периода 2π, так что $f(\pi) \neq f(-\pi)$,

то при соблюдении какого-либо из достаточных для сходимости ряда Фурье условий суммой этого ряда будет число

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2},$$

отличное как от $f(-\pi)$, так и от $f(\pi)$. Для такой функции разложение может иметь место лишь в открытом промежутке $(-\pi, \pi)$.

Следующее замечание заслуживает серьезного внимания читателя. Если тригонометрический ряд (2) сходится в промежутке $(-\pi, \pi)$ к функции $f(x)$, то ввиду того, что его члены имеют период 2π, он сходится всюду, и сумма его $S(x)$ оказывается тоже периодической функцией от x с периодом 2π. *Но эта сумма вне указанного промежутка вообще уже не совпадает с функцией $f(x)$* (если последняя была задана на всей вещественной оси). Ниже [690] это замечание будет проиллюстрировано многочисленными примерами.

Отметим, наконец, что вместо промежутка $[-\pi, \pi]$ можно было бы взять любой промежуток $[\alpha, \alpha+2\pi]$ длины 2π.

688. Случай произвольного промежутка. Предположим, что функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l, l]$ произвольной длины $2l\ (l>0)$. Если прибегнуть к подстановке

$$x=\frac{ly}{\pi}\quad(-\pi\leqslant y\leqslant\pi),$$

то получится функция $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ от y в промежутке $[-\pi, \pi]$, к которой уже приложимы рассмотрения предыдущего n°. При соблюдении определенных условий, как мы видели, можно разложить ее в ряд Фурье:

$$f\left(\frac{yl}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),$$

коэффициенты которого определяются формулами Эйлера — Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy.$$
$$(n=0,1,2\ldots)\qquad\qquad(n=1,2,\ldots)$$

Вернемся теперь к прежней переменной x, полагая

$$y=\frac{\pi x}{l}.$$

Тогда мы получим разложение заданной функции $f(x)$ в тригонометрический ряд несколько измененного типа:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).\qquad(16)$$

Здесь косинусы и синусы берутся от углов, кратных не x, а $\frac{\pi x}{l}$. Можно было бы и формулы для определения коэффициентов этого разложения преобразовать той же подстановкой к виду

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (17)$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (n=1, 2, \ldots)$$

В отношении концов промежутка $x = \pm l$ сохраняют силу замечания, сделанные в предыдущем n° относительно точек $x = \pm\pi$. Конечно, промежуток $[-l, l]$ может быть заменен любым другим промежутком длины $2l$, в частности, промежутком $[0, 2l]$. В последнем случае формулы (17) должны быть заменены формулами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (17^*)$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (n=1, 2, \ldots)$$

При всех оговорках относительно концов промежутка или относительно точек разрыва функции, мы все же установили факт огромного принципиального значения: *произвольно заданная в произвольном промежутке функция в очень широком классе случаев * оказывается разложимой в тригонометрический ряд*, т. е. представляется единым аналитическим выражением — тригонометрическим рядом — во всей области определения функции. В n° **690**, в частности, мы найдем большое число примеров такого разложения функций, первоначально заданных в различных частях промежутка различными аналитическими выражениями. *Аппарат тригонометрических рядов оказывается универсальным средством для «склеивания» функций, окончательно стирая грань между функциями, допускающими единое аналитическое представление во всей области определения, и функциями, определенными с помощью нескольких аналитических выражений* [ср. **46**, 3°; **363** 5); **407**, замечание I; **497**, 11) и др.].

689. Разложения только по косинусам или только по синусам. Начнем со следующего замечания: если заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$ интегрируемая (в собственном или несобственном смысле) функция $f(x)$ будет нечетной, то для нее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

* Включающем, например, функции кусочно-дифференцируемые или кусочно-монотонные и т. п.

В этом легко убедиться, представив интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}$ в виде суммы интегралов: $\int\limits_{0}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{0}$ и заменив во втором из них x на $-x$. Таким же путем устанавливается, что в случае **четной** функции $f(x)$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

[ср. **312**, 9) и **314**].

Пусть теперь $f(x)$ будет абсолютно интегрируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$ четная функция. Тогда произведение $f(x)\sin nx$ окажется нечетной функцией, и по сказанному

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$
$$(n=1, 2, \ldots)$$

Таким образом, *ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{18}$$

Так как $f(x)\cos nx$ в этом случае тоже будет чётной функцией, то, применив сюда второе из сделанных выше замечаний, можем коэффициенты a_n разложения написать в виде

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{19}$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

Если же функция $f(x)$ будет **нечетной**, то нечетной будет и функция $f(x)\cos nx$, так что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0.$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots)$$

Мы приходим к заключению, что *ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{20}$$

При этом ввиду четности произведения $f(x)\sin nx$ можно писать:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{21}$$
$$(n=1, 2, \ldots)$$

Отметим попутно, что каждая функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих функций:

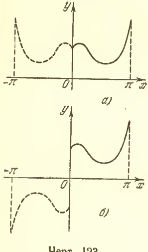
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Очевидно, что ряд Фурье функции $f(x)$ как раз и составится из разложения по косинусам функции $f_1(x)$ и разложения по синусам функции $f_2(x)$.

Предположим, далее, что функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, \pi]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье (2), мы дополним определение нашей функции для значений x в промежутке $[-\pi, 0)$ по произволу, а затем применим сказанное в 687. Подчеркнутый выше произвол в определении функции дает возможность получить таким путем различные тригонометрические ряды. Если в какой-нибудь точке x_0 между 0 и π наша функция удовлетворяет одному из признаков, установленных в nn° 694, 696, то все эти ряды будут в точке x_0 сходиться к $f(x_0)$ или в случае разрыва к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.



Черт. 123.

Можно использовать произвол в определении функции в промежутке $[-\pi, 0)$ так, чтобы получить для $f(x)$ разложение только по косинусам или только по синусам. Действительно, представим себе, что для $0 < x \leqslant \pi$ мы полагаем

$$f(-x) = f(x), \tag{22}$$

так что в результате получится четная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$ (черт. 123,*а*), к тому же имеющая даже период 2π. Ее разложение, как мы видели, будет содержать одни только косинусы. Коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (19), куда входят лишь значения первоначально заданной функции $f(x)$.

Аналогично, если дополнить определение функции $f(x)$ условием (для $0 < x \leqslant \pi$)

$$f(-x) = -f(x), \tag{23}$$

так, чтобы она оказалась нечетной (черт. 123,*б*), то в ее разложении будут участвовать только члены с синусами. Коэффициенты его определяются по формулам (21).

Таким образом, *заданную в промежутке* $[0, \pi]$ *функцию при соблюдении известных условий оказывается возможным разлагать как в ряд по косинусам, так и в ряд по синусам!*

Особого исследования требуют, впрочем, точки $x = 0$ и $x = \pi$. Здесь оба разложения ведут себя по-разному. Предположим для простоты, что заданная функция $f(x)$ непрерывна при $x = 0$ и $x = \pi$, и рассмотрим сначала разложение по косинусам. Условие (22) прежде всего сохраняет непрерывность при $x = 0$, так что при соблюдении надлежащих условий ряд (18) при $x = 0$ будет сходиться именно к $f(0)$. Так как, далее,

$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi),$$

то и при $x = \pi$ имеет место аналогичное обстоятельство.

Иначе обстоит дело с разложением по синусам. Не вдаваясь в соображения относительно нарушения непрерывности условием (23) и т. п., мы просто заметим, что в точках $x = 0$ и $x = \pi$ сумма ряда (20) явно будет нулем. Поэтому она может дать нам значения $f(0)$ и $f(\pi)$, очевидно, лишь в том случае, если и эти значения равны нулю.

Если функция $f(x)$ задана в промежутке $[0, l]$ $(l > 0)$, то, прибегнув к той же замене переменной, что и в **688**, мы сведем вопрос о разложении ее в ряд по косинусам:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

или в ряд по синусам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

к только что рассмотренному. При этом коэффициенты разложений вычисляются, соответственно, по формулам:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

или

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

690. Примеры. Функции, которые ниже приводятся в виде примеров, как правило, относятся к классу дифференцируемых или кусочно-дифференцируемых. Поэтому самая возможность их разложения в ряд Фурье — вне сомнения, и мы на этом вопросе останавливаться не будем.

1) Разложить функцию

$$f(x)=e^{ax} \qquad (a=\text{const.},\ a\neq 0)$$

в промежутке $(-\pi,\ \pi)$.

По формулам (1):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi}=2\ \frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{a\cos nx+n\sin nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^n\frac{1}{\pi}\,\frac{2a}{a^2+n^2}\operatorname{sh} a\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\,\frac{2n}{a^2+n^2}\operatorname{sh} a\pi.$$

Итак, для $-\pi<x<\pi$ будем иметь

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh} a\pi\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[a\cos nx-n\sin nx]\right\}.$$

Если бы мы исходили из промежутка $(0,\ 2\pi)$, то получилось бы разложение с иными коэффициентами — в этом случае нужно было бы пользоваться формулами (1*). Впрочем, новое разложение легко вывести и из уже найденного.

2) Разложить функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

в промежутке $(0,\ 2\pi)$.

По формулам (1*):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\,\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,$$

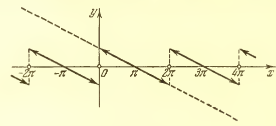
$$(n=1,2,3,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, мы приходим к замечательному по простоте разложению, содержащему одни лишь синусы:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

При $x = 0$ (или 2π) сумма ряда равна нулю, и равенство нарушается. Не будет равенства и вне указанного промежутка. График суммы ряда $S(x)$ (черт. 124)



Черт. 124.

состоит из бесчисленного множества параллельных отрезков и ряда отдельных точек на оси x.

3) Ввиду особой важности разложения, полученного в предыдущем упражнении, мы дадим элементарный вывод его, не опирающийся на общую теорию.

Пусть $0 < x < 2\pi$. Воспользовавшись формулой (26) п° 680, которую мы можем написать так:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2},$$

имеем последовательно:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt \, dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \, dt =$$

$$= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin (2n+1)\frac{t}{2} \, dt + \int_0^x \frac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{t} \, dt.$$

Но при $n \to +\infty$ второй член в последней части равенства стремится к 0 по *основной лемме* п° 682*, а третий член подстановкой $u = (2n+1)\frac{t}{2}$

---

* Множитель в квадратных скобках, если при $t = 0$ приписать ему значение 0, оказывается функцией, *аналитической* в этой точке, ибо в окрестности ее разлагается в степенной ряд:

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}t + \frac{37}{5760}t^3 + \ldots$$

преобразуется к виду

$$\int_0^{(2n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du$$

и, очевидно, стремится к $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2},$$

что и требовалось доказать.

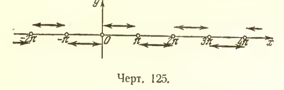
4) Из разложения в 2) уже без вычислений можно получить и другие интересные разложения. Заменяя в нем x на $2x$ и деля обе части равенства на 2, найдем:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \qquad (0 < x < \pi),$$

вычитая же одно разложение из другого, получим:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad (0 < x < \pi).$$

Если через $S(x)$ обозначить сумму последнего ряда, то $S(0) = S(\pi) = 0$. Изменяя знак x, для промежутка $(-\pi, 0)$ по нечетности синуса найдем, что



Черт. 125.

$S(x) = -\frac{\pi}{4}$; для прочих же значений x сумма $S(x)$ получается по закону периодичности, так что, в частности, для промежутка $(2\pi, 3\pi)$ снова $S(x) = \frac{\pi}{4}$, и т. д. График функции $S(x)$ изображен на черт. 125; чертеж же 126 характеризует постепенное приближение к этой разрывной функции частичных сумм ряда.

Если положить в рассматриваемом разложении $x = \frac{\pi}{2}$, то получим уже известный нам ряд Лейбница [404 (16)]

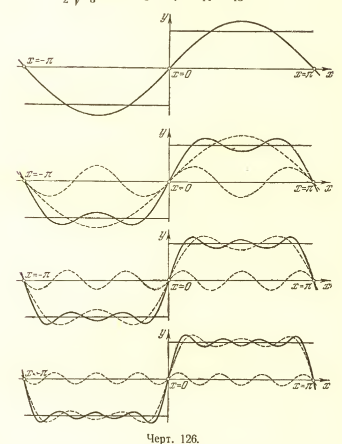
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

При $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{\pi}{3}$ получаются ряды:

$$\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots$$

и

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$$



Черт. 126.

Сочетая полученное здесь разложение с разложением в 2), легко придти к ряду для функции $f(x)=x$:

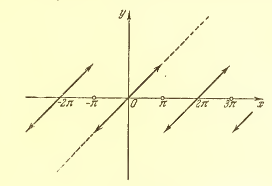
$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi).$$

Непосредственно мы получаем его лишь для $0<x<\pi$, но равенство явно имеет место для $x=0$ и, кроме того, обе его части, очевидно, представляют

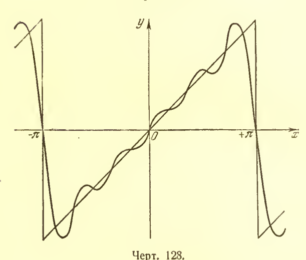
нечетные функции, так что окончательно разложение оказывается верным для всего промежутка $(-\pi, \pi)$.

График суммы ряда при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ легко себе представить по черт. 127. На черт. 128 приведен график частичной суммы:

$$y = s_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right).$$



Черт. 127.



Черт. 128.

5) Опираясь на разложение в 2), доказать, что на всей вещественной оси

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - E(x) & \text{для нецелых } x, \\ \frac{1}{2} & \text{для целых } x. \end{cases}$$

6) Разложить (четную!) функцию $f(x) = x^2$ в ряд по косинусам в промежутке $[-\pi, \pi]$.

По формулам (19):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2\, dx = \frac{\pi^2}{3},$$

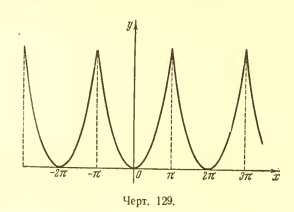
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi} x \frac{\cos nx}{n} \Bigg|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \qquad (n > 0),$$

так что

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

График суммы ряда, состоящий из бесконечного числа примыкающих одна к другой параболических дуг, изображен на черт. 129.



Черт. 129.

Полагая в полученном разложении $x = \pi$ или $x = 0$, придем к известным результатам:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

которые, впрочем, и непосредственно вытекают один из другого.

7) Разложить функции:

(а) $f_1(x) = \cos ax$ по косинусам в $[-\pi, \pi]$,

(б) $f_2(x) = \sin ax$ по синусам в $(-\pi, \pi)$

(число a здесь предполагается не целым).

(а) Имеем

$$\frac{1}{2}\,a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax\,dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$(n > 0) \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax\,\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x]\,dx = (-1)^n\,\frac{2a}{a^2-n^2}\,\frac{\sin a\pi}{\pi},$$

так что

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{a\cos nx}{a^2-n^2} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

(б) *Ответ.*

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n\sin nx}{a^2-n^2} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Отметим попутно, что при $x = 0$ из (а) получается:

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

или, если положить $a\pi = z$:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right]$$

(здесь z — любое число, отличное от кратного π). Мы вновь пришли к разложению функции $\frac{1}{\sin z}$ на простые дроби. Полагая же в (а) $x = \pi$, мы можем восстановить разложение на простые дроби функции $\operatorname{ctg} z$. [Ср. 441, 9).]

Весьма замечательно, что столько важных математических фактов получается просто как следствие отдельных тригонометрических разложений!

8) Разложения функций

(а) $f_1(x) = \operatorname{ch} ax$ по косинусам в $[-\pi, \pi]$,

(б) $f_2(x) = \operatorname{sh} ax$ по синусам $(-\pi, \pi)$

проще всего получить из разложения в 1) функции $f(x) = e^{ax}$, для которой они служат четной и нечетной составляющими [689]. Они имеют вид:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{n}{a^2+n^2}\,\sin nx \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Как следствие отсюда можно получить разложения на простые дроби функций $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$ и $\operatorname{cth} z$.

Перейдем к примерам разложений функций, заданных в промежутке от 0 до π, по косинусам или по синусам [689].

9) Функцию $f(x) = x$ в промежутке $[0, \pi]$ разложить по косинусам.

По формулам (19):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\, x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx\, dx =$$

$$= 2\, \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi} \qquad (n > 0),$$

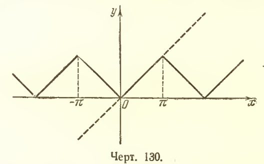
т. е.

$$a_{2k} = 0,\ a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Искомое разложение имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

График суммы ряда представлен на черт. 130 [ср. разложение в 4) той же



Черт. 130.

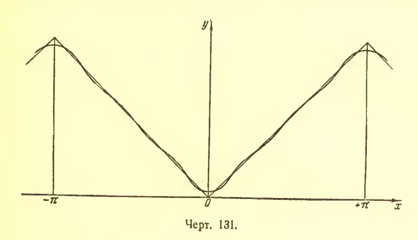
функции по синусам и график на черт. 127]. На черт. 131 изображена аппроксимирующая кривая:

$$y = s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x\right).$$

Комбинируя полученный результат с разложением в 6) функции x^2 по косинусам, легко установить:

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Впрочем, так как обе части равенства не меняют своего значения при замене x на $2\pi - x$, то на деле равенство сохраняется и в более широком промежутке $[0, 2\pi]$.



Черт. 131.

10) Функцию $f(x) = x^2$ в промежутке $(0, \pi)$ разложить по синусам.
Ответ.

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

Предоставляется читателю составить график для суммы ряда и сопоставить его с графиком на черт. 129.

11) Разложить функцию $f(x) = e^{ax}$ в промежутке от 0 до π (а) в ряд по косинусам и (б) в ряд по синусам.
Ответ.

$$\text{(а)} \quad e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

$$\text{(б)} \quad e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \qquad (0 < x < \pi).$$

12) Разложить функции
(а) $f_1(x) = \sin ax$ по косинусам в $[0, \pi]$,
(б) $f_2(x) = \cos ax$ по синусам в $(0, \pi)$.
(а) Решение. Предположим сначала, что a — число не целое.

Тогда

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \, dx = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin (a + n) x + \sin (a - n) x] \, dx =$$

$$= \frac{2a}{\pi} [1 - (-1)^n \cos a\pi] \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

Искомое разложение можно написать в виде:

$$\sin ax = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{a^2 - (2k)^2} \right\} +$$

$$+ 2a \frac{1 + \cos a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k - 1) x}{a^2 - (2k - 1)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Пусть теперь a — целое число. Здесь снова придется различать случаи, когда $a = 2m$ есть четное число или $a = 2m - 1$ нечетное число. При $a = 2m$

$$a_0 = 0, \; a_{2k} = 0, \; a_{2k-1} = \frac{8m}{\pi} \frac{1}{(2m)^2 - (2k - 1)^2},$$

так что

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k - 1) x}{(2m)^2 - (2k - 1)^2}\,^{*} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Аналогично при $a = 2m - 1$

$$\sin (2m - 1) x = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2 (2m - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2m - 1)^2 - (2k)^2} \right\}^{*} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

(б) Указание. Следует различать те же случаи, что и в (а).

13) Доказать, что для x в $[0, \pi]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k - 1) x}{(2k - 1)^4} = \frac{1}{96} \pi (\pi - 2x) (\pi^2 + 2\pi x - 2x^2).$$

Указание. Разлагая в ряд Фурье функцию $f(x)$, приведенную в правой части, при повторном интегрировании по частям учесть, что $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

---

* Легко показать, что если в левой части заменить синус его абсолютной величиной, то разложение будет иметь место на всей вещественной оси.

14) Рассмотрим теперь примеры разложения функций, интегрируемых в несобственном смысле. Пусть требуется разложить по косинусам в промежутке $(-\pi, \pi)$ четную функцию

$$f(x) = \ln 2 \cos \frac{x}{2}.$$

На концах промежутка функция обращается в ∞, но сохраняет (абсолютную) интегрируемость.

По формуле (19):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} \, dx = \ln 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t \, dt = 0$$

[см. 492, 1°], а для $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \ln 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \, dx = (-1)^{n-1} \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \, dx$$

(замена x на $\pi - x$). Для вычисления последнего интеграла представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

а каждое из слагаемых, в силу тождества (26) n° 680, заменим, соответственно, суммой:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \cos ix \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \cos ix.$$

Окончательно

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и искомое разложение имеет вид:

$$\ln 2 \cos \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Можно считать, что это равенство имеет место и при $x = \pm \pi$, если в этом случае обеим его частям приписать значение $-\infty$. Если под знаком ln вместо косинуса написать его абсолютную величину, то равенство будет справедливо для всех вещественных значений x!

Заменяя в установленном равенстве x на $\pi - x$, придем к другому интересному разложению:

$$-\ln 2 \sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Относительно распространения этой формулы можно сделать те же замечания, что и выше.

Приведем в заключение примеры разложения «склеенных» функций, которые в разных частях промежутка задаются разными аналитическими выражениями *.

15) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{если } \ 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Разложить эту функцию в полный ряд Фурье.

Имеем по формулам (1):

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\, x \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi},$$

т. е.

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)^2\pi}.$$

Аналогично

$$b_n = -\frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Разложение будет таково:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{\sin 3x}{3} - \\ - \frac{\sin 4x}{4} - \ldots \qquad (-\pi < x < \pi).$$

16) Функции

(а) $$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant h, \\ 0 & \text{для } h < x \leqslant \pi; \end{cases}$$

(б) $$f_2(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h} & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 2h, \\ 0 & \text{для } 2h < x \leqslant \pi \end{cases}$$

---

* Впрочем, здесь нет ничего принципиально нового по сравнению с уже изученными примерами: ведь, скажем, сумма ряда в 2) также может рассматриваться, как функция, «склеенная» из ряда линейных функций (ср. черт. 124).

разложить в промежутке от 0 до π по косинусам.

$$(а)\quad \frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^h dx=\frac{h}{\pi},\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h \cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin nh}{n},$$

$$f_1(x)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right\}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi),$$

исключая, впрочем, точку $x=h$, где сумма ряда равна $\frac{1}{2}$.

$$(б)\quad \frac{1}{2}\;a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)dx=\frac{h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos 2nh}{2n^2h}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 nh}{n^2h},$$

$$f_2(x)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right\}\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

17) Доказать, что

$$(а)\quad \cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\ldots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{при } 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{при } x=\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3},\\[2mm] -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{при } x=\dfrac{2\pi}{3},\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{при } \dfrac{2\pi}{3}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$(б)\quad \sin x-\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}-\frac{\sin 11x}{11^2}+\ldots=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] \dfrac{\pi^2}{6\sqrt{3}} & \text{при } \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3},\\[2mm] \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi-x) & \text{при } \dfrac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

18) Пусть функция $f(x)$ определена равенствами:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{для } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] -\cos x & \text{для } \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

Разложить ее по косинусам.

Ответ.

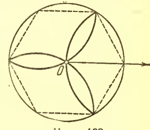
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right\}.$$

19) Доказать, что сумма ряда

$$\frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}[\cos(4k+1)x - \sin(4k+1)x - \\ - \cos(4k+3)x - \sin(4k+3)x]$$

равна $\pi\sin x$ для $m\pi < x < m\pi + \frac{\pi}{2}$, $\pi\cos x$ для $m\pi + \frac{\pi}{2} < x < (m+1)\pi$ и $(-1)^m\frac{\pi}{2}$ для $x = m\pi$ или $\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

20) Вокруг трех вершин правильного шестиугольника (через одну) радиусами, равными стороне a шестиугольника, описаны окружности; из их внешних дуг составляется трилистник (черт. 132). Написать полярное уравнение трилистника, если за полюс принят центр шестиугольника, а полярная ось проведена через центр одного из кругов.



Черт. 132.

Указание. $r = f(\theta)$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$, где четная функция $f(\theta)$ определяется равенствами:

$$f(\theta) = \begin{cases} 2a\cos\theta & \text{для } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ 2a\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{для } \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Разложить эту функцию по косинусам.

Ответ.

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}a}r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\theta - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\theta + \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\theta - \ldots \\ (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

21) Использовав уже известные разложения, доказать, что

(а) $$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi);$$

(б) $$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx \qquad (-\pi < x < \pi);$$

(в) $$\sin x\ln 2\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx \qquad (-\pi < x < \pi);$$

(г) $$\cos x\ln 2\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\cos nx \qquad (-\pi < x < \pi).$$

22) Если заданная в промежутке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию

(а) $f(2\pi - x) = f(x)$ или (б) $f(2\pi - x) = -f(x)$,

то в первом случае все $b_n = 0$, а во втором — все $a_n = 0$.

Доказать это [либо исходя из формул (1), либо опираясь на четность или нечетность периодически продолженной функции].

Замечание. Теперь ясно, что особенности разложения в промежутке $[0, 2\pi]$ функций $\frac{\pi - x}{2}$ и $\ln 2 \sin \frac{x}{2}$ [2) и 14)] можно было бы предвидеть, так как

$$\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = -\frac{\pi - x}{2},$$

$$\ln 2 \sin \frac{2\pi - x}{2} = \ln 2 \sin \frac{x}{2}.$$

23) Доказать, что если в промежутке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию

(а) $f(x + \pi) = f(x)$ или (б) $f(x + \pi) = -f(x)$,

то в первом случае $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$, а во втором $a_{2m} = b_{2m} = 0$.

24) Ограничиваясь функциями, заданными в промежутке $[0, \pi]$, доказать, что условие

(а) $f(\pi - x) = f(x)$ влечет равенства $a_{2m-1} = 0$ (при разложении по косинусам) или $b_{2m} = 0$ (при разложении по синусам);

(б) $f(\pi - x) = -f(x)$ влечет равенства $a_{2m} = 0$ (при разложении по косинусам) или $b_{2m-1} = 0$ (при разложении по синусам).

Замечание. На этом основании можно было бы предвидеть особенности разложений по синусам функций $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$ в 4), функций $\sin 2mx$ и $\sin (2m - 1) x$ по косинусам в 12), а также разложений в 13), 17) и 18).

25) Подражая рассуждениям п° 689 установить, что функцию $f(x)$, заданную лишь в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, можно в нем с обычными оговорками разложить по косинусам или по синусам одних лишь четных кратных или одних нечетных кратных x. Вывести формулы для коэффициентов, приложить их к примерам.

26) Пусть задана функция $f(x)$, имеющая период 2π, и a_m, b_m — ее коэффициенты Фурье. Требуется выразить через них коэффициенты Фурье $\bar{a}_m$, $\bar{b}_m$ «смещенной» функции $f(x + h)$ ($h = \text{const.}$).

Используя замечание в 681 насчет интеграла от периодической функции, имеем:

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + h}^{\pi + h} f(x)\, dx = a_0,$$

$$\bar{a}_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h) \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + h}^{\pi + h} f(x) \cos m(x - h)\, dx =$$

$$= \cos mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + h}^{\pi + h} f(x) \cos mx\, dx + \sin mh \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + h}^{\pi + h} f(x) \sin mx\, dx =$$

$$= a_m \cos mh + b_m \sin mh$$

и, аналогично,

$$\bar{b}_m = b_m \cos mh - a_m \sin mh.$$

691. Разложение $\ln\Gamma(x)$. В качестве более сложного примера мы установим, следуя Куммеру (E. E. Kummer), разложение в ряд Фурье функции $\ln\Gamma(x)$ в промежутке (0,1].

Пользуясь сделанными в n° 688 замечаниями о разложении функции в промежутке $(0, 2l]$ (в нашем случае $2l = 1$), ищем разложение в виде:

$$\ln\Gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x),$$

причем коэффициенты его могут быть установлены по формулам, аналогичным формулам (17*) n° 688:

$$a_n = 2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin 2n\pi x\,dx.$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Впрочем, как мы покажем, коэффициенты a_n можно определить почти без вычислений. В самом деле, логарифмируя известное соотношение [531,5°]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{2\pi}{2\sin\pi x},$$

мы найдем

$$\ln\Gamma(x) + \ln\Gamma(1-x) = \ln 2\pi - \ln 2\sin\pi x.$$

Ряд Фурье функции $\ln\Gamma(1-x)$ получается из ряда Фурье функции $\ln\Gamma(x)$ заменой x на $1-x$, так что члены с косинусами сохранятся, а члены с синусами изменят знаки. Складывая, получим

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos 2n\pi x.$$

С другой стороны, легко написать ряд Фурье для функции, стоящей в правой части равенства, если использовать известное разложение функции $-\ln 2\sin\frac{x}{2}$ [690, 14)], но заменив лишь x на $2\pi x$:

$$\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos 2n\pi x.$$

Таким образом, получаем сразу

$$\frac{1}{2}a_0 = \ln\sqrt{2\pi},\ a_n = \frac{1}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Гораздо большего труда потребует вычисление коэффициентов b_n. Мы будем исходить из формулы для $\ln\Gamma(x)$ [540]

$$\ln\Gamma(x) = \int_0^{\infty}\left[(x-1)e^{-z} - \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right]\frac{dz}{z},$$

которую подстановкой $e^{-z} = t$ преобразуем к виду:

$$\ln\Gamma(x) = \int_0^1\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1\right]\frac{dt}{\ln t}.$$

Подставляя это выражение в формулу для b_n и переставляя интегрирования по x и по t, получим:

$$b_n = 2\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}\int_0^1 \left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1\right]\sin 2n\pi x\,dx.$$

Для обоснования нашего права переставлять интегрирования заметим следующее. Выражение

$$\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t} - x + 1\right]\frac{\sin 2n\pi x}{\ln t}$$

теряет непрерывность как функция двух переменных лишь при $t = 0$*. Но интеграл от этого выражения по переменной t сходится равномерно относительно x в $[0, 1]$, ибо (при $0 < \tau < 1$)

$$\int_0^\tau \left[\frac{t^{x-1}-1}{1-t} - (1-x)\right]\frac{|\sin 2n\pi x|}{|\ln t|}\,dt <$$

$$< \frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot\frac{|\sin 2n\pi x|}{x}\tau^x < \frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot 2n\pi.$$

По известной теореме [521] перестановка допустима.

Продолжаем вычисление. Имеем:

$$\int_0^1 \sin 2n\pi x\,dx = 0,\quad \int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx = -\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 t^{x-1}\sin 2n\pi x\,dx = \frac{1}{t}\int_0^1 e^{x\ln t}\sin 2n\pi x\,dx =$$

$$= \frac{\ln t\cdot\sin 2n\pi x - 2n\pi\cos 2n\pi x}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]}\,e^{x\ln}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{(1-t)\,2n\pi}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]}.$$

Отсюда

$$b_n = 2\int_0^1 \left[-\frac{2n\pi}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]} + \frac{1}{2n\pi}\right]\frac{dt}{\ln t}.$$

Полагая здесь $t = e^{-2n\pi u}$, окончательно приведем выражение для b_n к виду:

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2n\pi u}\right]\frac{du}{u}.$$

В частности,

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2\pi u}\right]\frac{du}{u},$$

откуда

$$nb_n - b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{-2\pi u} - e^{-2n\pi u})\frac{du}{u} = \frac{1}{\pi}\ln n$$

* Легко проверить, что при $t = 1$ непрерывность фактически не нарушается.

(интеграл Фруллани, 495). Таким образом, определение всех коэффициентов приводится к определению первого из них.

Вспомним интегральное выражение эйлеровой постоянной [535]:

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u} - e^{-u}\right)\frac{du}{u}.$$

Тогда

$$b_1 - \frac{1}{\pi} C = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}\right)\frac{du}{u} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{-u} - e^{-2\pi u})\frac{du}{u}.$$

Но первый интеграл вычисляется непосредственно, он равен 0; второй же равен $\frac{1}{\pi}\ln 2\pi$ (снова — интеграл Фруллани). Окончательно получаем:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}(C + \ln 2\pi),$$

откуда затем

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(C + \ln 2n\pi).$$

Итак, искомое разложение имеет вид:

$$\ln \Gamma(x) = \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n}\cos 2n\pi x + \frac{1}{n\pi}(C + \ln 2n\pi)\sin 2n\pi x$$

$$(0 < x < 1)$$

§ 3. Дополнения

692. Ряды с убывающими коэффициентами. До сих пор мы исходили из наперед заданной функции и разлагали ее в ряд Фурье, пользуясь установленными для этого достаточными условиями. В немногих простых случаях удается, наоборот, по заданному тригонометрическому ряду установить, что он сходится к некоторой абсолютно интегрируемой функции и является ее рядом Фурье. Мы изложим относящиеся сюда исследования Юнга [W. H. Young].

Речь будет идти о рядах вида:

$$\text{(C)}\quad \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^\infty q_\nu \cos \nu x, \qquad \text{(S)}\quad \sum_{\nu=1}^\infty q_\nu \sin \nu x,$$

причем мы раз навсегда предположим, что коэффициенты q_ν положительны и стремятся к нулю, монотонно убывая. Как мы знаем [см. конец n° 430], в любом замкнутом промежутке, не содержащем точек $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$), оба ряда сходятся равномерно. Обозначим сумму ряда (C) через $f(x)$, а сумму ряда (S) через $g(x)$; обе функции имеют период 2π и непрерывны повсюду, исключая точек вида $2k\pi$. В этих исключительных точках ряд (C) может

и расходиться*. Так как функция f четна, а g нечетна, то достаточно ограничиться промежутком $[0, \pi]$.

1°. *Если функция f (или g) абсолютно интегрируема, то ряд* (C) [*или* (S)] *представляет собой ее ряд Фурье***.

(а) Умножив разложение функции g на $\sin mx$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$):

$$g(x) \sin mx = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sin \nu x \cdot \sin mx,$$

мы получим равномерно сходящийся в промежутке $[0, \pi]$ ряд. Действительно, так как

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

то

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \sin mx \right| \leqslant \frac{|\sin mx|}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = m\pi,$$

и сюда приложим признак Дирихле [429]. [Мы использовали здесь элементарные неравенства

$$|\sin z| \leqslant z \ (z \geqslant 0), \quad \sin z > \frac{2}{\pi} z, \quad \left(0 < z \leqslant \frac{\pi}{2}\right).]$$

В таком случае ряд можно почленно проинтегрировать от 0 до π, и мы получим:

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin mx \, dx.$$

(б) Переходя к функции f, умножим ее разложение на $1 - \cos mx$:

$$f(x)(1 - \cos mx) =$$
$$= \frac{1}{2} q_0 (1 - \cos mx) + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x (1 - \cos mx).$$

---

* Если ряд $\sum_{1}^{\infty} q_\nu$ сходится, то оба ряда (C) и (S) сходятся равномерно к непрерывным функциям, для которых и служат рядами Фурье [678]. Все дальнейшее представляет интерес лишь в случае, если упомянутый ряд расходится.

** Эта теорема есть частный случай одной общей и очень трудно доказываемой теоремы [см. 750, 751]; мы предпочли для рядов рассматриваемого простого типа здесь же исчерпать этот вопрос.

Этот ряд также будет по признаку Дирихле равномерно сходящимся в промежутке $[0, \pi]$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \tag{1}$$

и потому

$$\left|\frac{1}{2}(1-\cos mx)+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu x\,(1-\cos mx)\right|\leqslant\frac{1-\cos mx}{2\sin\frac{x}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{2}m^2x^2}{\frac{2x}{\pi}}=\frac{1}{4}m^2\pi x\leqslant\frac{1}{4}m^2\pi^2.$$

[Использовано неравенство: $1-\cos z<\frac{1}{2}z^2$.]

Интегрируя почленно от 0 до π, находим:

$$q_0-q_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos mx\,dx.$$
$$(m=1,2,3,\dots)$$

Перейдем здесь к пределу при $m\to+\infty$. При этом по предположению $q_m\to0$, а также стремится к нулю и последний интеграл — по основной лемме n° 682. Таким образом, получаем сначала

$$q_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx,$$

а затем и вообще

$$q_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos mx\,dx,$$

чем и завершается доказательство.

2°. *Если ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q_\nu}{\nu}=Q \tag{2}$$

сходится, то оба ряда (C) *и* (S) *определяют абсолютно интегрируемые функции (и, следовательно, являются их рядами Фурье).*

Так как рассуждения для обоих рядов однотипны, то мы ограничимся случаем ряда (C). Полагая

$$Q_n = \frac{1}{2} q_0 + q_1 + \ldots + q_n,$$

будем иметь последовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu =$$

$$= \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu} = \frac{1}{2} q_0 + Q; \quad (3)$$

мы переставили здесь два суммирования [393] и использовали очевидные равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{и вообще} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\nu}.$$

Пусть теперь

$$\frac{\pi}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Для этих значений x представим $f(x)$ в виде:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos \nu x \right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x.$$

Первая сумма оценивается по абсолютной величине числом Q_n. Для оценки второй применим к выражению

$$\sum_{\nu=n+1}^{\nu=n+m} q_\nu \cos \nu x$$

лемму Абеля [383]. Так как

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} \cos \nu x \right| = \left| \frac{\sin\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x},$$

то

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\nu=n+m} q_\nu \cos \nu x \right| \leqslant \frac{q_{n+1}}{\sin \frac{1}{2} x} < \frac{\pi}{x} q_{n+1} < \frac{\pi}{x} q_n < (n+1) q_n.$$

Та же оценка в пределе сохраняется и для всей второй суммы, так что окончательно

$$|f(x)| \leqslant Q_n + (n+1) q_n \qquad \left(\frac{\pi}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}\right).$$

В таком случае [см. (3) и (2)]

$$\int_0^{\pi} |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} [Q_n + (n+1) q_n] = \pi \left(\frac{1}{2} q_0 + 2Q\right),$$

так что функция $f(x)$ действительно абсолютно интегрируема. Остается применить 1°.

Как мы увидим ниже [732], сходимость ряда (2) является одновременно и необходимой для того, чтобы ряд (S) был рядом Фурье, так что в отношении ряда (S) полученный результат дальнейшему улучшению не подлежит. Иначе обстоит дело с рядом (C): здесь упомянутое условие отнюдь не необходимо. Мы приведем для этого случая еще и другое достаточное условие, которое не покрывается прежним.

3°. *Если и разности $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$ монотонно убывают с возрастанием ν, то функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема [а ряд (C) является ее рядом Фурье].*

Подвергнем частичную сумму

$$C_n(x) = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos \nu x \qquad (x > 0)$$

преобразованию Абеля [383]. Учитывая (1), найдем:

$$C_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu \cdot \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + \right.$$

$$\left. + q_n \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x \right\}.$$

Полученную сумму мы снова подвергнем преобразованию Абеля. Если для краткости положить $\Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1} = \Delta^2 q_\nu$ и учесть, что

$$\sum_{\nu=0}^{m} \sin \left(\nu + \frac{1}{2}\right) x = \frac{1 - \cos (m+1) x}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

то $C_n(x)$ приведется к виду:

$$C_n(x) = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}x} \sum_{\nu=0}^{n-2} \Delta^2 q_\nu \cdot (1 - \cos\overline{\nu+1}x) +$$

$$+ \Delta q_{n-1} \cdot \frac{1-\cos nx}{4\sin^2\frac{1}{2}x} + q_n \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Так как последние два члена стремятся к нулю при $n \to +\infty$, то, переходя к пределу, получим для $f(x)$ разложение по неотрицательным и непрерывным функциям:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \cdot \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}$$

(коэффициенты $\Delta^2 q_\nu$ неотрицательны по предположению). Отсюда ясно, что и функция $f(x)$ неотрицательна.

Для доказательства интегрируемости этой функции воспользуемся следствием из n° **518** и замечанием к нему, перефразированными для рядов. Можно написать:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^\pi \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx,$$

если только сходится этот ряд.

Так как

$$\frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \left\{\frac{1}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\mu} \cos\lambda x\right\},$$

то непосредственно получаем:

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\nu+1)$$

[ср. **309**, 5) (б)], так что

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta^2 q_\nu.$$

Остается лишь убедиться в сходимости ряда справа.

Мы видели в **375**, 3), что если ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{4}$$

с монотонно убывающими положительными членами сходится, то необходимо выполняется условие

$$\nu a_\nu \to 0.$$

Отсюда следует, далее, что ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta a_\nu$$

сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (4): это видно из тождества

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu - na_n.$$

Если теперь взять $a_\nu = \Delta q_\nu$, то оказывается, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\Delta^2 q_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta q_\nu = q_0,$$

и окончательно

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} q_0.$$

Теорема доказана.

Например, условию этой теоремы удовлетворяет ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n};$$

этот пример поучителен в том отношении, что теорема 2° к нему не применима, так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится **[367, 69)]**.

Замечание. Если в рядах (C) и (S) заменить переменную x на $x+\pi$, то получатся ряды с знакопеременными коэффициентами, убывающими по абсолютной величине. Для таких рядов доказанные теоремы также сохраняют силу.

693. Суммирование тригонометрических рядов с помощью аналитических функций комплексной переменной. В ряде случаев, исследуя коэффициенты рядов вида (C) или (S), можно установить, что эти ряды сходятся (исключая, быть может, отдельные точки) и являются рядами Фурье для своих сумм (см., например, предыдущий n°), но во всех этих случаях естественно возникает вопрос,

как найти суммы этих рядов или — точнее — как выразить их в конечном виде через элементарные функции, если они, вообще, в таком виде выражаются. Еще Эйлер (а также Лагранж) с успехом применял для суммирования тригонометрических рядов в конечном виде аналитические функции комплексной переменной. Идея метода Эйлера состоит в следующем.

Допустим, что при некотором наборе коэффициентов $\{q_\nu\}$ ряды (C) и (S) сходятся к функциям $f(x)$ и $g(x)$ повсюду в промежутке $[0, 2\pi]$, исключая разве лишь отдельные точки. Рассмотрим теперь степенной ряд с теми же коэффициентами, расположенный по степеням комплексной переменной z:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu z^\nu. \tag{5}$$

На окружности единичного круга $|z| = 1$, т. е. при $z = e^{ix}$, этот ряд по предположению сходится, исключая отдельные точки:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu e^{\nu ix} = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu(\cos \nu x + i \sin \nu x) = \\ = f(x) + ig(x). \tag{6}$$

В таком случае, по известному свойству степенных рядов ряд (5) заведомо сходится при $|z| < 1$, т. е. внутри единичного круга, определяя там некоторую функцию $\varphi(z)$ комплексной переменной. Используя известные нам [см. § 5 главы XII] разложения элементарных функций комплексной переменной, часто удается свести к ним и функцию $\varphi(z)$. Тогда для $z = re^{xi}$ $(r < 1)$ имеем:

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu r^\nu e^{i\nu x} = \varphi(re^{ix}),$$

и по теореме Абеля [456], лишь только ряд (6) сходится, его сумма получается как предел

$$f(x) + ig(x) = \lim_{r \to 1} \varphi(re^{ix}). \tag{7}$$

Обычно этот предел равен попросту $\varphi(e^{ix})$, что и позволяет вычислить в конечном виде функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пусть, например, предложены ряды

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu} \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

Доказанные в предыдущем n° утверждения приводят к заключению, что оба эти ряда сходятся (первый — исключая точки 0 и 2π) и сду-

жат рядами Фурье для определяемых ими функций $f(x)$ и $g(x)$. Но что это за функции? Для ответа на этот вопрос составим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu}.$$

По сходству с логарифмическим рядом [458] легко устанавливается его сумма:

$$\varphi(z) = -\ln(1-z) = \ln\frac{1}{1-z} \quad (|z|<1),$$

следовательно,

$$f(x)+ig(x) = \ln\frac{1}{1-e^{ix}} \quad (x \neq 0,\ 2\pi).$$

Теперь легкое вычисление дает:

$$\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{1}{(1-\cos x)-i\sin x} = \frac{1}{2}+i\,\frac{\sin x}{2(1-\cos x)} =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

так что модуль этого выражения есть $\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$, а аргумент $\frac{\pi-x}{2}$.

Поэтому

$$\ln\frac{1}{1-e^{ix}} = -\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\,\frac{\pi-x}{2}$$

и, таким образом, окончательно

$$f(x) = -\ln 2\sin\frac{x}{2},\ g(x) = \frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<2\pi).$$

Результаты эти нам знакомы [690, 14) и 2)] и даже были однажды получены с помощью «комплексных» соображений [461, 6) (б)]; но в первом случае мы исходили из функций f и g, а во втором — из аналитической функции φ. Здесь же впервые нам отправной точкой послужили сами ряды. Дальнейшие примеры подобного рода читатель найдет в следующем n°.

Подчеркнем еще раз, что нужно наперед быть уверенным в сходимости рядов (С) и (S), чтобы иметь право определить их суммы с помощью предельного равенства (7). Одно существование предела в правой части этого равенства еще не позволяет сделать заключение о сходимости упомянутых рядов. Чтобы показать это на примере, рассмотрим ряды

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu x \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu x,$$

заведомо расходящиеся для $0 < x < 2\pi$. Между тем, если составить соответствующий им ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2},$$

то при стремлении точки $z = re^{ix}$ вдоль по радиусу единичного круга к точке e^{ix} на окружности, его сумма будет иметь вполне определенный предел

$$\frac{1}{1-e^{ix}} - \frac{1}{2} = i\frac{\sin x}{2(1-\cos x)} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Если сходимость рядов (С) и (S) наперед не установлена, то равенство (7) можно рассматривать только как наведение: получив с его помощью функции f и g, следует затем вычислить их коэффициенты Фурье и лишь в случае совпадения с коэффициентами данных рядов прибегнуть к известным признакам сходимости рядов Фурье.

694. Примеры. Во всех задачах сходимость предложенных рядов предоставляется установить читателю.

1) Просуммировать ряды:

(а) $1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\cos nx}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots;$

(б) $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\sin nx}{1\cdot 2\ldots n} + \ldots$

Решение. Здесь

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} = e^{z}\,*,$$

так что

$$\varphi(e^{ix}) = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}[\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)].$$

Отсюда

(а) $f(x) = e^{\cos x}\cos(\sin x)$, $g(x) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

2) Просуммировать ряды

(а) $\frac{\cos x}{1!} - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \ldots$, (б) $\frac{\sin x}{1!} - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \ldots;$

(в) $1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - \ldots$, (г) $\frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - \ldots$

Указание. Функция $\varphi(z)$ равна

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

в случаях (а), (б); она равна

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

* Мы сохраняем обозначения предыдущего n°.

в случаях (в), (г). Использовать разложения синуса и косинуса от комплексного аргумента на вещественную и мнимую части [359]:

$$\sin(\alpha+\beta i)=\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta+i\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta i)=\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta-i\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta.$$

Ответ.

(а) $\sin(\cos x)\,\mathrm{ch}(\sin x)$, (б) $\cos(\cos x)\,\mathrm{sh}(\sin x)$;
(в) $\cos(\cos x)\,\mathrm{ch}(\sin x)$, (г) $\sin(\cos x)\,\mathrm{sh}(\sin x)$.

3) Просуммировать ряды:

(а) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$, (б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$;

(в) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$, (г) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$;

(д) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\cos nx$, (е) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$;

(ж) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}$,

(з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$.

(а), (б). Решение. Соответствующий этим случаям ряд

$$\varphi(z)=1+\frac{z}{1\cdot2}-\frac{z^2}{2\cdot3}+\frac{z^3}{3\cdot4}-\dots$$

непосредственно не дает известной нам элементарной функции, но если, использовав очевидное равенство

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

преобразовать его следующим образом:

$$1+\left\{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots\right\}+\left\{-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\dots\right\},$$

то, вспоминая логарифмический ряд [459], легко уже найдем, что

$$\varphi(z)=1+\ln(1+z)+\frac{1}{z}[\ln(1+z)-z]=\left(1+\frac{1}{z}\right)\ln(1+z).$$

Подставим теперь сюда $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Имеем:

$$1+z=(1+\cos x)+i\sin x=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right),$$

так что (для $0<x<\pi$) модуль этого выражения есть $2\cos\frac{x}{2}$, а аргумент $\frac{x}{2}$, и

$$\ln(1+z)=\ln 2\cos\frac{x}{2}+i\frac{x}{2}.$$

Окончательно,

$$\varphi(e^{ix})=[(1+\cos x)-i\sin x]\cdot\left[\ln 2\cos\frac{x}{2}+i\frac{x}{2}\right].$$

Отсюда для $-\pi<x<\pi$

$$f(x)=(1+\cos x)\ln 2\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sin x,$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x(1+\cos x)-\sin x\ln 2\cos\frac{x}{2}.$$

(в) — (з). Указание. Во всех случаях, используя соответственно равенства

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),\quad \frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

свести дело к логарифмическому ряду.

Ответ. (ж) $(\cos x+\cos 2x)\ln 2\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x)-\cos x$,

(з) $(\sin x+\sin 2x)\ln 2\cos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x)-\sin x$.

[По поводу (в) — (е) ср. 690, 21).]

4) Просуммировать ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

Указание. $\varphi(z)=\frac{1}{z}\ln(1+z^2)$.

Ответ. Ограничиваясь промежутком $0\leqslant x\leqslant\pi$, имеем

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\ln 2\cos x+x\sin x & \text{для } 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x & \text{для } \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

5) Просуммировать ряды:

(а) $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\ldots$,

(б) $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

Указание. Используя разложения

$$\frac{1}{(n-1)n} \text{ и } \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

«на простые дроби», свести дело к $\ln \frac{1}{1-z}$.

Ответ. (а) $(1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2}\sin x + \cos x$,

(б) $(1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}$;

в обоих случаях для $0 < x < 2\pi$.

6) Просуммировать ряды:

$$\text{(а)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}, \quad \text{(б)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

$$\text{(в)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}.$$

(а), (б). Решение. Составив ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

узнаем в нем разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+zi}{1-zi},$$

которое имеет место для $|z| \leqslant 1$, исключая $z = \pm i$ [459].

Положим здесь $z = e^{ix}$, ограничиваясь промежутком $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но исключая $x = \frac{\pi}{2}$. Имеем:

$$\frac{1+zi}{1-zi} = i\,\frac{\cos x}{1+\sin x} = i\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

так что модуль этого выражения есть $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$, а аргумент равен $+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, будет ли $x < \frac{\pi}{2}$ или $x > \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\ln\frac{1+zi}{1-zi} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| \pm \frac{\pi}{2}i$$

и

$$\operatorname{arctg} z = \pm\frac{\pi}{4} + i\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|.$$

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ для } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} \text{ для } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

и для тех же значений x

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|=\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

(в) Указание. Сочетая только что полученный результат с результатом упражнения 4), найдем:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln 2\cos x+x\sin x) & \text{для } 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ -\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln 2\,|\cos x|+(x-\pi)\sin x) & \text{для } \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

7) Просуммировать ряды:

(а) $\cos x+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7}+\ldots;$

(б) $\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5}+\ldots;$

(в) $\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7\cdot 8}+\ldots;$

(г) $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5\cdot 6}+\ldots$

Решение. Для случаев (а) и (б):

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}=\arcsin z$$

[459]. Далее, для $0\leqslant x\leqslant\pi$:

$$\arcsin e^{ix}=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+i\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right).$$

Это легко проверить, установив, что синус выражения справа действительно равен e^{ix}. Впрочем, нетрудно и вывести это выражение, найдя u, v из уравнений

$$\sin u\operatorname{ch} v=\cos x,\quad \cos u\operatorname{sh} v=\sin x.$$

Итак,

$$f(x)=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}},\qquad g(x)=\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Для случаев (в) и (г) получается ряд:

$$\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7\cdot 8}+\ldots=$$

$$=\left\{z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{z^7}{7}+\ldots\right\}-$$

$$-\frac{1}{z}\left\{\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^4+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^6+\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^8+\ldots\right\}=$$

$$=\arcsin z+\frac{1}{z}\left(\sqrt{1-z^2}-1\right)$$

[460]. Отсюда для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$f(x) = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} + \sqrt{2 \sin x} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos x,$$

$$g(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{\sin x}\right) - \sqrt{2 \sin x} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x.$$

695. Комплексная форма рядов Фурье. Рассмотрим снова произвольную функцию $f(x)$ с периодом 2π, абсолютно интегрируемую в любом конечном промежутке, и связанный с нею ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx. \tag{8}$$

Его коэффициенты определяются формулами

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu\, du, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu\, du. \tag{9}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2, \dots) \qquad\qquad (m = 1,\ 2, \dots)$$

Если заменить теперь $\cos mx$ и $\sin mx$ их выражениями через показательную функцию от чисто мнимого аргумента [457]:

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left(e^{mxi} + e^{-mxi}\right),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i}\left(e^{mxi} - e^{-mxi}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-mxi} - e^{mxi}\right),$$

то получится ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_m - b_m i)\, e^{mxi} + \frac{1}{2}(a_m + b_m i)\, e^{-mxi}.$$

Его короче можно записать так:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{kxi}, \tag{10}$$

полагая

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_m = \frac{1}{2}(a_m - b_m i), \quad c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + b_m i), \tag{11}$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3 \dots)$$

так что

$$c_{-m} = \bar{c}_m\,^{*}. \tag{12}$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье функции* $f(x)$.

---

* Напомним, что если z есть комплексное число, символ $\bar{z}$ означает сопряженное с ним число.

Если соблюдены достаточные условия сходимости ряда (8) к функции $f(x)$, то к той же сумме сходится и ряд (10), если только (как явствует из самого способа его получения) процесс суммирования его понимать как разыскание предела при $n \to +\infty$ симметрично составленной суммы

$$\sum_{m=-n}^{n} c_m e^{mxi}.$$

Впрочем, если сходятся порознь ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{mxi} \text{ и } \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-mxi},$$

то упомянутый предел получается путем сложения их сумм.

Коэффициенты c_m разложения (10), определяемые формулами (11), если учесть формулы Эйлера — Фурье (9), могут быть записаны единообразно:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-nui} du. \qquad (13)$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Эти коэффициенты могли бы быть получены и непосредственно, подобно коэффициентам a_m и b_m [678], если, допустив, что функция $f(x)$ разлагается в ряд (10) (так что вместо $\sim$ можно поставить $=$), умножить обе части равенства на e^{-nxi} и проинтегрировать от $-\pi$ до π, причем справа выполнить интегрирование почленно.

Если имеем комплексную функцию

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

где f_1, f_2 — вещественные функции рассмотренного типа, то естественно рядом Фурье функции f назвать формальную сумму рядов Фурье функций f_1 и f_2, из которых второй предварительно почленно умножен на i. В комплексной форме ряд Фурье функции f имеет вид (10), где коэффициенты c_n, как и только что, выражаются формулами (13). [Но в общем случае, конечно, нельзя утверждать сопряженности коэффициентов c_m и c_{-m}.]

Иногда разложение функции в ряд Фурье естественно и непосредственно получается именно в комплексной форме. В качестве примера вспомним производящую функцию для функций Бесселя и ее разложение [395, 14)]:

$$e^{\frac{a}{2}(z - z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) z^n.$$

Нетрудно видеть, что это разложение имеет место для всех комплексных значений z, отличных от нуля. Положив здесь $z = e^{ix}$, найдем:

$$e^{ai \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a)\, e^{nxi}; \tag{14}$$

комплексная функция

$$e^{ai \sin x} = \cos(a \sin x) + i \sin(a \sin x) \tag{15}$$

оказалась разложенной в ряд типа (10), который сходится равномерно относительно x * (по свойству степенных рядов) и потому заведомо будет ее рядом Фурье.

Вспомнив, что

$$J_{-m}(a) = (-1)^m J_m(a)$$

[395, 14)], перепишем полученное разложение в виде:

$$J_0(a) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(a)\,[e^{mxi} + (-1)^m e^{-mxi}] =$$

$$= J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a)\cos 2kx + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)x. \tag{16}$$

Если приравнять отдельно вещественные и мнимые части выражений (15) и (16), то придем к интересным разложениям:

$$\cos(a \sin x) = J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(a)\cos 2kx,$$

$$\sin(a \sin x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)x.$$

Отсюда, заменяя x на $x + \frac{\pi}{2}$, можно вывести и другие два разложения:

$$\cos(a \cos x) = J_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(a)\cos 2kx,$$

$$\sin(a \cos x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} J_{2k-1}(a)\cos(2k-1)x.$$

---

* Мы имеем в виду ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty}$$

порознь.

Наконец, если применить к вычислению коэффициентов разложения (14) формулы (13), то получим известные интегральные выражения для бесселевых функций:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a\sin x - nx)i}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(a\sin x - nx)\,dx,$$

которые нам не раз встречались.

696. Сопряженный ряд. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{17}$$

с произвольными вещественными коэффициентами можно формально* рассматривать, как вещественную часть степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m i)\, z^m, \tag{18}$$

расположенного по степеням комплексной переменной z, при $z = e^{xi}$. Действительно, тогда

$$z^m = e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$$

и

$$(a_m - b_m i)\, z^m = (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \\ + i(-b_m \cos mx + a_m \sin mx).$$

Мнимая же часть формально представляется рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-b_m \cos mx + a_m \sin mx). \tag{19}$$

Ряд (19) *называется сопряженным с рядом* (17).

Особый интерес представляет ряд, сопряженный с рядом Фурье некоторой (имеющей период 2π и абсолютно интегрируемой) функции $f(x)$. В частности, можно параллельно с вопросом о сходимости самого ряда Фурье (17) поставить и вопрос о сходимости сопряженного с ним ряда. Впрочем, в последнем случае дополнительной трудностью служит то обстоятельство, что наперед неясно, какой суммы естественно ждать от сопряженного ряда.

Начнем, как и в п° **691**, с составления удобного выражения для частичной суммы $\tilde{s}_n(x_0)$ ряда (19) при $x = x_0$. Подставляя вместо

* Формально — потому, что мы ничего не знаем о сходимости написанных рядов.

коэффициентов a_0, a_1, b_1, ..., a_m, b_m, ... их интегральные выражения [см. (9)], найдем последовательно:

$$\tilde{s}_n(x_0) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,[-\sin mu \cos mx_0 + \cos mu \sin mx_0]\,du =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=1}^{n} \sin m(u - x_0)\,du.$$

Если сумму под знаком интеграла преобразовать по формуле

$$\sum_{m=1}^{n} \sin mt = \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t},$$

то выражение для $\tilde{s}_n(x_0)$ примет вид

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\cos \frac{1}{2}(u - x_0) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)(u - x_0)}{\sin \frac{1}{2}(u - x_0)}\,du.$$

Этот интеграл является аналогом интеграла Дирихле.

Переходя к промежутку $[x_0 - \pi,\ x_0 + \pi]$ и воспользовавшись подстановкой $u - x_0 = t$, как и в n° **681**, получим

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(t) \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}\,dt, \tag{20}$$

где для краткости положено

$$\psi(t) = f(x_0 + t) - f(x_0 - t). \tag{21}$$

Если предположить сходимость интеграла

$$\tilde{S}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\psi(t)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} t}\,dt, \tag{22}$$

хотя бы и не абсолютную, то можно написать:

$$\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(t) \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\,dt$$

и пытаться установить стремление к нулю последнего интеграла при $n \to +\infty$: тогда $\tilde{S}_0$ и окажется суммой ряда (19). Ограничимся

указанием достаточного условия для этого, построенного по типу признака Дини [684]:

Сопряженный ряд для ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к сумме $\tilde{S}_0$, если интеграл

$$\int_0^h \frac{|\psi(t)|}{t}\,dt \qquad (h>0)$$

существует.

Ввиду того что

$$\frac{\psi(t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}=\frac{\psi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t},$$

из сделанного предположения прежде всего вытекает даже абсолютная сходимость интеграла (22). Аналогично устанавливается абсолютная сходимость интеграла

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

а отсюда по основной лемме n° **682** следует, что $\tilde{s}_n(x_0)-\tilde{S}_0\to 0$, что и требовалось доказать.

Очевидно, достаточно сделать предположение о существовании порознь интегралов

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}\,dt$$

или более частное предположение о выполнении условия Липшица:

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leqslant Ct^\alpha \qquad (0<\alpha\leqslant 1).$$

Отметим, что все эти условия предполагают непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 или, по крайней мере, совпадение пределов $f(x_0\pm 0)$. Впрочем, можно и в общем случае доказать, что при наличии скачка функции $f(x)$ в рассматриваемой точке x_0, т. е. при условии

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)\gtrless 0,$$

сопряженный ряд (19) в этой точке заведомо расходится*, так что предположение о непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 оказывается необходимым. В этом усматривается любопытное расхождение в положении вещей по отношению к рядам (17) и (19): ведь для ряда Фурье (17) наличие скачка само по себе не служило препятствием к сходимости.

В более детальное исследование ряда, сопряженного с рядом Фурье, мы вдаваться не будем.

* А также, очевидно, расходится и интеграл (22).

697. Кратные ряды Фурье. Можно рассматривать ряды Фурье и для функций нескольких переменных. Чтобы дать об этом представление, достаточно ограничиться случаем функции двух переменных.

Пусть для всех вещественных значений x и y задана функция $f(x, y)$. Мы предположим ее имеющей период 2π как по x, так и по y, и интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) в квадрате

$$(Q) = [-\pi, \pi; -\pi, \pi].$$

Подражая разложению (10), напишем для нее двойной ряд

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n, m} e^{(nx+my)i}, \tag{23}$$

где коэффициенты $\gamma_{\nu, \mu}$ определяются формулами, аналогичными (13)

$$\gamma_{\nu, \mu} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) e^{-(\nu x + \mu y)i} \, dx \, dy.$$
$$(\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Это и есть *ряд Фурье функции $f(x, y)$ в комплексной форме.* Его коэффициенты могли бы быть получены обычным приемом, если, заменяя знак $\sim$ в написанном выше соотношении на $=$, умножить обе части «равенства» на $e^{-(nx+my)i}$ и проинтегрировать по квадрату (Q), выполняя для ряда это интегрирование почленно.

В вещественной форме ряд Фурье выглядит на этот раз довольно громоздко. Если в комплексном ряде объединить сопряженные члены, то получим:

$$f(x, y) \sim \sum_{n, m=0}^{\infty} [a_{n, m} \cos nx \cos my + b_{n, m} \cos nx \sin my + \\ + c_{n, m} \sin nx \cos my + d_{n, m} \sin nx \sin my], \tag{24}$$

где

$$a_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) \, dx \, dy,$$

$$a_{n, 0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) \cos nx \, dx \, dy; \quad a_{0, m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) \cos my \, dx \, dy;$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad\qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_{0, m} = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) \sin my \, dx \, dy;$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$c_{n, 0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y) \sin nx \, dx \, dy;$$
$$(n = 1, 2, 3 \ldots)$$

и, наконец, при $m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\left.\begin{aligned} a_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x, y)\cos nx\cos my\,dx\,dy,\\ b_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x, y)\cos nx\sin my\,dx\,dy,\\ c_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x, y)\sin nx\cos my\,dx\,dy,\\ d_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x, y)\sin nx\sin my\,dx\,dy.\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Впрочем, обычно ряд (24) пишут в виде

$$f(x, y)\sim\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda_{n,m}[a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my+$$
$$+c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my],\qquad(24\,^*)$$

разумея под множителем $\lambda_{n,m}$ четверть, если $n=m=0$, половину, если из значков $n,\ m$ лишь один равен нулю, и единицу, если ни один из них не нуль. Зато коэффициенты $a_{n,m},\ b_{n,m},\ c_{n,m},\ d_{n,m}$ все вычисляются по формулам (25).

Вопрос о сходимости ряда (24) [или (24 *)] решается путем исследования его частичной суммы $S_{n,m}(x_0,\ y_0)$, для которой можно получить интегральное выражение вроде интеграла Дирихле:

$$S_{n,m}(x_0, y_0)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(Q)} f(x_0+u, y_0+v)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{1}{2}u\,\sin\frac{1}{2}v}\,du\,dv.$$

Мы не будем этим заниматься. Заметим лишь, что функция $f(x,\ y)$ заведомо разлагается в точке $(x_0,\ y_0)$ в ряд Фурье, если выполнены условия: 1) частные производные f'_x и f'_y повсюду существуют и ограничены, 2) в окрестности данной точки существует вторая производная f''_{xy} (или f''_{yx}), которая к тому же в данной точке непрерывна.

§ 4. Характер сходимости рядов Фурье

698. Некоторые дополнения к основным леммам. Переходя к изучению самого характера сходимости рядов Фурье, мы остановимся сначала на достаточных условиях равномерной сходимости этих рядов.

Для этого нам, прежде всего, необходимо сделать дополнение к первой основной лемме п° **682.** Именно, вводя в рассмо-

тренные там интегралы различные параметры, мы будем интересоваться теперь вопросом о равномерном относительно этих параметров стремлении интегралов к нулю.

1°. *Пусть функция $g(t)$ определена и абсолютно интегрируема в промежутке $[A, B]$; тогда оба интеграла*

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt, \qquad \int_a^b g(t)\cos pt\,dt$$

при $p\to+\infty$ стремятся к нулю равномерно относительно переменных a и b, которые принимают произвольные значения в промежутке $[A, B]$.

Достаточно рассмотреть первый из интегралов. Ввиду равномерной непрерывности функций

$$\int_A^t |g(t)|\,dt$$

можно разбить по заданному $\varepsilon>0$ промежуток $[A, B]$ точками

$$A=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_i<\tau_{i+1}<\ldots<\tau_n=B$$

на столь мелкие части, чтобы было

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(t)|\,dt<\varepsilon \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Для интегралов вида

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} g(t)\sin pt\,dt, \tag{1}$$
$$(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

так как их конечное число можно установить общее $\Delta>0$, такое, что для $p>\Delta$ все они по абсолютной величине уже будут $<\varepsilon$. Но, как легко видеть, интеграл

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt,$$

каковы бы ни были a и b, разнится (при любом p) меньше, чем на 2ε, от одного из интегралов (1). Следовательно, при $p>\Delta$ он независимо от a и b по абсолютной величине будет $<3\varepsilon$, что и требовалось доказать.

2°. *Можно утверждать, далее, что и интегралы*

$$\int_a^b g(x\pm t)\sin pt\,dt, \qquad \int_a^b g(x\pm t)\cos pt\,dt$$

при $p \to +\infty$ *стремятся к нулю* *равномерно* *относительно параметров* a, b *и* x, *подчиненных лишь условиям*

$$A \leqslant x \pm a, \quad x \pm b \leqslant B.$$

Действительно, например, первый из них подстановкой

$$x \pm t = u$$

может быть представлен в виде

$$\int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \sin p(u-x)\, du =$$
$$= \cos px \int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \sin pu\, du - \sin px \int_{x \pm a}^{x \pm b} g(u) \cos pu\, du,$$

так что вопрос приводится к предыдущему случаю (1°).

3°. *Наконец, если ввести в подинтегральное выражение еще произвольный множитель* $\gamma(t)$ *с ограниченным изменением в* $[A, B]$, *то и интегралы*

$$\int_a^b g(x \pm t)\, \gamma(t) \sin pt\, dt, \quad \int_a^b g(x \pm t)\, \gamma(t) \cos pt\, dt$$

при $p \to +\infty$ *также стремятся к нулю* *равномерно*.

Так как $\gamma(t)$ представляется в виде разности двух монотонно возрастающих функций, то достаточно предположить самое $\gamma(t)$ возрастающей. В таком случае, по второй теореме о среднем [306]

$$\int_a^b g(x \pm t)\, \gamma(t) \sin pt\, dt =$$
$$= \gamma(a) \int_a^{\tau} g(x \pm t) \sin pt\, dt + \gamma(b) \int_{\tau}^{b} g(x \pm t) \cos pt\, dt$$
$$(a \leqslant \tau \leqslant b).$$

Ввиду ограниченности функции $\gamma(t)$, вопрос и здесь приводится к уже рассмотренному случаю (2°).

Перейдем теперь ко второй основной лемме [n° 685]; ее мы дополним лишь следующим замечанием:

4°. *Пусть функция* $g(t)$ *непрерывна и монотонно возрастает в промежутке* $[A, B]$, *содержащем* *внутри* *себя промежуток* $[a, b]$. *Тогда интеграл*

$$\int_0^h g(x \pm t) \frac{\sin pt}{t}\, dt$$

(где $0 < h \leqslant a - A$ и $B - b$) при $p \to +\infty$ стремится к пределу $\frac{\pi}{2} g(x)$ равномерно относительно x в промежутке $[a, b]$.

Проследим применительно к данному случаю доказательство, приведенное в n° 685. Первый из интегралов (13), n° 685, который сейчас напишется так:

$$g(x) \int_0^h \frac{\sin pt}{t}\, dt = g(x) \int_0^{ph} \frac{\sin z}{z}\, dz,$$

стремится к пределу $\frac{\pi}{2} g(x)$ равномерно относительно x в $[a, b]$ ввиду ограниченности $g(x)$. С другой стороны, равномерная непрерывность функции $g(x)$ в $[A, B]$ дает нам возможность по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать независимо от x, изменяющегося в пределах от a до b, число $\delta > 0$ так, чтобы было

$$|g(x \pm t) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant \delta.$$

Разбивая второй из интегралов (13) n° 685, как и там, на сумму $I_1 + I_2$, имеем оценку (14) независимо не только от p, но и от x. Наконец, I_2 стремится к нулю равномерно относительно x, в силу 3°. Отсюда в совокупности и вытекает требуемое заключение.

699. Признаки равномерной сходимости рядов Фурье. Теперь нетрудно уже установить удобные признаки, по которым можно было бы судить о равномерной сходимости ряда Фурье в некотором промежутке $[a, b]$ к самой функции $f(x)$. Эту функцию естественно прежде всего предположить непрерывной в названном промежутке [см. 431]. Сформулируем на первом месте видоизмененный

Признак Дини. *Ряд Фурье функции $f(x)$, непрерывной в промежутке $[a, b]$, сходится к ней равномерно в этом промежутке, если при некотором $h > 0$ для всех x из $[a, b]$ интеграл*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt \tag{2}$$

сходится, и к тому же равномерно, относительно x (при $t = 0$).

Напомним, что в этом случае

$$\varphi(t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)$$

и

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}\, dt. \tag{3}$$

По произвольно заданному $\varepsilon > 0$, в силу сделанного предположения, найдется такое не зависящее от x число $\delta > 0$, что для всех x из $[a, b]$

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt < \varepsilon.$$

Тогда интеграл (3) представится в виде суммы $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi$. При этом, очевидно, каково бы ни было n,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{\pi}t}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\, dt <$$

$$< \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt < \frac{\varepsilon}{2}\ *$$

для всех указанных значений x одновременно.

Обращаясь к интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\, dt, \tag{4}$$

мы видим, что интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi f(x\pm t)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt$$

стремятся при $n\to\infty$ к нулю равномерно относительно x в $[a, b]$, в силу пункта 3° предыдущего n°. То же справедливо и для интеграла

$$\frac{1}{\pi}f(x)\int_\delta^\pi \frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt,$$

ввиду ограниченности функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$. Таким образом, существует такой не зависящий от x номер N, что для $n > N$ и интеграл (3) по абсолютной величине станет $< \varepsilon$, каково бы ни было x из $[a, b]$. Этим все доказано.

---

* Мы воспользовались неравенством

$$\sin z > \frac{2}{\pi}z\left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда, в частности, вытекает

Признак Липшица. *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно в промежутке $[a, b]$, если в некотором более широком промежутке $[A, B]$ $(A < a < b < B)$ выполняется условие*

$$|f(x') - f(x)| \leqslant C|x' - x|^{\alpha},$$

где x, x' — любые принадлежащие $[A, B]$ точки, а C и α — положительные постоянные ($\alpha \leqslant 1$).

Действительно, если за h выбрать наименьшее из чисел $B - b$ и $a - A$, то интеграл (2) при всех x в $[a, b]$ мажорируется следующим сходящимся интегралом:

$$\int_0^h \frac{2C}{t^{1-\alpha}} \, dt.$$

Очевидно, условие Липшица (при $\alpha = 1$) выполняется, а следовательно, *равномерная сходимость к функции $f(x)$ осуществляется в промежутке $[a, b]$, если в более широком промежутке функция $f(x)$ имеет ограниченную производную $f'(x)$.*

Впрочем, это условие содержится как частный случай и в следующем:

Признак Дирихле — Жордана. *Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно в промежутке $[a, b]$, если в некотором более широком промежутке $[A, B]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение.*

Следуя рассуждениям в n° **686**, представим интеграл

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} \, dt$$

в виде суммы интегралов: $\frac{1}{\pi}\int_0^h + \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}$, выбирая положительное число h меньшим $a - A$ и $B - b$, независимо от значений x в $[a, b]$. Относительно второго из этих интегралов сразу ясно, что он при $n \to \infty$ стремится к 0 равномерно относительно x, в силу 3°. Из первого же интеграла, полагая

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} = \left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right] + \frac{1}{t},$$

мы прежде всего выделим часть

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)]\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

которая, также в силу 3°, равномерно стремится к нулю *.

Обратимся, наконец, к интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt.$$

Так как в промежутке $[A, B]$ функция $f(x)$ представляется в виде разности двух непрерывных возрастающих функций:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

то, применяя к каждой из них предложение 4°, убеждаемся, что этот интеграл стремится к пределу $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2f(x)=f(x)$ равномерно же. Этим и завершается доказательство.

В частности, *если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$, непрерывна в этом промежутке и имеет в нем ограниченное изменение, а также удовлетворяет условию*

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

то ее ряд Фурье во всем промежутке сходится к ней равномерно.

Для доказательства достаточно распространить функцию по закону периодичности, с периодом 2π, на всю числовую ось, а тогда за промежуток $[A, B]$ взять любой, содержащий внутри себя промежуток $[-\pi, \pi]$.

700. Поведение ряда Фурье вблизи точки разрыва; частный случай. Переходя к исследованию поведения ряда Фурье функции $f(x)$ вблизи точки разрыва этой функции, мы начнем с рассмотрения одного частного ряда, для которого интересующее нас явление выступает с наибольшей простотой и отчетливостью.

Мы знаем, что ряд

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=2\left\{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right\} \tag{5}$$

сходится к сумме

$$\sigma(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{если } 0<x<\pi,\\ 0, & \text{если } x=0, \pm\pi,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } -\pi<x<0\end{cases}$$

* См. сноску на стр. 447.

[см. 690, 4)]; в точке $x=0$ эта функция претерпевает скачок и справа, и слева:

$$\sigma(+0)-\sigma(0)=\frac{\pi}{2}, \quad \sigma(0)-\sigma(-0)=\frac{\pi}{2}.$$

Изучим поведение частичной суммы ряда

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.*$$

Ввиду ее нечетности достаточно рассматривать эту сумму лишь в промежутке $[0, \pi]$. Больше того, очевидное тождество

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}-x'\right)$$

показывает, что $\sigma_{2n-1}(x)$ симметрична относительно точки $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-x'\right);$$

это позволяет ограничить исследование промежутком $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Для суммы $\sigma_{2n-1}(x)$ легко получается выражение:

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\int_0^x[\cos u+\cos 3u+\ldots+\cos(2n-1)u]\,du=$$

$$=\int_0^x\frac{\sin 2nu}{\sin u}\,du \tag{6}$$

или, если положить $2nu=t$:

$$\sigma_{2n-1}(x)=\frac{1}{2n}\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt. \tag{7}$$

Последнее выражение можно написать в виде суммы

$$\sigma_{2n-1}(x)=\frac{1}{2n}\left\{\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\ldots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{k\pi}^{2nx}\right\}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt, \tag{8}$$

где $k=E\left(\frac{2nx}{\pi}\right)$. Полагая вообще для $i=0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{2n}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt=(-1)^i\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{\sin\frac{z+i\pi}{2n}}\,dz=(-1)^i v_i,$$

имеем, очевидно,

$$v_i>0 \text{ и } v_{i+1}<v_i. \tag{9}$$

---

* Очевидно, $\sigma_{2n}(x)=\sigma_{2n-1}(x)$.

Таким образом, окончательно:

$$\sigma_{2n-1}(x) = v_0 - v_1 + \ldots + (-1)^{k-1} v_{k-1} + (-1)^k \tilde{v}_k, \tag{8*}$$

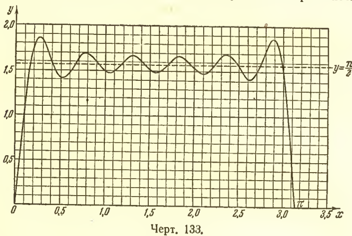
где через $(-1)^k \tilde{v}_k$ обозначено последнее, «неправильное», слагаемое; оно имеет знак $(-1)^k$, а по абсолютной величине меньше v_k.

Отсюда непосредственно вытекает ряд заключений о поведении суммы $\sigma_{2n-1}(x)$, если n фиксировано, а x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

1) *сумма* $\sigma_{2n-1}(x)$ *положительна, обращаясь в нуль лишь при* $x=0$;
2) *она имеет экстремумы в точках*

$$x_m = \frac{m\pi}{2n} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

именно *максимумы* *при m нечетных и* *минимумы* *при m четных.* Действительно, в промежутке $\left[m\frac{\pi}{2n}, \ (m+1)\frac{\pi}{2n}\right]$ функция $\sigma_{2n-1}(x)$, как явствует из (8*), возрастает при m четном и убывает при m нечетном*.



Черт. 133.

Наконец, из представления экстремального значения

$$\sigma_{2n-1}(x_m) = v_0 - v_1 + \ldots + (-1)^m v_m$$

с учетом неравенств (9) получается также, что

3) *при изменении x в пределах промежутка* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *максимальные значения* $\sigma_{2n-1}(x)$ *слева направо убывают, а минимальные — возрастают.*

Все эти утверждения иллюстрируются черт. 133, где для примера изображен график функции $\sigma_{11}(x)$.

Остановимся теперь на наибольшем максимуме функции $\sigma_{2n-1}(x)$, т. е. на первом ее максимуме, считая от $x=0$. Он принимается функцией в точке

$$x_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$$

* Утверждение 2) об экстремумах функции $\sigma_{2n-1}(x)$ легко получается и из рассмотрения производной

$$\frac{d}{dx}\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x} \text{ [см. (6)].}$$

и равен по величине [см. (7)]

$$M_1^{(n)} = \sigma_{2n-1}(x_1^{(n)}) = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt.$$

Здесь в обозначение введен номер n, ибо на этот раз мы намерены проследить за поведением функции именно при изменении n. Очевидно, $x_1^{(n)}$ монотонно убывает при возрастании n и стремится к 0 при $n \to +\infty$. Для облегчения исследования самой величины $M_1^{(n)}$ перепишем выражение для нее в следующем виде:

$$M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\frac{\frac{t}{2n}}{\sin\frac{t}{2n}}\,dt.$$

Так как второй множитель в подинтегральном выражении с возрастанием n равномерно (относительно t) и притом убывая* стремится к единице, то, очевидно, и $M_1^{(n)}$ убывая стремится к пределу:

$$\lim_{n\to+\infty} M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \mu_1. \qquad (10)$$

Итак, имеем:

4) *первый (наибольший) максимум функции $\sigma_{2n-1}(x)$ достигается при значении $x = x_1^{(n)}$, которое монотонно убывая стремится к нулю при безграничном возрастании n, а самый максимум $M_1^{(n)}$ при этом монотонно убывая стремится к пределу μ_1, выражаемому формулой* (10).

Аналогичное утверждение можно было бы сделать вообще относительно k-го (k фиксировано!) экстремума функции: *оно достигается при значении*

$$x_k^{(n)} = k\cdot\frac{\pi}{2n} \qquad (n \geqslant k),$$

которое стремится к 0 при $n \to \infty$, а величина $M_k^{(n)}$ k-го экстремума при этом монотонно стремится к пределу

$$\mu_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

а именно — убывая, если речь идет о максимуме (k — нечетное), и возрастая — в случае минимума (k — четное).

Для иллюстрации мы приводим черт. 134, где сопоставлены графики первых шести сумм $\sigma_{2n-1}(x)$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

---

* Мы используем здесь тот факт, что функция $\frac{z}{\sin z}$ при возрастании z от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и сама возрастает.

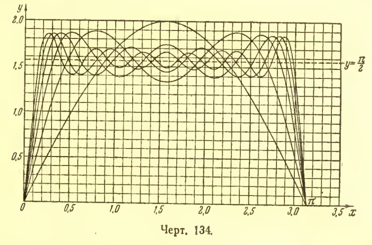
Числа μ_k, как явствует из рассуждений, проведенных в n° 439, попеременно то больше, то меньше числа

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Разности $\rho_k = \mu_k - \frac{\pi}{2}$ имеют следующие значения:

$$\rho_1 \doteq 0{,}281\,^*;\quad \rho_2 \doteq -0{,}153;\quad \rho_3 \doteq 0{,}104;$$
$$\rho_4 \doteq -0{,}073;\quad \rho_5 \doteq 0{,}063;\ \ldots \tag{11}$$

Теперь мы в состоянии уже достаточно полно охарактеризовать сходимость частичных сумм $\sigma_{2n-1}(x)$ ряда (5) к его сумме $\sigma(x)$; ограничимся для определенности промежутком $[0, \pi]$.



Черт. 134.

Если точки разрыва $x=0$ и $x=\pi$ выделить сколь угодно малыми окрестностями $[0, \delta)$ и $(\pi-\delta, \pi]$, то в остающемся промежутке $[\delta, \pi-\delta]$, в силу доказанного в предыдущем n°, ряд сходится р а в н о м е р н о. Иными словами, графики частичных сумм $\sigma_{2n-1}(x)$ при достаточно больших n сколь угодно тесно примыкают к прямой $y=\frac{\pi}{2}$ сразу на всем протяжении этого промежутка. Вблизи же точки $x=0$ (и $x=\pi$), где функция $\sigma(x)$ с к а ч к о м переходит от значения $\frac{\pi}{2}$ к значению 0, равномерность приближения естественно должна нарушиться, ибо $\sigma_{2n-1}(x)$ от близких к $\frac{\pi}{2}$ значений при $x=\delta$ (или $\pi-\delta$) н е п р е р ы в н ы м о б р а з о м переходят к значению 0 при $x=0$ (или π).

Весьма замечательно, однако, что н а р у ш е н и е р а в н о м е р н о с т и н е и с ч е р п ы в а е т с я т о л ь к о с к а з а н н ы м; к этому факту мы привлекаем внимание читателя. В непосредственной близости к оси y справа, прежде чем резко устремиться к начальной точке (0, 0), графики функций $\sigma_{2n-1}(x)$ колеб-

* Ср. 412, 4).

лются около прямой $y=\frac{\pi}{2}$, причем «амплитуды» этих колебаний вовсе не имеют тенденции бесконечно уменьшаться при $n \to \infty$. Наоборот, как мы видели, высота первого, и наиболее высокого, горба над упомянутой прямой стремится при этом к величине $\rho_1 = 0{,}281$; за первым горбом, передвигаясь справа налево с возрастанием n и сгущаясь к оси y, следуют дальнейшие впадины и горбы, причем расстояния их вершин от прямой $y=\frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$ стремятся, соответственно, к дальнейшим величинам $\rho_2, \rho_3, \dots$ и т. д. из ряда (11). Аналогичная картина имеет место вблизи прямой $x=\pi$ слева. Точно также вблизи оси y слева снова повторяется та же картина с тем лишь изменением, что все рассматриваемые величины получают обратные знаки.

Можно сказать, что «предельным геометрическим образом» при $n \to \infty$ для кривых $y=\sigma_{2n-1}(x)$ является не ломаная, изображенная на черт. 135, *а* (как естественно было бы ожидать!), а ломаная черт. 135, *б* с соответственно удлиненными — примерно на $0{,}281 : \frac{\pi}{2} = 18\%$ — вертикальными отрезками.

Черт. 135.

Этот своеобразный дефект сходимости впервые был в самом конце прошлого века отмечен, также на частном примере тригонометрического разложения, Гиббсом (J. W. Gibbs) и в связи с этим известен под названием *явление Гиббса*. Мы увидим сейчас, что это явление в некотором смысле имеет место и в общем случае.

701. Случай произвольной функции. Рассмотрим периодическую, с периодом 2π, абсолютно интегрируемую функцию $f(x)$, с изолированной точкой разрыва первого рода $x=x_0$. Тогда в некотором промежутке $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ $(\Delta>0)$ не будет других точек разрыва; для простоты предположим, что в этом промежутке функция имеет ограниченное изменение.

Введем теперь функцию $\sigma(x-x_0)$, которая отличается от изученной в предыдущем п° функции сдвигом вправо на x_0, и составим с ее помощью функцию

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}-\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\sigma(x-x_0).$$

Если условиться за значение $f(x_0)$ в точке разрыва $x=x_0$ принимать $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, то, как легко проверить:

$$\varphi(x_0+0)=\varphi(x_0-0)=\varphi(x_0)=0.$$

Функция $\varphi(x)$ в точке $x=x_0$ оказывается непрерывной: с помощью функции σ удалось компенсировать разрыв функции f! Функция φ будет непрерывна и в прочих точках промежутка $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$, если взять $\Delta<\pi$; кроме того, вместе с функциями f и σ функция φ также будет иметь в названном промежутке ограниченное изменение.

Теперь мы можем написать:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\sigma(x-x_0)+\varphi(x).$$

Заменив здесь каждую из функций $\sigma(x-x_0)$ и $\varphi(x)$ ее разложением в ряд

Фурье, мы получим, очевидно, и разложение заданной функции в ряд Фурье. Частичная сумма $s_m(x)$ последнего ряда представляется в виде:

$$s_m(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{\pi} \sigma_m(x - x_0) + \varphi_m(x).$$

Здесь, при $m = 2n - 1$ или $2n$,

$$\sigma_m(x - x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)(x-x_0)}{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} [\cos x_0 \sin(2k-1)x - \sin x_0 \cos(2k-1)x],$$

а $\varphi_m(x)$ означает соответствующую частичную сумму ряда для φ.

Так как $\varphi(x_0) = 0$ и функция $\varphi(x)$ в точке x_0 непрерывна, то при достаточно малом Δ все ее значения в промежутке $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ будут сколь угодно малы. В то же время в этом промежутке $\varphi_m(x)$ стремится к $\varphi(x)$ равномерно, следовательно, при достаточно большом m и значения $\varphi_m(x)$ будут сколь угодно малыми. Таким образом, поведение сумм $s_m(x)$ в основном определяется уже известным нам поведением сумм $\sigma_m(x - x_0)$; наличие слагаемого $\varphi_m(x)$ вносит в него лишь незначительные искажения, тем меньшие, чем ближе x к x_0 и чем больше m.

Если при нечетном $m = 2n - 1$ положить

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m+1},$$

а при четном $m = 2n$:

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m},$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = x_0.$$

Наряду с этим, если учесть (10),

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{\pi} \cdot \mu_1,$$

так как, очевидно, при $m \to \infty$

$$\varphi_m(\xi_m) = [\varphi_m(\xi_m) - \varphi(\xi_m)] + \varphi(\xi_m) \to 0.$$

Заменяя μ_1 на $\frac{\pi}{2} + \rho_1$ и вводя величину скачка $D = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, можно переписать полученный результат и так:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0+0) + \frac{D}{\pi} \rho_1. \tag{12}$$

Аналогично, полагая

$$\bar{\xi}_m = x_0 - \frac{\pi}{m+1} \quad \text{или} \quad x_0 - \frac{\pi}{m},$$

в зависимости от того, будет ли m нечетным или четным, получим:

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\bar{\xi}_m) = f(x_0-0) - \frac{D}{\pi} \rho_1. \tag{13}$$

Таким образом, и в рассматриваемом общем случае предельное значение колебания сумм $s_m(x)$ в окрестности точки разрыва x_0 оказывается больше самой величины $|D|$ скачка функции $f(x)$ на

$$\frac{2|D|}{\pi} \rho_1,$$

т. е. на те же 18% ее. И здесь также для получения предельного геометрического образа для графиков сумм $s_m(x)$ недостаточно к кривой $y = f(x)$ присоединить отрезок вертикальной прямой $x = x_0$, соединяющий точки с ординатами $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, но приходится этот отрезок соответственным образом удлинить и вверх и вниз. Можно сказать, что и для произвольной функции осуществляется явление Гиббса!

Замечание. Исследования, связанные с явлением Гиббса, приводят и к другим интересным результатам. Так, с их помощью могут быть установлены формулы, определяющие для функции $f(x)$ с ограниченным изменением ее односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и величину скачка в любой точке x_0 непосредственно по ее ряду Фурье. Для этой цели могут быть использованы, например, формулы (12) и (13): вычитая их почленно, найдем

$$D = \frac{\pi}{2\mu_1} \lim_{m \to \infty} [s_m(\xi_m) - s_m(\bar{\xi}_m)],$$

после чего уже легко определяется и $f(x_0 \pm 0)$. Различные формулы этого типа были установлены Фейером (L. Fejér).

702. Особенности рядов Фурье; предварительные замечания. Во всех признаках сходимости рядов Фурье, относящихся к непрерывным функциям, кроме самой непрерывности неизменно требовалось что-нибудь еще: то ли существование некоего интеграла, выполнение неравенства, наличие конечной производной, то ли ограниченность изменения функции, ее кусочная монотонность. Естественно возникает вопрос: не будет ли достаточно для сходимости ряда Фурье одной непрерывности породившей его функции? Еще в 1876 г. дю Буа-Реймонд (P. du Bois-Reymond) дал отрицательный ответ на этот вопрос, построив пример непрерывной функции с расходящимся в некоторых точках рядом Фурье.

Лебег (H. Lebesgue) в 1906 г. построил пример такой непрерывной функции, к которой ее ряд Фурье сходится повсюду, но не равномерно.

Мы хотим дать здесь примеры осуществления как «особенности дю Буа-Реймонда» так и «особенности Лебега», следуя при их построении по пути, указанному Фейером.

Элементами построения в обоих случаях служат конечные тригонометрические многочлены (m и n означают натуральные числа):

$$P_{m,n}(x) = \left[\frac{\cos mx}{n} + \frac{\cos(m+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(m+n-1)x}{1}\right] - \left[\frac{\cos(m+n+1)x}{1} + \ldots + \frac{\cos(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\cos(m+2n)x}{n}\right],$$

$$Q_{m,n}(x) = \left[\frac{\sin mx}{n} + \frac{\sin(m+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\sin(m+n-1)x}{1}\right] - \left[\frac{\sin(m+n+1)x}{1} + \ldots + \frac{\sin(m+2n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(m+2n)x}{n}\right].$$

Установим предварительно некоторые свойства этих многочленов.

1°. Прежде всего, существует такая постоянная M, что

$$|P_{m,n}(x)| \leqslant M \quad \text{и} \quad |Q_{m,n}(x)| \leqslant M, \tag{14}$$

каковы бы ни были значения переменной x и значков m и n.

Для доказательства этого преобразуем многочлены P и Q, объединяя в каждом члены с одинаковыми коэффициентами. Так, полагая в первом (при $\nu = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{\cos(m+n-\nu)x}{\nu} - \frac{\cos(m+n+\nu)x}{\nu} = 2\sin(m+n)x\frac{\sin\nu x}{\nu},$$

приведем его к виду:

$$P_{m,n}(x) = 2\sin(m+n)x\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}.$$

Аналогично

$$Q_{m,n}(x) = -2\cos(m+n)x\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}.$$

Так как множители при сумме, которая фигурирует здесь в обоих случаях, явно ограничены, то вопрос сводится к ограниченности самой суммы. Мы уже имели случай [690, 3)] представить ее в виде:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^x\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt + \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Второе слагаемое справа здесь ограничено ввиду равномерного стремления его к нулю при $n \to \infty$ [698, 1°], а третье — ввиду сходимости интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$. Отсюда и вытекает требуемое заключение.

2°. Иначе обстоит дело с частичными суммами многочленов P и Q (т. е. суммами любого числа последовательных членов их, начиная с первого). Если для многочлена $P_{m,n}(x)$ взять сумму первых n его членов, то при $x = 0$ она получит значение

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

растущее вместе с n до бесконечности [365, 1)]. Так как, очевидно,

$$\frac{1}{\nu} > \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} = \ln(\nu+1) - \ln \nu,$$

то для H_n получается известная оценка:

$$H_n > \ln n.$$

Частичные суммы многочлена $Q_{m,n}(x)$ при $x=0$ все обращаются в нуль. Однако если мы вычислим сумму первых n его членов в близкой к нулю (при больших m и n) точке $x = \frac{\pi}{2(m+n)}$, то найдем:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2(m+n)}\right).$$

Но по известному неравенству $\sin z > \frac{2}{\pi} z$ при $0 < z < \frac{\pi}{2}$, так что эта сумма оказывается большей, чем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{m+n}\right) = H_n - \frac{n}{m+n} > \ln n - 1,$$

и также бесконечно возрастает вместе с n. В этом, собственно, уже содержится как бы зародыш обеих особенностей — дю Буа-Реймонда и Лебега.

3°. Если же мы, взяв любое положительное число ε, ограничим изменение переменной x промежутком $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ *, то все частичные суммы обоих многочленов оказываются ограниченными (по абсолютной величине) одной и той же постоянной $L(\varepsilon)$, не зависящей от m и n. Достаточно доказать это относительно выражений вида

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\cos(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \quad \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\sin(p \pm \lambda)x}{\lambda}, \tag{15}$$

ибо, как легко видеть, упомянутые частичные суммы в общем случае представляют собой разности двух подобных выражений.

Остановимся для примера на выражении

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}$$

* Или — что не составляет разницы — промежутком от $2k\pi + \varepsilon$ до $2(k+1)\pi - \varepsilon$, где k — любое целое число.

и для его оценки воспользуемся леммой Абеля [383]. Множители $\frac{1}{\lambda}$ при возрастании значка λ убывают, оставаясь положительными. Что же касается множителей $\cos(p+\lambda)x$, то сумма любого числа их

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \cos(p+\lambda)x = \frac{\sin\left(p+\lambda_0+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

по абсолютной величине не превосходит постоянной $\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$. Отсюда заключаем, что и

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

То же справедливо и относительно других выражений (15). Таким образом, в качестве упомянутой границы $L(\varepsilon)$ можно взять постоянную $\frac{2}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$.

Все эти свойства будут использованы в следующем n°.

703. Построение особенностей. Возьмем теперь последовательность положительных чисел $\{a_k\}$, для которой ряд $\sum a_k$ сходится, и две бесконечно возрастающие последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ и построим два ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{m_k,n_k}(x) = \Phi(x) \tag{I}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k Q_{m_k,n_k}(x) = \Psi(x). \tag{II}$$

Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся, ибо ввиду (14) мажорируются сходящимся рядом $M\sum a_k$. Следовательно [431], функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ заведомо будут непрерывными.

Выбор чисел a_k, m_k и n_k мы подчиним следующим двум требованиям:

1) $m_{k+1} > m_k + 2n_k$ (для $k = 1, 2, 3, \ldots$),

2) $a_k \ln n_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Можно, например, положить

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad m_k = n_k = 2^{k^3}.$$

Ввиду 1) два различных тригонометрических многочлена $a_k P_{m_k, n_k}(x)$ или $a_k Q_{m_k, n_k}(x)$, входящих, соответственно, в ряд (I) или (II), не содержат членов с одинаковыми кратными x. Если теперь просто подряд написать все члены последовательных многочленов, входящих в (I) или (II), т. е. раскрыть все скобки, то получатся два тригонометрических ряда (один по косинусам, а второй по синусам), которые и будут рядами Фурье функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. В самом деле, если, например, умножить обе части равенства (I) на $\cos px$ и проинтегрировать от 0 до 2π, то ввиду равномерной сходимости ряда интегрирование в нем можно будет выполнить почленно. Затем, каждый интеграл

$$\int_0^{2\pi} a_k P_{m_k, n_k}(x) \cos px \, dx$$

заменится конечной суммой интегралов, причем все они будут нулями, кроме того случая, когда в состав $a_k P_{m_k, n_k}(x)$ входит $\cos px$. Таким путем мы и убедимся в том, что коэффициент при $\cos px$ будет коэффициентом Фурье.

Обратимся теперь к вопросу о сходимости этих рядов Фурье и ее характере. Если изменение x ограничить промежутком $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, то оба эти ряда сходятся и даже равномерно, наподобие рядов (I) и (II). Это видно из того, что любая частичная сумма, скажем ряда Фурье для функции $\Phi(x)$, отличается от некоторой частичной суммы

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k P_{m_k, n_k}(x)$$

ряда (I) на некоторую частичную сумму тригонометрического многочлена

$$a_s P_{m_s, n_s}(x),$$

которая в силу **702**, 3°, по абсолютной величине не превосходит $a_s L(\varepsilon)$ и при безграничном возрастании s равномерно стремится к нулю.

Ввиду произвольности ε, таким образом, сходимость рядов Фурье для функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ обеспечена при всех значениях x в $(0, 2\pi)$. При $x=0$ (или 2π) первый ряд, однако, уже расходится, и налицо — «особенность дю Буа-Реймонда»! Действительно, если

его m-ю частичную сумму вообще обозначить через $s_m(x)$, имеем

$$s_{m_k+n_k-1}(x) - s_{m_k-1}(x) = \\ = a_k\left[\frac{\cos m_k x}{n_k} + \ldots + \frac{\cos(m_k+n_k-1)x}{1}\right],$$

так что [см. **700**, 2°]

$$s_{m_k+n_k-1}(0) - s_{m_k-1}(0) = a_k H_{n_k} > a_k \ln n_k,$$

что, в связи с требованием 2), свидетельствует о нарушении основного условия сходимости ряда [**376**].

Что же касается ряда Фурье функции $\Psi(x)$, состоящего из одних синусов, то он, конечно, сходится и при $x=0$ (или 2π). Но на этот раз в окрестности точки $x=0$ сходимость не будет равномерной, и мы имеем здесь осуществление «особенности Лебега»! Чтобы убедиться в этом, обозначим вообще через $\bar{s}_m(x)$ его m-ю частичную сумму и вычислим разность

$$\bar{s}_{m_k+n_k-1}(x) - \bar{s}_{m_k-1}(x) = \\ = a_k\left[\frac{\sin m_k x}{n_k} + \ldots + \frac{\sin(m_k+n_k-1)x}{1}\right]$$

в точке $x = \frac{\pi}{2(m_k+n_k)}$; в силу **700**, 2°, она оказывается большей, чем

$$a_k(\ln n_k - 1),$$

и растет до бесконечности вместе с k.

Ценою некоторого усложнения построений удается определить такую непрерывную функцию $\Phi(x)$ с периодом 2π, что ее ряд Фурье имеет точки расходимости в любой части промежутка $[0, 2\pi]$.

До сих пор, однако, не решен вопрос, может ли ряд Фурье непрерывной функции быть всюду расходящимся. Правда, пример всюду расходящегося ряда Фурье был дан с помощью тонкого построения акад. А. Н. Колмогоровым, но его пример относится уже к функциям более сложной природы и притом использует более общее, чем обычное, определение понятия интеграла (принадлежащее Лебегу).

§ 5. Оценка остатка в зависимости от дифференциальных свойств функции

704. Связь между коэффициентами Фурье функции и ее производных. Рассмотрим функцию $f(x)$ с периодом 2π, имеющую производные до k-го порядка ($k \geqslant 1$) включительно. Первые $k-1$ из них, разумеется, будут непрерывными функциями; относительно k-й производной предположим покуда, что она (абсолютно) интегри-

руема. Обозначая по-прежнему через a_m, b_m коэффициенты Фурье функции $f(x)$, для производной $f^{(i)}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ коэффициенты Фурье мы будем обозначать через $a_m^{(i)}$, $b_m^{(i)}$.

Интегрируя по частям, найдем (для $m=1, 2, 3, \ldots$)

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = f(x)\frac{\sin mx}{m}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin mx\,dx,$$

так что

$$a_m = -\frac{b'_m}{m};$$

аналогично

$$b_m = \frac{a'_m}{m}.$$

Если полученные формулы применить к коэффициентам a'_m, b'_m и выражения последних через a''_m, b''_m подставить в формулы для a_m, b_m, то окажется, что

$$a_m = -\frac{a''_m}{m^2}, \quad b_m = -\frac{b''_m}{m^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы индуктивно установим окончательные формулы, в которых приходится различать случай четного и нечетного k:

$$\text{при } k=2h: \qquad a_m = (-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h\frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \tag{1а}$$

$$\text{при } k=2h+1: \qquad a_m = (-1)^{h+1}\frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m = (-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k}. \tag{1б}$$

Поставим себе задачей, пользуясь этими формулами, установить оценку для остатка ряда Фурье k-кратно дифференцируемой функции, при тех или иных условиях, налагаемых на k-ю производную. В начале предыдущего параграфа мы изучали вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье, т. е. о равномерном стремлении его остатка к нулю; здесь, правда, при более тяжелых предположениях, мы оказываемся в состоянии оценить даже быстроту этого стремления, установив порядок малости остатка в зависимости от дифференциальной природы функции.

705. Оценка частичной суммы в случае ограниченной функции. Предварительно мы дадим оценку для частичной суммы $s_n(x)$ ряда Фурье, равно как и для частичной суммы $\tilde{s}_n(x)$ сопряженного с ним ряда, предполагая функцию $f(x)$ только ограниченной:

$$|f(x)| \leqslant M;$$

под M здесь можно разуметь, например, точную верхнюю границу для $|f(x)|$.

По известной формуле [см. 681, (4)]

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Отсюда последовательно имеем:

$$|s_n(x)|\leqslant\frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt<M\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\,dt\,^{*}=$$

$$=M\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du<M\int_0^1 du+M\int_1^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{du}{u}=$$

$$=M\left[1+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]<M(\ln n+1+\ln 2\pi).$$

Если под A разуметь достаточно большую постоянную, то (при $n\geqslant 2$) последнее выражение в скобках окажется меньшим, чем $A\ln n$, так что окончательно получим

$$|s_n(x)|\leqslant AM\ln n\,^{**}\qquad(n\geqslant 2).\tag{2}$$

Переходя к сопряженному ряду, вспоминаем, что [696, (20)]

$$\tilde{s}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Поэтому

$$|\tilde{s}_n(x)|\leqslant\frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\cos\frac{1}{2}t-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$=\frac{4M}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{n}{2}t\cdot\sin\frac{n+1}{2}t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt<\frac{4M}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{n+1}{2}t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

---

* См. сноску на стр. 488.

** Например, можно взять

$$A=2+\frac{1+\ln\pi}{\ln 2}.$$

Но это, конечно, не есть наилучшее из возможных значений постоянной A.

Рассуждая далее, как и выше, придем к аналогичной оценке:

$$|\tilde{s}_n(x)| \leqslant AM \ln n \qquad (n \geqslant 2), \tag{3}$$

где A есть новая постоянная, вообще отличная от прежней, но подобно ей не зависящая от выбора функции $f(x)$. Впрочем, конечно, можно было бы в обоих случаях пользоваться одной и той же постоянной — наибольшей из двух.

Разность $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$ (это будет остатком ряда Фурье лишь в том случае, если он сходится к функции f) оценивается аналогично (2):

$$|R_n(x)| \leqslant AM \ln n \qquad (n \geqslant 2).$$

Действительно,

$$|R_n(x)| \leqslant |f(x)| + |s_n(x)| \leqslant M + AM \ln n,$$

так что стоит лишь надлежаще увеличить постоянную A, чтобы придти к требуемому неравенству.

Читателя не должен удивлять тот факт, что справа в неравенстве стоит величина, растущая до бесконечности вместе с n. Мы знаем ведь, что для некоторых ограниченных (и даже непрерывных, см. **703**) функций $f(x)$ величина $R_n(x)$, действительно, может бесконечно возрастать, а наше неравенство должно охватывать все ограниченные интегрируемые функции!

706. Оценка остатка в случае функции с ограниченной k-й производной. Обратимся теперь снова к рассмотрению функции $f(x)$ с периодом 2π, имеющей производные до k-го ($k \geqslant 1$) порядка включительно, причем на этот раз *предположим k-ю производную ограниченной:*

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M_k$$

и интегрируемой в собственном смысле.

Установим следующий важный результат, принадлежащий акад. С. Н. Бернштейну: *при сделанных предположениях существует абсолютная постоянная A такая, что* (для $n \geqslant 2$)

$$|R_n(x)| \leqslant AM_k \frac{\ln n}{n^k}. \tag{4}$$

При доказательстве мы будем различать случаи четного и нечетного k.

1°. Пусть $k = 2h$. Выражение для остатка ряда Фурье функции $f(x)$ *

$$R_n = R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

* При сделанных предположениях ряд Фурье будет повсюду сходиться к функции $f(x)$ [684].

если воспользоваться формулами (1а), может быть написано в виде:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (a_m^{(k)} \cos mx + b_m^{(k)} \sin mx).$$

В скобках имеем m-й член ряда Фурье функции $f^{(k)}(x)$; вводя частичную сумму $\sigma_m = \sigma_m(x)$ этого ряда, можем заменить названный член через $\sigma_m - \sigma_{m-1}$:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (\sigma_m - \sigma_{m-1}).$$

Раскрыв скобки и по-другому объединив члены [ср. 383], мы придем к ряду:

$$(-1)^h R_n = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k}\right) \sigma_m. \tag{5}$$

Для обоснования указанного преобразования заметим, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sigma_m}{m^k} = 0;$$

это следует из неравенства

$$|\sigma_m| \leqslant AM_k \ln m, \tag{6}$$

которое получится, если неравенство (2) применить к функции $f^{(k)}(x)$. Из (5) и (6) вытекает оценка:

$$\frac{|R_n|}{M_k} \leqslant \frac{A \ln n}{(n+1)^k} + A \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k}\right) \ln m.$$

Последнюю сумму снова преобразуем к виду [ср. 371]:

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} [\ln(m+1) - \ln m].$$

Если воспользоваться неравенствами

$$\ln(m+1) - \ln m = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m}$$

и

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

[см. **373**, а)], то последовательно получатся для нее оценки

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m\,(m+1)^k}<\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+$$

$$+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}<\frac{\ln n}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}<\frac{\ln n+2}{n^k}.$$

Возвращаясь к $|R_n|$, получаем для этой величины такую оценку:

$$|R_n|<M_k\cdot\frac{2A\ln n+2A}{n^k}\qquad (n\geqslant 2),$$

откуда, конечно, надлежаще изменив A, легко придти уже к (4).

2°. Теперь предположим $k=2h+1$. Опираясь на формулы (1б), перепишем R_n так:

$$R_n=(-1)^h\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^k}\left(a_m^{(k)}\sin mx-b_m^{(k)}\cos mx\right).$$

В выражении, стоящем в скобках, мы узнаем на этот раз m-й член ряда, сопряженного с рядом Фурье функции $f^{(k)}(x)$ [**670**]. Так как и для его частичной суммы $\tilde{\sigma}_m=\tilde{\sigma}_m(x)$ также имеем оценку

$$|\tilde{\sigma}_m|\leqslant AM_k\ln m$$

[см. (3)], то дальнейшие рассуждения ничем не разнятся от приведенных выше.

707. Случай функции, имеющей k-ю производную с ограниченным изменением. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$ с периодом 2π, которая сама имеет в промежутке $[-\pi,\pi]$ ограниченное изменение. Переходя к интегралам Стилтьеса и воспользовавшись формулой интегрирования по частям [**577**], представим коэффициент a_n функции $f(x)$ в виде:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\,(S)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\,\frac{\sin nx}{n}=$$

$$=f(x)\,\frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\,(S)\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,df(x). \qquad (7)$$

Внеинтегральный член исчезает, что же касается последнего интеграла, то, оценивая его обычным для интеграла Стилтьеса образом [**582**, 2°], получим:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,df(x)\right|\leqslant\max|\sin nx|\cdot\bigvee_{-\pi}^{\pi}f(x).$$

Таким образом, окончательно

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi} V \cdot \frac{1}{n},$$

если через V обозначить полное изменение функции $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$. Так же оценивается и коэффициент b_n.

Если две переменные величины α и β, зависящие, скажем, от одной и той же независимой переменной, обладают тем свойством, что их отношение остается ограниченным:

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leqslant M \qquad (M = \text{const.}),$$

то этот факт записывают следующим образом:

$$\beta = O(\alpha)\, ^*.$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем выразить доказанное свойство коэффициентов Фурье a_n, b_n функции с ограниченным изменением так:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пусть теперь для функции $f(x)$ с периодом 2π существует k-я ($k \geqslant 1$) производная $f^{(k)}(x)$, которая в промежутке $[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение; тогда для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ справедлива оценка:

$$|a_n|, \quad |b_n| \leqslant \frac{V_k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^{k+1}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где V_k есть полное изменение функции $f^{(k)}(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Это сразу вытекает из сопоставления, доказанного только что с формулами (1а) и (1б) n° **704**.

Итак, на этот раз

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \tag{8}$$

Зная порядок коэффициентов Фурье, теперь нетрудно уже оценить и остаток ряда Фурье: *при тех же предположениях, для остатка $R_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеем неравенство:*

$$|R_n(x)| < \frac{V_k}{n^k}.$$

---

* Ср. это обозначение с обозначением $o(\alpha)$, которое мы ввели в n° **60**.

Действительно,

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2V_k}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{2V_k}{k\pi} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{V_k}{n^k}.$$

Таким образом, несколько более тяжелое ограничение (по сравнению с предыдущим n°), которое мы наложили на k-ю производную функции, повлекло за собой улучшение оценки остатка $R_n(x)$: в числителе исчез $\ln n$!

Замечание. Подчеркнем еще раз, что в рассуждениях настоящего и предшествующего nn° существенную роль играла периодичность самой функции $f(x)$ и ее производных. Если первоначально функция была задана лишь в промежутке $[-\pi, \pi]$, то нужно потребовать выполнения условий:

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi), \ \ldots, \quad f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi),$$

разумея здесь под производными односторонние производные. Лишь тогда будут обеспечены непрерывность и существование последовательных производных для периодически продолженной функции, а вместе с тем и справедливость установленных выше оценок.

708. Влияние разрывов функции и её производных на порядок малости коэффициентов Фурье. Мы видели, что наличие у функции ряда непрерывных производных обеспечивает быстрое убывание коэффициентов Фурье и, как следствие, быструю сходимость ряда Фурье.

Однако в математической практике часто встречаются случаи, когда разложению в ряд Фурье подлежит функция, которая в пределах от $-\pi$ до π как бы «склеивается» из нескольких функций, имеющих каждая в своем промежутке определенное число производных. В точках «стыка», таким образом, создаются скачки как для самой функции, так и для ее последовательных производных. Эти разрывы понижают порядок малости коэффициентов Фурье, а вместе с этим, как легко понять, и порядок малости остатка ряда Фурье. Обратимся к детальному исследованию этого вопроса.

1°. Пусть функция $f(x)$ будет непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi)$, исключая «точки стыка»

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \tag{9}$$

в которых она имеет разрывы первого рода, т. е. претерпевает скачки

$$\delta_\mu^{(0)} = f(\xi_\mu + 0) - f(\xi_\mu - 0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

К их числу должна быть присоединена и точка $\xi_0 = -\pi$, если разность

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi+0) - f(\pi-0)$$

отлична от нуля, ибо в этой точке появится разрыв при периодическом продолжении функции.

Предположим, далее, что повсюду, исключая лишь указанные точки, существует конечная производная $f'(x)$, скажем, абсолютно интегрируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$. Для выражения коэффициента a_n функции $f(x)$ мы снова перейдем к интегралу Стилтьеса и проинтегрируем по частям [см. равенство (7)]. Если выделить в последнем интеграле слагаемые, отвечающие скачкам функции $f(x)$ [**579**, (15)], то получим

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(0)}\sin n\xi_\mu - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

или, короче,

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{b'_n}{n}, \tag{10}$$

где положено

$$A_n = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(0)}\sin n\xi_\mu, \tag{11}$$

а через b'_n, как и раньше, обозначен коэффициент Фурье для функции $f'(x)$. Аналогично можно установить, что

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{a'_n}{n}, \tag{12}$$

где

$$B_n = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}\delta_\mu^{(0)}\cos n\xi_\mu, \tag{13}$$

а a'_n также означает коэффициент Фурье для $f'(x)$.

Наложим теперь на производную $f'(x)$ требование, чтобы она имела ограниченное изменение в промежутке $[-\pi, \pi]$. Так как ее коэффициенты Фурье при этом предположении имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$ [**707**], то формулы (10) и (12) можно переписать и так:

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{14}$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{15}$$

Эти формулы с отчетливостью показывают, как наличие точек разрыва у функции, несмотря на существование производной во всех прочих точках, сразу понижает порядок малости коэффициентов Фурье.

Пусть теперь, наоборот, известно, что коэффициенты Фурье некоторой функции $f(x)$ имеют вид (14) и (15), причем величины A_n, B_n определяются формулами (11) и (13), где $\{\delta_\mu^{(0)}\}$ есть данный набор $m+1$ чисел. Тогда функция $f(x)$ необходимо имеет разрывы первого рода именно в точках (9) и претерпевает в них скачки, соответственно равные $\delta_\mu^{(0)}$ $(\mu=1, 2, \ldots, m)$; кроме того, для нее существуют пределы $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$*, и их разность равна $\delta_0^{(0)}$. В прочих же точках функция непрерывна.

Для того чтобы в этом убедиться, составим вспомогательную функцию $\bar{f}(x)$, например, из линейных в $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ функций так, чтобы она в указанных точках претерпевала как раз указанные скачки. Для ее коэффициентов Фурье имеем аналогично (14) и (15):

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где A_n и B_n имеют прежние значения. Тогда для разности $f(x)-\bar{f}(x)$ получится разложение вида

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx,$$

где

$$\alpha_n,\ \beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

т. е.

$$|\alpha_n|,\ |\beta_n|\leqslant\frac{K}{n^2} \qquad (K=\text{const.}).$$

Этот ряд, мажорируемый сходящимся рядом $2K\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходится повсюду равномерно. Отсюда уже ясно, что разность $f(x)-\bar{f}(x)$ представляет собой непрерывную функцию с периодом 2π и, следовательно, $f(x)$ имеет те же скачки и в тех же точках, что и $\bar{f}(x)$.

---

* Мы и здесь и впредь всегда подразумеваем, что

$$f(\xi_\mu)=\frac{1}{2}[f(\xi_\mu+0)+f(\xi_\mu-0)],$$

равно как

$$f(-\pi)=f(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],$$

так что все точки разрыва оказываются регулярными [см. 684].

2°. Теперь предположим сверх сказанного, что первая производная $f'(x)$ имеет предельные значения

$$f'(-\pi+0),\ f'(\xi_\mu \pm 0),\ f'(\pi-0)$$

и, кроме того, что повсюду (исключая «точки стыка») существует вторая производная $f''(x)$, которая к тому же в промежутке $[-\pi, \pi]$ имеет ограниченное изменение.

Используя уже доказанное, можно утверждать, что тогда

$$a'_n = \frac{A'_n}{n} - \frac{b''_n}{n} = \frac{A'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
$$b'_n = \frac{B'_n}{n} + \frac{a''_n}{n} = \frac{B'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

если через A'_n, B'_n обозначить аналогично (11) и (13) величины

$$A'_n = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(1)} \sin n\xi_\mu, \tag{16}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$B'_n = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m} \delta_\mu^{(1)} \cos n\xi_\mu, \tag{17}$$

где

$$\delta_\mu^{(1)} = f'(\xi_\mu + 0) - f'(\xi_\mu - 0)\ \ (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\delta_0^{(1)} = f'(-\pi+0) - f'(\pi-0).$$

Подставляя же эти выражения для a'_n и b'_n в формулы (10) и (12), окончательно получим для рассматриваемого случая:

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{18}$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{19}$$

И здесь также можно доказать в некотором смысле обратное утверждение. Пусть коэффициенты Фурье некоторой функции $f(x)$ имеют вид (18) и (19), причем величины A_n, B_n, A'_n, B'_n определяются формулами (11), (13), (16), (17) при данном наборе чисел $\{\delta_\mu^{(0)}\}$, $\{\delta_\mu^{(1)}\}$. Тогда про функцию $f(x)$ можно утверждать, что она непрерывна и имеет непрерывную производную $f'(x)$ повсюду в $(-\pi, \pi)$, исключая точки ξ_μ, где и функция и ее производная претерпевают скачки, соответственно равные $\delta_\mu^{(0)}$ и $\delta_\mu^{(1)}$; кроме того,

$$f(-\pi+0) - f(\pi-0) = \delta_0^{(0)}$$

и

$$f'(-\pi+0) - f'(\pi-0) = \delta_0^{(1)}$$

Доказательство, как и выше, осуществляется с помощью построения вспомогательной функции $\bar{f}(x)$, которую на этот раз можно составить из квадратичных функций так, чтобы она и ее производная имели именно указанные скачки в указанных же точках. Легко усмотреть, что разность $f(x)-\bar{f}(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье с коэффициентами порядка $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Тогда не только этот ряд, но и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, с коэффициентами порядка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, будут сходиться равномерно и, следовательно, разность $f(x)-\bar{f}(x)$ будет периодична (с периодом 2π) и непрерывна вместе со своей производной. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

3°. В общем случае пусть $f,\ f',\ \ldots,\ f^{(k-1)}$ непрерывны в $(-\pi,\ \pi)$, исключая точки $\xi_\mu\ (\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$, где все эти функции претерпевают скачки, соответственно равные

$$\delta_\mu^{(0)},\ \delta_\mu^{(1)},\ \ldots,\ \delta_\mu^{(k-1)} \qquad (\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Кроме того, предположим, что повсюду (исключая «точки стыка») существует производная $f^{(k)}$ и имеет в промежутке $[-\pi,\ \pi]$ ограниченное изменение. Введем обозначения:

$$A_n^{(i)}=-\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(i)}\sin n\xi_\mu,$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1;\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$B_n^{(i)}=\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}\delta_\mu^{(i)}\cos n\xi_\mu.$$

Тогда имеют место формулы (соответственно, при k нечетном и k четном):

$$a_n=\frac{A_n}{n}-\frac{B_n'}{n^2}-\frac{A_n''}{n^3}+\frac{B_n'''}{n^4}+\ldots\begin{cases}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k}+O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right),\\[2ex] +(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k}+O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right);\end{cases}\tag{20}$$

$$b_n=\frac{B_n}{n}+\frac{A_n'}{n^2}-\frac{B_n''}{n^3}-\frac{A_n'''}{n^4}+\ldots\begin{cases}+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k}+O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right),\\[2ex] +(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k}+O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right).\end{cases}\tag{21}$$

Если же известно, что имеют место подобные формулы, то отсюда, обратно, можно (как и выше) сделать заключение о точках разрыва и величине скачков самой функции и ее $k-1$ производных.

709. Случай функции, заданной в промежутке $[0, \pi]$. Как мы знаем, если функция $f(x)$ задана лишь от 0 до π, то при соблюдении надлежащих условий ее можно разлагать в этом промежутке как в ряд по косинусам

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty a_n \cos nx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi), \tag{22}$$

так и в ряд по синусам

$$f(x)=\sum_1^\infty b_n \sin nx \qquad (0<x<\pi) \tag{23}$$

[689]. Такого рода разложения чаще всего встречаются на практике. Результаты предыдущего n° могут быть приложены и к рассматриваемому случаю, если представить себе функцию $f(x)$ продолженной и на промежуток $[-\pi, 0)$ (а) четным образом — для получения ряда по косинусам или (б) нечетным образом — для получения ряда по синусам.

Пусть точками промежутка $(0, \pi)$, где функция $f(x)$ и ее производные до $(k-1)$-й включительно имеют скачки, будут

$$0<\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_m<\pi,$$

а сами величины скачков по-прежнему обозначены через

$$\delta_\mu^{(0)},\ \delta_\mu^{(1)},\ \ldots,\ \delta_\mu^{(k-1)} \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В случае продолжения функции четным образом скачки в точках ξ_μ воспроизводятся и в точках $-\xi_\mu$, но с обратными знаками, при продолжении же функции нечетным образом скачки воспроизводятся в точках $-\xi_\mu$ с сохранением знаков. Далее, для четной функции

$$f(+0)-f(-0)=0, \quad f(-\pi+0)-f(\pi-0)=0,$$

для нечетной же функции скачки

$$f(+0)-f(-0)=2f(+0),$$
$$f(-\pi+0)-f(\pi-0)=-2f(\pi-0)$$

вообще могут быть отличными от нуля. Наконец, отметим еще, что при дифференцировании четная функция переходит в нечетную, а нечетная — в четную. Если учесть все эти замечания, то для коэффициентов a_n и b_n разложения нашей функции, соответственно, по косинусам или

по синусам получатся формулы вида (20) и (21), но с такими значениями для $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$:

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(i)} \sin n\xi_\mu, \\ B_n^{(i)} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(i)} \cos n\xi_\mu + f^{(i)}(+0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi - 0) \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

В связи с этими формулами сделаем следующее важное замечание. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке $[0, \pi]$ вместе со своими производными до $(k-1)$-го порядка включительно; кроме того, пусть существует и k-я производная и имеет в этом промежутке ограниченное изменение. *Тем не менее, вообще говоря, нельзя утверждать относительно коэффициентов a_n и b_n разложений* (22) *и* (23), *что они будут порядка* $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$ [ср. 707 и формулы (8)!]. Действительно, хотя все суммы $A_n^{(i)}$ в этом случае будут нулями, этого нельзя сказать про суммы

$$B_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \{ f^{(i)}(0) - \cos n\pi \cdot f^{(i)}(\pi) \}.$$

Продолжение функции нечетным образом искусственно создает разрыв при $x = 0$ или нарушает периодичность у самой функции и ее производных четного порядка, а продолжение четным образом делает то же с производными нечетного порядка!

Поэтому, если требуется разложить упомянутую функцию $f(x)$ в промежутке $[0, \pi]$ в быстро сходящийся ряд, с полным использованием дифференциальных свойств функции, целесообразно продолжить ее на промежуток $[-\pi, 0]$ с помощью многочлена $(2k-1)$-й степени $r(x)$, определяемого из условий

$$r(0) = f(0), \quad r'(0) = f'(0), \ \ldots, \ r^{(k-1)}(0) = f^{(k-1)}(0),$$
$$r(-\pi) = f(\pi), \quad r'(-\pi) = f'(\pi), \ \ldots, \ r^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi).$$

[Построить такой многочлен можно, например, по способу, указанному в п° **257**.] Таким путем мы сохраним дифференциальные свойства функции для всего промежутка $[-\pi, \pi]$.

Пусть для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, скажем, $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Для того чтобы осуществить разложение этой функции с коэффициентами порядка $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, мы продолжим ее с помощью многочлена

$$r(x) = x - \frac{\pi}{2} + x^3\left[-\frac{12}{\pi^4}x^2 - \frac{30}{\pi^3}x - \frac{20}{\pi^2}\right] =$$
$$= -\frac{12}{\pi^4}x^5 - \frac{20}{\pi^3}x^4 - \frac{20}{\pi^2}x^3 + x - \frac{\pi}{2}.$$

Если для продолженной таким образом функции составить обычный ряд Фурье, то для функции $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ в промежутке $[0, \pi]$ и получится искомое быстро сходящееся разложение:

$$\frac{240}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2\nu-1)^4} - \frac{12}{\pi^2 (2\nu-1)^6} \right] \cos(2\nu-1)x + \frac{1440}{\pi^4} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^5} \sin 2\nu x.$$

Изложенный здесь прием указан А. С. Малиевым.

710. Метод выделения особенностей. Пусть функция $f(x)$ в промежутке $[0, \pi]$ задается рядом (22) по косинусам или рядом (23) по синусам углов, кратных x *, причем коэффициенты этих разложений имеют вид (20) или (21), где $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ определяются формулами (24). Ряды эти сходятся плохо, и мы знаем, что причиной тому служат разрывы самой функции и ее производных. Акад. А. Н. Крылов предложил для этого случая своеобразный *метод выделения особенностей*, благодаря чему достигается улучшение сходимости ряда.

Сущность этого метода, собственно говоря, уже содержится в предыдущем изложении. Она состоит в построении такой вспомогательной (кусочно-полиномиальной) функции $\overline{f}(x)$ с известным тригонометрическим разложением, которая как бы впитывает в себя все особенности данной функции $f(x)$, ясные из ее разложения. Вычитая из функции $f(x)$ эту вспомогательную функцию и соответственно этому из данного разложения — разложение вспомогательной функции, мы тем самым выделяем плохо сходящуюся часть данного разложения, так что остающийся ряд уже сходится быстро.

Проще всего, впрочем, этот результат получается, если научиться непосредственно суммировать, пользуясь уже известными разложениями, эти плохо сходящиеся части.

1°. Пусть задан ряд по косинусам (22), причем

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \sin n\xi_\mu. \tag{25}$$

Точки

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \pi$$

даны, равно как дан и набор чисел $\{c_\mu\}$. Установим непосредственно сумму ряда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx.$$

Простые преобразования приводят к результату:

$$g(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n} \right] = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi} \varphi_\mu(x),$$

* Часто встречающийся на практике случай, когда разложение производится в промежутке $[0, l]$ по косинусам или по синусам углов, кратных $\frac{\pi x}{l}$, получается из рассмотренного в тексте случая простой заменой x на $\frac{\pi x}{l}$.

причем сумму

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n}$$

легко вычислить, если вспомнить известное [690, 2)] разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n},$$

которое имеет сумму $\frac{\pi - z}{2}$ при $0 < z < 2\pi$ и, очевидно, $-\frac{\pi + z}{2}$ при $-2\pi < z < 0$. Таким образом,

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -\frac{\pi + x - \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = -\pi + \xi_\mu & \text{для } x < \xi_\mu, \\ \frac{\pi - x + \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = \xi_\mu & \text{для } x > \xi_\mu. \end{cases}$$

Отсюда $g(x) = \text{const.} = \gamma_\mu$ внутри каждого из промежутков $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$* и претерпевает в точках ξ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ скачки, в точности равные c_μ. Мы имеем, следовательно, $\gamma_\mu - \gamma_{\mu-1} = c_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, откуда

$$\gamma_\mu = \gamma_0 + \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_\lambda; \tag{26}$$

кроме того, так как $\varphi_\mu(0) = -\pi + \xi_\mu$, то

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}(-\pi + \xi_\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \xi_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu. \tag{27}$$

Таким образом, функция $g(x)$ вполне определена.

Пусть, например, имеем разложение:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} \cos nx.$$

Здесь

$$A_n = -\frac{2}{\pi} c_1 \sin n\frac{\pi}{2},$$

причем $c_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

---

* Для удобства мы полагаем $\xi_0 = 0$ и $\xi_{m+1} = \pi$.

или, непосредственно,

$$\gamma_0 = g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-1} = \frac{\pi}{4};$$

затем

$$\gamma_1 = \gamma_0 + c_1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Итак, окончательно, функция $g(x)$ равна $\frac{\pi}{4}$ при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и равна $-\frac{\pi}{4}$ при $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$.

2°. Рассмотрим теперь ряд по синусам (23), причем

$$b_n = \frac{B_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$B_n = \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \cos n\xi_\mu + c_0 - c_{m+1}\cos n\pi\right\}. \tag{28}$$

На этот раз зададимся целью непосредственно просуммировать ряд

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \sin nx.$$

Имеем:

$$h(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n}\right] +$$

$$+ \frac{2c_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{c_{m+1}}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+\pi)}{n} + \frac{\sin n(x-\pi)}{n}\right] =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}\varphi_\mu(x) + \frac{c_0}{\pi}(\pi - x) - \frac{c_{m+1}}{\pi}\varphi(x),$$

причем

$$\varphi(x) = \frac{\pi-(x+\pi)}{2} - \frac{\pi+(x-\pi)}{2} = -x \qquad \text{для всех } x;$$

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2} - \dfrac{\pi+(x-\xi_\mu)}{2} = -x & \text{для } x < \xi_\mu, \\ \dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2} + \dfrac{\pi-(x-\xi_\mu)}{2} = \pi - x & \text{для } x > \xi_\mu. \end{cases}$$

Очевидно,

$$h(+0) = c_0, \quad h(\pi - 0) = c_{m+1};$$

$$h(\xi_\mu + 0) - h(\xi_\mu - 0) = c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Вместе с тем повсюду (исключая точки разрыва) существует производная $h'(x) = \text{const.} = \gamma$, где

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\left(c_{m+1} - c_0 - \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu\right). \tag{29}$$

Функция $h(x)$ внутри каждого из промежутков $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ оказывается линейной функцией с коэффициентом γ при x:

$$h(x) = \gamma x + \delta_\mu \text{ при } x_\mu < x < x_{\mu+1}$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

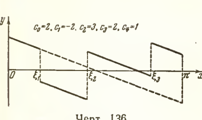
причем

$$\delta_0 = c_0,\ \delta_1 = c_0 + c_1, \ldots, \delta_m = c_0 + c_1 + \ldots + c_m. \tag{30}$$

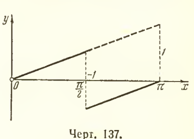
Легко выполнить построение графика функции $h(x)$ (черт. 136). Прямая, соединяющая точки

$$(0,\ c_0) \text{ и } \left(\pi, c_{m+1} - \sum_{1}^{m} c_\mu\right),$$

очевидно, будет иметь угловой коэффициент γ. Остальное построение ясно из чертежа.



Черт. 136.



Черт. 137.

Пусть, например,

$$h(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx,$$

так что

$$B_n = -\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2},\quad c_0 = c_2 = 0,\quad c_1 = -1,\quad \xi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{при } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{\pi}x - 1 = \frac{1}{\pi}(x - \pi) & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Воспользуемся этим результатом, чтобы улучшить сходимость ряда

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx. \tag{31}$$

Так как

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n^2-1)},$$

то в данном случае

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}-\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n(n^2-1)}.$$

Если из функции $f(x)$ вычесть только что найденную функцию $h(x)$, то для разности $f(x)-h(x)$ получится разложение

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin nx,$$

коэффициенты которого будут уже порядка $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$!

3°. Возвращаясь к ряду по косинусам (22), предположим теперь, что

$$a_n=\frac{A_n}{n}-\frac{B'_n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

где A_n выражается формулой (25), а B'_n получается из (28) заменой постоянных $c_0, c_1, \ldots, c_{m+1}$ другими постоянными $c'_0, c'_1, \ldots, c'_{m+1}$. Так как мы уже умеем [см. 1°] выделять часть тригонометрического ряда, зависящую от членов первого порядка, то обратимся к членам второго порядка.

Пусть (заменяя для упрощения обозначений B'_n через B_n)

$$g_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}\cos nx.$$

Очевидно, $g_1(x)$ есть непрерывная функция от x. Продифференцировав этот ряд почленно, получим новый ряд

$$g'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}\sin nx,$$

который мы уже умеем суммировать [2°]. Так как последний ряд равномерно сходится в любой замкнутой части промежутка $[0, \pi]$, не содержащей ни концов этого промежутка, ни точек разрыва *, то (исключая эти точки) его сумма действительно представляет производную функции $g_1(x)$. Итак, в силу 2°,

$$g'_1(x)=\gamma x+\delta_\mu \text{ для } \xi_\mu<x<\xi_{\mu+1}.$$
$$(\mu=0, 1, \ldots, m)$$

где γ и δ_μ определяются формулами (29) и (30). Интегрируя, находим (с учетом непрерывности!):

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\gamma x^2+\delta_\mu x+\varepsilon_\mu \quad \text{для } \xi_\mu\leqslant x\leqslant\xi_{\mu+1}.$$
$$(\mu=0, 1, \ldots, m)$$

---

* Это вытекает из известных свойств ряда $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$.

В точках деления $\xi_{\mu+1}$ значение функции $g_1(x)$ получается одновременно по двум формулам, так что

$$\frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2+\delta_\mu\xi_{\mu+1}+\varepsilon_\mu=\frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2+\delta_{\mu+1}\xi_{\mu+1}+\varepsilon_{\mu+1}.$$

Отсюда (если вспомнить, что $\delta_{\mu+1}=\delta_\mu+c_{\mu+1}$):

$$\varepsilon_{\mu+1}=\varepsilon_\mu-c_{\mu+1}\xi_{\mu+1}.$$

Если известно ε_0, то по этой формуле последовательно найдутся $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$. Что же касается ε_0, то оно определится равенством:

$$\varepsilon_0=g_1(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}.$$

Сумма этого ряда может быть найдена и в конечном виде, если вспомнить выражение B_n и воспользоваться известным [690, 9)] разложением:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\quad(0\leqslant x\leqslant 2\pi).$$

Например, если дано

$$g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\frac{\pi}{3}}{n^2}\cos nx,$$

то здесь

$$B_n=-1+\cos n\frac{\pi}{3},\quad c_0=-\frac{\pi}{2},\quad c_1=\frac{\pi}{2},\quad c_2=0,\quad \xi_1=\frac{\pi}{3},$$

$$\gamma=0,\quad \delta_0=-\frac{\pi}{2},\quad \delta_1=0.$$

Для определения

$$\varepsilon_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{3}}{n^2}$$

положим в упомянутом выше разложении сначала $x=0$, а затем $x=\frac{\pi}{3}$; в результате найдем $\varepsilon_0=\frac{5\pi^2}{36}$. Тогда $\varepsilon_1=\varepsilon_0-c_1\xi_1=-\frac{\pi^2}{36}$. Окончательно

$$g_1(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}x+\frac{5\pi^2}{36}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3},\\ -\frac{\pi^2}{36}, & \text{если } \frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

4°. Теперь в ряде по синусам (23) положим

$$b_n=\frac{B_n}{n}+\frac{A_n'}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

где B_n выражается по-прежнему формулой (28), а A_n' строится по образцу (25) — с заменой c на c'. И здесь достаточно ограничиться лишь членами второго порядка.

Рассмотрим же ряд (снова: A_n вместо A'_n)

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} \sin nx,$$

представляющий, очевидно, непрерывную функцию. Дифференцируем:

$$h'_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx = g(x)$$

[см. 1°]. Как и выше, легко убедиться, что (исключая концы промежутка и точки ξ_μ) $g(x)$ действительно будет производной от $h_1(x)$. В силу 1°,

$$h'_1(x) = \gamma_\mu \text{ для } \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

где γ_μ определяются формулами (26) и (27). Отсюда

$$h_1(x) = \gamma_\mu x + \delta_\mu \quad \text{для} \quad \xi_\mu \leqslant x \leqslant \xi_{\mu+1}.$$

При этом $\delta_0 = 0$ [так как $h_1(0) = 0$], а остальные δ_μ определятся последовательно из условия непрерывности функции $h_1(x)$ в точках $\xi_{\mu+1}$:

$$\gamma_\mu \xi_{\mu+1} + \delta_\mu = \gamma_{\mu+1} \xi_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

что дает

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu - c_{\mu+1} \xi_{\mu+1}.$$

Пусть, например, дан ряд

$$h_1(x) = \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \ldots,$$

который можно представить и в виде

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2} \sin nx.$$

Здесь

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

[ср. пример в 1°], так что

$$h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{4} x + \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}(\pi - x), & \text{если } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

5°. Можно было бы подобным же образом просуммировать и части тригонометрического ряда, связанные с членами более высокого порядка в разложении коэффициентов. Вместо создания общих схем практичнее в каждом данном конкретном случае проделывать то, что мы делали выше при рассмотрении рядов общего вида.

Вернемся для примера снова к ряду (31); полагая на этот раз

$$\frac{n}{n^2 - 1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2 - 1)},$$

представим b_n в виде

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^3} - \frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^3(n^2-1)},$$

в соответствии с чем функция $f(x)$ разобьется на три слагаемых. Первое из них, $h(x)$, есть функция, уже вычисленная в 2°. Рассмотрим второе слагаемое:

$$g(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx.$$

Дифференцируя дважды, найдем:

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\cos nx,$$

$$g''(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx.$$

Последняя функция только знаком отличается от $h(x)$:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\pi}(x-\pi), & \text{если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2 + \gamma_0 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2\pi}(x-\pi)^2 + \gamma_1 & \text{для } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Приравнивая два значения $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, получающиеся отсюда, установим, что $\gamma_1 = \gamma_0$. Значение же γ_0 легко определить, непосредственно полагая $x = 0$ в разложении $g'(x)$: $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$. Еще раз интегрируя и принимая во внимание, что $g(0) = g(2\pi) = 0$, найдем:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6\pi}x^3 + \gamma_0 x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6\pi}(x-\pi)^3 + \gamma_0(x-\pi) & \text{для } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi^{*}. \end{cases}$$

Таким образом, функция $g(x)$ определена вполне, и мы имеем окончательно

$$f(x) = h(x) + g(x) + \varphi(x),$$

---

* Приравнивая два получающиеся отсюда значения $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, снова находим, что $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$.

где функция $\varphi(x)$, хотя и неизвестна в конечном виде, но задается разложением

$$\varphi(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx,$$

коэффициенты которого будут уже порядка $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ и очень быстро убывают.

§ 6. Интеграл Фурье

711. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Мы хотим воспроизвести здесь в существенных чертах те замечательные по их прозрачности, хотя и лишенные строгости, соображения, которые привели Фурье к его интегральной формуле *.

Если функция $f(x)$ задана в конечном промежутке $[-l, l]$, то при определенных условиях, которые нас здесь не интересуют, ее можно представить в этом промежутке тригонометрическим рядом:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$

где

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}\,du,\quad (m=0,1,2,\ldots)\qquad b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}\,du\quad (m=1,2,\ldots)$$

[см. 688]. Подставляя вместо коэффициентов a_m и b_m их выражения, можно переписать ряд в виде

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)\,du. \tag{1}$$

Пусть теперь функция $f(x)$ будет определена во всем бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. В этом случае, каково бы ни было x, соответствующее значение $f(x)$ выразится разложением (1) при любом $l>|x|$. Переходя здесь к пределу при $l\to+\infty$, попытаемся установить «предельную форму» этого разложения.

Про первый член правой части равенства (1) естественно считать, что он стремится к нулю **. Обращаясь же к бесконечному ряду,

* Эта формула, независимо от Фурье, была получена Коши.

** Это становится очевидным, например, если предположить, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,du$ сходится.

мы можем рассматривать множители $\frac{m\pi}{l}$ под знаком косинуса как дискретные значения

$$z_1 = \frac{\pi}{l}, \quad z_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \ldots, \quad z_m = \frac{m\pi}{l}, \ldots$$

некоей переменной z, непрерывно меняющейся от 0 до $+\infty$; при этом приращение

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l},$$

очевидно, стремится к нулю при $l \to +\infty$. В этих обозначениях наш ряд перепишется так:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l}^{l} f(u) \cos z_m (u - x)\, du.$$

Он напоминает интегральную сумму для функции

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z (u - x)\, du$$

от z в промежутке $[0, +\infty]$. Переходя к пределу при $l \to +\infty$, вместо ряда получим интеграл; таким путем и приходим к интегральной формуле Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z (u - x)\, du.$$

Можно представить эту формулу, раскрывая выражение косинуса разности, и в виде

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx]\, dz,$$

где

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu\, du, \quad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu\, du.$$

Здесь ясно обнаруживается аналогия с тригонометрическим разложением: лишь параметр m, пробегающий ряд натуральных значений, заменен здесь непрерывно изменяющимся параметром z, а бесконечный ряд — интегралом. Коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ также по своей структуре напоминают коэффициенты Фурье.

Конечно, все эти соображения имеют характер лишь наведения; действительные условия справедливости формулы Фурье еще

подлежат выяснению. Но и при проведении строгих рассуждений мы будем следовать основным этапам рассуждений, связанных с рядами Фурье.

712. Предварительные замечания. *Относительно функции $f(x)$ предположим теперь, что она абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке* $(-\infty, +\infty)$. В этом предположении рассмотрим интеграл

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du,$$

где A есть произвольное конечное положительное число, а x_0 — любое фиксированное значение x. Этот интеграл представляет аналог частичной суммы ряда Фурье: из него интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \tag{2}$$

получается в пределе при $A\to+\infty$.

Так как функция $f(x)$ и при любом конечном $B>0$ также абсолютно интегрируема в промежутке $[-B, B]$, то по теореме IV* n° **497** будем иметь:

$$\int_{0}^{A} dz \int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)\,du=\int_{-B}^{B} f(u)\,du\int_{0}^{A}\cos z(u-x_0)\,dz=$$
$$=\int_{-B}^{B} f(u)\,\frac{\sin z(u-x_0)}{u-x_0}\,du. \tag{3}$$

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \tag{4}$$

мажорируется сходящимся по предположению интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du$$

и, следовательно, сходится равномерно относительно z (как при $u=+\infty$, так и при $u=-\infty$) для любого промежутка его значений. Таким образом, интеграл $\int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)\,du$ при $B\to+\infty$ стремится к своему пределу (4) равномерно. Поэтому, переходя в равенстве (3) к пределу при $B\to+\infty$, в интеграле

слева предельный переход можно выполнить под знаком интеграла [теорема I n° 493] *. Отсюда для $J(A)$ получается выражение в виде интеграла

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}\,du,$$

напоминающего интеграл Дирихле [681] и в действительности играющего такую же точно роль. Элементарным преобразованием его легко привести к виду

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt. \tag{5}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее очевидное дополнение к основной лемме n° 681:

Если функция $g(t)$ абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке $[a,+\infty]$, то

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\sin pt\,dt=0$$

(равно как и

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} g(t)\cos pt\,dt=0).$$

Доказательство можно скопировать с доказательства самой леммы n° 681 (для случая, когда функция $f(x)$ имеет особую точку).

713. Достаточные признаки. Умножив обе части равенства

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt \qquad (A>0)$$

на постоянное число S_0 — предполагаемое значение интеграла (2), вычтем результат почленно из равенства (5). Мы получим

$$J(A)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}\,dt, \tag{6}$$

* Ср. теорему IV n° 508, где подинтегральную функцию мы предполагали непрерывной. Здесь мы такого предположения не делаем.

если, как и в n° **683**, положить для краткости

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0.$$

И здесь мы ограничимся случаями, когда (а) функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, либо (б) имеет в этой точке с обеих сторон разве лишь разрывы первого рода. При этом мы полагаем:

$$\text{в случае (а)} \quad S_0=f(x_0),$$

$$\text{в случае (б)} \quad S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

В этом предположении имеем теперь

Признак Дини. *Интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится и имеет значение S_0, если при некотором $h>0$ сходится интеграл*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt.$$

Представим интеграл (6) в виде суммы интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}=\frac{1}{\pi}\int_0^h+\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}.$$

Первый из них при $A\to+\infty$ стремится к нулю — в силу основной леммы n° **682**. Что же касается второго, то, подставляя вместо $\varphi(t)$ его выражение, разобьем этот интеграл в свою очередь на два слагаемых:

$$\frac{1}{\pi}\int_h^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt-\frac{2}{\pi}S_0\int_h^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt.$$

Ввиду предположенной абсолютной интегрируемости функции f будет абсолютно интегрируемой и функция

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t},$$

а тогда первое слагаемое при $A\to+\infty$ стремится к нулю уже в силу того дополнения к основной лемме, которое сделано в конце предыдущего n°. Наконец, стремление к нулю интеграла

$$\int_h^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt=\int_{Ah}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

непосредственно очевидно по самому определению несобственного интеграла.

Отсюда, как и в n° **684**, могут быть получены более простые частные признаки. Упомянем для примера, что достаточным является существование для функции $f(x)$ в точке x_0 конечной производной или, по крайней мере, конечных односторонних производных.

К интегралу Фурье приложим также и

Признак Дирихле-Жордана. *Интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится и имеет значение S_0, если в некотором промежутке $[x_0-h,\ x_0+h]$ с центром в этой точке функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение.*

Если интеграл

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt$$

представить в виде суммы интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h+\frac{1}{\pi}\int_h^\infty,$$

то про второй из них мы только что установили, что он при $A\to\infty$ стремится к нулю. Первый же стремится к

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=S_0$$

— на этот раз на основании леммы n° **685**. Действительно, функция $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ в промежутке $[0,\ h]$ значений t имеет ограниченное изменение и, следовательно, представляется в виде разности двух возрастающих функций, к каждой из которых в отдельности лемма приложима.

714. Видоизменение основного предположения. В основе наших рассуждений до сих пор лежало предположение, сделанное в начале n° **712**, что *функция $f(x)$ абсолютно интегрируема во всем бесконечном промежутке от $-\infty$ до $+\infty$.* Затем уже, налагая дополнительно различные условия на поведение функции в непосредственной окрестности интересующей нас точки x_0, мы и получили те или иные достаточные признаки представимости функции в этой точке интегралом Фурье.

На практике, однако, указанное выше основное предположение иной раз представляется стеснительным, и мы сохраним лишь допущение, что

1°. *Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном промежутке,*

а условие на бесконечности заменим следующим:

2°. *Для $|x|\geqslant H$ функция $f(x)$ монотонна* и притом*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0. \tag{7}$$

* Точнее говоря, она монотонна для $x\geqslant H$ и для $x\leqslant -H$ по отдельности.

Вспомним, что в рассуждениях n° 712 существенную роль играла равномерная относительно z сходимость при $u=+\infty$ и при $u=-\infty$ интеграла (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z (u-x_0)\, du.$$

Так как для $z \geqslant a > 0$

$$\left| \int_H^u \cos z (u-x_0)\, du \right| \leqslant \frac{2}{z} \leqslant \frac{2}{a},$$

то по признаку 2° n° 515 мы и сейчас можем заключить о равномерной относительно z сходимости этого интеграла, но, как видим, на этот раз лишь для значений $z \geqslant a$, где a — любое, но фиксированное положительное число. Это вынуждает нас ввести в рассмотрение вместо $J(A)$ интеграл

$$J(A, a) = \frac{1}{\pi} \int_a^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z (u-x_0)\, du \qquad (A > a > 0),$$

из которого интеграл Фурье получается при двойном предельном переходе: при $A \to +\infty$ и $a \to 0$. Для интеграла $J(A, a)$ уже можно получить совершенно так же, как это сделано в n° 712, выражение

$$J(A, a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin At}{t}\, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t}\, dt, \tag{8}$$

так что

$$J(A, a) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \frac{\sin At}{t}\, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t}\, dt. \tag{9}$$

Докажем прежде всего, что

$$\lim_{a \to 0} \int_0^\infty [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin at}{t}\, dt = 0. \tag{10}$$

Представим наш интеграл в виде

$$\int_0^\Delta + \int_\Delta^\infty,$$

где Δ во всяком случае предположено столь большим, чтобы было $x_0-\Delta < -H$, $x_0+\Delta > H$. Сразу ясно, что

$$\left|\int_0^\Delta\right| \leqslant a\int_0^\Delta [\,|f(x_0+t)|+|f(x_0-t)|\,]\,dt,$$

так что при $a\to 0$ этот интеграл стремится к 0, каково бы ни было Δ.

Обращаясь ко второму интегралу, имеем по второй теореме о среднем значении [487], с учетом соотношения (7),

$$\int_\Delta^\infty f(x_0\pm t)\frac{\sin at}{t}\,dt = f(x_0\pm\Delta)\int_\Delta^{\Delta'}\frac{\sin at}{t}\,dt =$$

$$= f(x_0\pm\Delta)\int_{a\Delta}^{a\Delta'}\frac{\sin z}{z}\,dz \qquad (\Delta' > \Delta).$$

Так как второй множитель здесь есть ограниченная величина (мы не раз об этом упоминали), а первый ввиду (7) может быть сделан сколь угодно малым за счет Δ, то это же справедливо и относительно всего выражения. Соотношение (10), таким образом, установлено, и поведение выражений (8) или (9), как и раньше, оказывается зависящим лишь от интеграла, содержащего A.

Мы выше доказывали предельное равенство

$$\lim_{A\to+\infty}\int_h^\infty [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt = 0$$

(где h — некоторое фиксированное положительное число), опираясь на абсолютную интегрируемость функции f в б е с к о н е ч н о м промежутке. Это же можно установить и пользуясь нашими новыми предположениями. В самом деле, считая $\Delta > h$, имеем:

$$\int_h^\infty = \int_h^\Delta + \int_\Delta^\infty.$$

Второй из интегралов справа можно трактовать так же, как и аналогичный интеграл, содержащий параметр a; первый же интеграл при $A\to+\infty$ стремится к 0 по основной лемме n° 682.

Теперь уже ясно, что *признаки Д и н и и Д и р и х л е — Ж о р д а н а* [713] *остаются в силе и при новых предположениях относительно функции* $f(x)$.

Из всего сказанного выше, в частности, вытекает такое условие приложимости формулы Ф у р ь е: *если функция* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение во всем б е с к о н е ч н о м промежутке* $[-\infty, +\infty]$ *и, сверх того, выполняется предельное равенство* (7), *то в каждой точке* x_0 *интеграл Ф у р ь е сходится и имеет значение* S_0.

Действительно, при сделанных предположениях функцию $f(x)$ можно представить в виде разности двух о г р а н и ч е н н ы х возрастающих функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ р а в н ы е [в силу (7)] пределы

$$f_1(+\infty)=f_2(+\infty)=c', \qquad f_1(-\infty)=f_2(-\infty)=c''.$$

Введем теперь взамен f_1 и f_2 функции

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} f_1(x)-c' & \text{для } x\geqslant 0, \\ f_1(x)-c'' & \text{для } x<0, \end{cases} \qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} f_2(x)-c' & \text{для } x\geqslant 0, \\ f_2(x)-c'' & \text{для } x<0. \end{cases}$$

Тогда по-прежнему

$$f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x),$$

но на этот раз

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_1(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_2(x)=0,$$

так что для каждой из функций φ_1, φ_2 выполнены условия 1) и 2); кроме того, в любой точке к ним применим, очевидно, признак Дирихле — Жордана.

715. Различные виды формулы Фурье. Предполагая выполненными достаточные условия применимости формулы Фурье, будем считать для простоты, что в рассматриваемой точке x функция $f(x)$ непрерывна или, если разрывна, то удовлетворяет условию

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

т. е. что рассматриваемая точка является регулярной [684]. Тогда во всяком случае имеем:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du. \tag{11}$$

Ввиду того, что внутренний интеграл явно представляет собой четную функцию от z, эту формулу можно переписать и так:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du. \tag{12}$$

Легко показать далее, что при сделанных в n° 712 [или n° 714] общих предположениях относительно функции $f(x)$ существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)\,du.$$

Этот интеграл, к тому же, является непрерывной функцией от z* и, очевидно, нечетной. Хотя нельзя ручаться за существование для этой функции несобственного интеграла от $-\infty$ до $+\infty$, но он наверное

* Если в основу положены предположения n° 714, то исключение может представиться лишь при $z=0$.

существует в смысле главного значения [484], причем

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x)\, du = 0.$$

Умножая это равенство на $\frac{i}{2\pi}$ и складывая с (12), придем к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iz(u-x)}\, du, \qquad (13)$$

где наружный интеграл понимается в смысле главного значения. В этом виде формула была впервые представлена Коши.

Возвращаясь к формуле (11), напишем ее в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu\, du + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu\, du.$$

Если $f(u)$ есть четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu\, du = 2 \int_{0}^{\infty} f(u) \cos zu\, du, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu\, du = 0,$$

и мы получим упрощенную формулу, содержащую лишь косинусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u) \cos zu\, du. \qquad (14)$$

Аналогично, в случае нечетной функции $f(x)$ мы приходим к формуле, содержащей лишь синусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u) \sin zu\, du. \qquad (15)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяет в этом промежутке условиям, аналогичным тем, которые раньше были поставлены по отношению ко всему промежутку $(-\infty, +\infty)$. Тогда, распространяя функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ с помощью равенств $(x > 0)$:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{или} \quad f(-x) = -f(x),$$

мы получим в первом случае четную, а во втором — нечетную функцию в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Для положительных значений x (при соблюдении соответствующих достаточных условий) мы можем, таким образом, пользоваться как формулой (14), так и формулой (15).

Если в точке $x=0$ предположить функцию $f(x)$ непрерывной, то формула (14) и в этой точке приложима, ибо и продолженная четным образом функция сохранит здесь непрерывность. Формула же (15) вообще в точке $x=0$ неприложима: она воспроизводит значение $f(0)$ лишь в том случае, если это значение есть нуль.

Эти соображения вполне аналогичны сказанному в n° 689 о рядах Фурье.

716. Преобразование Фурье. Предположим, что формула Фурье (12) имеет место для всех значений x в промежутке $(-\infty, +\infty)$ — за возможными исключениями в конечном числе точек. Эту формулу можно себе представить, как суперпозицию таких двух формул:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,e^{-ixz}\,dz^{*}. \quad (16)$$

Функция $F(z)$, сопоставляемая по первой формуле функции $f(x)$, называется ее преобразованием Фурье. В свою очередь, по второй формуле функция $f(x)$ является (обратным) преобразованием Фурье (разница в знаке при i!) для функции $F(x)$. Заметим, что функция F будет, вообще говоря, комплексной даже при вещественной f; впрочем, можно было бы здесь и исходную функцию f предположить комплексной.

Равенство

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,e^{-ixz}\,dz,$$

где функция $f(x)$ дана, можно рассматривать, как *интегральное уравнение* относительно неизвестной функции $F(z)$, стоящей под знаком интеграла. Решение уравнения доставляется формулой

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du.$$

Естественно, эти равенства можно и поменять ролями.

Обратимся теперь к формуле (14); если она выполняется для всех положительных значений x с теми же исключениями, что и

* Последний интеграл, если сделаны лишь те предположения относительно $f(x)$, о которых была речь выше, понимается в смысле главного значения.

выше, то ее можно представить, как суперпозицию двух — на этот раз вещественных и совершенно симметричных! — формул

$$\left.\begin{aligned} F_c(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\cos zu\,du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\cos xz\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Аналогично и формула (15) может быть разложена на две:

$$\left.\begin{aligned} F_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(u)\sin zu\,du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(z)\sin xz\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Функции $F_c(z)$ и $F_s(z)$ называются, соответственно, косинус-преобразованием или синус-преобразованием Фурье для функции $f(x)$. Как видим, функция f по F_c (или F_s) получается совершенно так же, как и $F_c(F_s)$ по f. Иными словами, функции f и $F_c(F_s)$ взаимно являются косинус-(синус-)преобразованиями. Коши назвал пары функций f и F_c или f и F_s, соответственно, сопряженными функциями первого и второго рода. И здесь также каждое из равенств (17) [или (18)] можно рассматривать как *интегральное уравнение*, в котором функция вне интеграла дана, а функция под знаком интеграла разыскивается; решение дается другим равенством.

Сопоставляя функции F, F_c и F_s, можно сказать следующее. В случае четной функции $f(x)$ имеем

$$F(z) = F_c(z)$$

(на значения $z < 0$ функция $F_c(z)$ распространяется четным образом), а в случае нечетной $f(x)$:

$$F(z) = iF_s(z)$$

(на значения $z < 0$ функция $F_s(z)$ распространяется нечетным образом). В общем случае функция $f(x)$ разлагается на сумму четной и нечетной функций:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Тогда

$$F(z) = G_c(z) + iH_s(z)\,^*.$$

* $G_c(z)$ обозначает косинус-преобразование для функции $g(x)$, а $H_s(z)$ — синус-преобразование для функции $h(x)$.

В связи с этим обстоятельством достаточно ограничиться **примерами** косинус- и синус-преобразований.

1) Пусть функция $f(x)=e^{-ax}$ $(a>0,\ x\geqslant 0)$; тогда ее косинус-преобразованием будет функция

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-az}\cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2},$$

а синус-преобразованием — функция

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-az}\sin zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{a^2+x^2}.$$

Так как e^{-ax} интегрируема в промежутке $[0,+\infty]$, то должны иметь место и взаимные соотношения:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+z^2}\,dz=e^{-ax}\qquad (x\geqslant 0)$$

и

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\sin zx}{a^2+z^2}\,dz=e^{-ax}\qquad (x>0),$$

или

$$\int_0^\infty \frac{\cos xz}{a^2+z^2}\,dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ax},\quad \int_0^\infty \frac{z\sin xz}{a^2+z^2}\,dz=\frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

Мы узнаем в этих интегралах известные уже нам интегралы **Лапласа** [522, 4°].

Таким образом, в лице пар функций

$$e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}\qquad\text{и}\qquad e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{a^2+x^2}$$

мы имеем здесь примеры **сопряженных функций** первого и второго рода (по **Коши**). Если бы интегралы **Лапласа** нам не были известны, то изложенная теория открыла бы путь к их вычислению.

2) Рассмотрим теперь функцию, определенную равенствами

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{для } 0\leqslant x<a,\\ \frac{1}{2} & \text{для } x=a,\\ 0 & \text{для } x>a\end{cases}\qquad (a>0).$$

В этом случае

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ax}{x}.$$

Если, желая и на этом примере проверить формулу **Фурье**, мы найдем косинус-преобразование для полученной функции, то придем к «разрывному

множителю» Дирихле [497, 9)]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\cos zx\,dz,$$

значение которого действительно совпадает с исходной функцией $f(x)$! Аналогично

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos ax}{x}$$

и т. д.

Многочисленные примеры преобразований Фурье читатель найдет в n° 718.

717. Некоторые свойства преобразований Фурье. Представляет интерес изучение свойств преобразования Фурье $F(x)$ функции $f(x)$, исходя из тех или иных предположений относительно этой последней.

Прежде всего, *если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[-\infty, +\infty]$, то функция*

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{ixu}\,du \tag{19}$$

непрерывна во всем этом промежутке и стремится к нулю при $x\to\pm\infty$.

Непрерывность следует из того, что написанный интеграл равномерно сходится при $u=\pm\infty$ относительно x, ибо мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du,$$

не содержащим параметра x. Доказательство копируется с доказательств теорем 1 n° **518** и 2 n° **520** с ссылкой на теорему 1* n° **510** (вместо теоремы 1 n° **506**). Что же касается поведения функции F на бесконечности, то оно устанавливается на основании заключительного замечания n° **712**.

Предположим теперь, что $x^n f(x)$, где n — натуральное число, также абсолютно интегрируема в промежутке $[-\infty, +\infty]$. Тогда функция $F(x)$ имеет n последовательных производных

$$F'(x),\ \ldots,\ F^{(n)}(x),$$

которые при $x\to\pm\infty$ все стремятся к нулю.

Последовательно дифференцируя интеграл (19) по параметру x под знаком интеграла, получим:

$$F^{(k)}(x)=\frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,u^k e^{ixu}\,du.$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Этот интеграл сходится равномерно относительно x ввиду наличия мажорирующего интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)\, u^k|\, du,$$

чем и обосновывается право на применение правила Лейбница. Доказательство копируется с доказательства теоремы 3 n° **520** с ссылкой на теорему 3* n° **510** (вместо теоремы 3 n° **507**). Поведение производных на бесконечности и здесь устанавливается с помощью заключительного замечания n° **712**.

Итак, дифференциальные свойства функции $F(x)$ в основном определяются поведением функции $f(x)$ на бесконечности. Наоборот, по дифференциальным свойствам функции $f(x)$ можно в некоторой степени судить о поведении функции $F(x)$ на бесконечности. Именно: *если функция $f(x)$ и ее последовательные $n-1$ производные стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, а n-я производная $f^{(n)}(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке* $[-\infty, +\infty]$, то

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n F(x) = 0.$$

Это непосредственно следует из выражения для $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{x}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(u)\, e^{ixu}\, du,$$

которое получается последовательным интегрированием по частям.

718. Примеры и дополнения. 1) Показать, что косинус-преобразование функции $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ совпадает с нею же самой.

Действительно, по формуле n° **519**, 6) (а):

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} \cos zx\, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Дифференцируя это равенство по x, придем к заключению, что синус-преобразование функции $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ тождественно с нею самой.

2) Установить формулу:

$$\text{(а)}\quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx\, dz = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\text{(б)}\quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \ln \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cos xz\, dz = \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad (x \geqslant 0).$$

Указание. Вычислить косинус-преобразование функции от x, указанной справа, и воспользоваться сопряженностью обеих функций (условия применимости формулы Фурье выполнены!).

3) Решить интегральное уравнение:

$$\int_0^\infty g(z)\sin zx\,dz = f(x)$$

для случаев, когда

$$\text{(а)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{для } x \geqslant \pi, \end{cases}$$

или

$$\text{(б)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & \text{для } 0 \leqslant x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{для } x = \pi, \\ 0 & \text{для } x > \pi. \end{cases}$$

Указание. Решением будет синус-преобразование для функции $\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)$.

Ответ. (а) $\frac{\sin \pi x}{1-x^2}$; (б) $\frac{x \sin \pi x}{1-x^2}$.

4) Показать, что функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ является одновременно своим собственным косинус- и синус-преобразованием.

Имеем, например,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin xz}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad [522,\ 5°].$$

5) Использовать синус-преобразование функции

$$\frac{1}{e^{2\pi x}+1}$$

для получения нового интеграла.

По формуле n° 519, 8) (б) упомянутое преобразование будет

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}\right).$$

Так как исходная функция удовлетворяет условиям применимости формулы Фурье, то она, в свою очередь, является синус-преобразованием только что приведенной функции.

Учитывая значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{z}\,dz = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0),$$

отсюда легко получить, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}\, dz = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}$$

или, наконец, при других обозначениях

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{a}{2} \quad (a > 0).$$

6) Показать, что для функции

$$\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x}$$

синус-преобразование тождественно с нею же самой.

Указание. Воспользоваться формулой n° 519, 8) (а).

7) Проверить формулу Фурье (14) для функций $\cos \frac{1}{2} x^2$ и $\sin \frac{1}{2} x^2$ (которые, кстати сказать, не удовлетворяют тем предположениям, при которых формула Фурье была нами выведена!):

Имеем:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \frac{1}{2} z^2 \cos xz\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2} z^2 - xz\right) dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2} z^2 + xz\right) dz \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{2} z^2 - xz\right) dz$$

или, полагая $z = x + u$ и учитывая известные значения интегралов Френеля [522, 5°]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2} (u^2 - x^2)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \cos \frac{1}{2} x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{1}{2} u^2 du + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{1}{2} x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{1}{2} u^2 du \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{1}{2} x^2 + \sin \frac{1}{2} x^2 \right).$$

Аналогично

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \frac{1}{2} z^2 \cos xz\, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2 \right).$$

Теперь уже непосредственно ясно, что косинус-преобразованиями полученных функций являются именно исходные функции, а это и равносильно справедливости формулы Фурье.

8) Проверить (а) формулу Фурье (14) для функции

$$f(x) = \operatorname{ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$$

(интегральный косинус),

(б) формулу (15) для функции

$$g(x) = \operatorname{si} x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

(интегральный синус).

Установленные нами условия применимости формул не соблюдены!

(а) Решение. По формуле n° 497, 19) (а):

$$F_c(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_u^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1}{x} & \text{для } x > 1, \\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & \text{для } x = 1, \\ 0 & \text{для } x < 1. \end{cases}$$

Далее,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\cos xz\,dz = -\int_1^\infty \frac{\cos xz}{z}\,dz = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \operatorname{ci} x.$$

(б) Указание. Использовать 497, 19) (б).

9) Проверить обе формулы Фурье (14) и (15) для функции $\frac{1}{x^s}$, где $0 < s < 1$.

В силу 539, 3),

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{z^s}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}},$$

а затем

$$\frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{z^{1-s}}\,dz = \frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi(1-s)}{2}}.$$

Это и равно $\frac{1}{x^s}$ [если учесть формулу дополнения для функции Г, 531, 5°].

Аналогично проверяется и формула (15).

10) Проверить формулу Фурье (14) для функции Бесселя с нулевым значком, $J_0(x)$.

Мы имели в 524, 5):

$$\int_0^\infty J_0(z)\cos zx\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du \int_0^\infty J_0(z)\cos zu\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

что действительно равно $J_0(x)$ [ср. 695].

11) Рассмотрим (при $n = 0, 1, 2, \ldots$) функцию $f(x)$, определяемую равенствами

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} & \text{для } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{для } x > 1. \end{cases}$$

Ее косинус-преобразование равно

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1 - z^2)^{n - \frac{1}{2}} \cos zx \, dz$$

или, если косинус разложить в ряд и почленно проинтегрировать:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{2\nu!} \int_0^1 z^{2\nu} (1 - z^2)^{n - \frac{1}{2}} dz.$$

Но, в силу 534, 1),

$$\int_0^1 z^{2\nu} (1 - z^2)^{n - \frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + n + 1)} = \\ = \frac{(2\nu - 1)!! \, (2n - 1)!!}{2^{\nu+n+1} (\nu + n)!} \pi.$$

Поэтому, вспоминая разложение бесселевой функции со значком n [395, 14)], окончательно получим:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n - 1)!! \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! \, (\nu + n)!} \frac{x^{2\nu}}{2^{n+2\nu}} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n - 1)!!}{x^n} J_n(x).$$

Так как для исходной функции условия приложимости формулы Фурье выполнены, то косинус-преобразованием для функции $F_c(x)$ должна быть именно исходная функция. Это приводит нас к интересному интегралу:

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n} \cos zx \, dz = \begin{cases} \frac{1}{(2n - 1)!!} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

При $n = 0$ отсюда получается уже известная формула [524, 5)].

12) В выражении интегрального логарифма

$$\operatorname{li} z = \int_0^z \frac{dt}{\ln t} \quad (0 < z < 1)$$

положим $z = e^{-x}$ $(x > 0)$ и $t = e^{-u}$; мы получим:

$$\operatorname{li} e^{-x} = -\int_x^\infty \frac{du}{ue^u}.$$

Так как при $x > 1$

$$\int_x^\infty \frac{du}{ue^u} < e^{-x},$$

а при $0 < x < 1$

$$\int_x^1 \frac{du}{ue^u} < |\ln x|,$$

то $|\operatorname{li} e^{-x}|$ интегрируема от 0 до $+\infty$, и обе формулы Фурье (14) и (15) заведомо приложимы.

Найдем косинус-преобразование функции $\operatorname{li} e^{-x}$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \operatorname{li} e^{-z} \cos zx\, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos zx\, dz \int_z^\infty \frac{du}{ue^u}.$$

Интегрируя по частям, приведем его к виду:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-z} \frac{\sin zx}{z}\, dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

[522, 2°]. Отсюда, обратно,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} z}{z} \cos zx\, dz = -\frac{\pi}{2} \operatorname{li} e^{-x} \qquad (x > 0)$$

— нами найдено значение нового интеграла!

Аналогичным путем, использовав синус-преобразование, найдем другой интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+z^2)}{z} \sin zx\, dz = -\pi \operatorname{li} e^{-x}\,* \qquad (x > 0).$$

13) Доказать, что в формуле Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x)\, du$$

при соблюдении каких-либо из указанных выше достаточных условий внутренний интеграл может быть заменен интегралом по любому конечному промежутку

$$\int_a^b f(u) \cos z(u-x)\, du,$$

лишь бы только точка x лежала между a и b.

---

* Промежуточный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-z} \frac{\cos xz - 1}{z}\, dz$$

легко вычисляется дифференцированием по параметру x.

Указание. Взамен $f(u)$ рассмотреть новую функцию, равную $f(u)$ при $a < u < b$ и нулю — для прочих значений u.

14) Пусть функция $f(x)$ монотонно убывает (в широком смысле) в промежутке $(0, +\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$; в окрестности точки $x = 0$ предположим эту функцию интегрируемой *. Доказать, что тогда ее синус-преобразование $F_s(x)$ для $x > 0$ является неотрицательной функцией.

Из сделанных предположений прежде всего вытекает существование интеграла

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(z) \sin xz \, dz$$

[476, 482]. Его можно представить и в виде суммы ряда

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n\pi}{x}}^{\frac{(n+1)\pi}{x}} f(z) \sin xz \, dz,$$

члены которого попеременно положительны и отрицательны и, к тому же, по абсолютной величине убывают (ряд «лейбницевского типа», 381). Отсюда — требуемое заключение.

15) Пусть $f(x)$ — ограниченная монотонно убывающая функция в $[0, +\infty]$, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$. Предположим, сверх того, что для нее при $x > 0$ существует отрицательная и притом монотонно возрастающая (в широком смысле) производная $f'(x)$. Доказать, что тогда косинус-преобразование $F_c(x)$ есть неотрицательная функция, интегрируемая в промежутке $[0, +\infty]$.

Имеем, если $0 < a < A < +\infty$:

$$\int_a^A |f'(x)| \, dx = -\int_a^A f'(x) \, dx = f(a) - f(A),$$

так что, ввиду ограниченности функции $f(x)$, производная $f'(x)$ интегрируема в промежутке $[0, +\infty]$. Отсюда же следует, что

$$f'(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(z) \cos xz \, dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^\infty f'(z) \sin xz \, dz;$$

если к последнему интегралу применить доказанное в 14), то окажется что $F_c(x) \geqslant 0$.

* Возможно, в несобственном смысле, если в точке $x = 0$ функция $f(x)$ обращается в бесконечность.

Так как для функции $f(x)$ выполнены условия приложимости формулы Фурье, то при $x=0$ получаем

$$f(+0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dz\int_0^\infty f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\,dz,$$

в чем содержится и утверждение об интегрируемости функции $F_c(z)$!

Замечание. Подчеркнем, что ни одна из этих двух теорем не верна для преобразования другого типа. Для функции $f(x)$, рассмотренной в примере 2) n° **716**, соответствующее косинус-преобразование

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}$$

меняет знак. Если же взять $f(x)=e^{-ax}$ (пример 1) того же n°), то синус-преобразование

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2},$$

хотя и сохраняет знак плюс для $x>0$, но не интегрируемо в промежутке $[0, +\infty]$.

719. Случай функции двух переменных. Формула Фурье может быть распространена и на случай функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы остановимся подробнее на функции двух переменных $f(x_1, x_2)$, которую мы предположим определенной во всей плоскости $(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$ и к тому же дифференцируемой по каждой из переменных в отдельности.

Пусть, далее, при любом фиксированном x_2 функция $f(x_1, x_2)$ абсолютно интегрируема по x_1 в промежутке $[-\infty, +\infty]$ и, аналогично, при любом фиксированном x_1 она абсолютно интегрируема по x_2 в том же промежутке. Применяя при фиксированном x_2 к функции $f(x_1, x_2)$ от одной переменной x_1 уже известную нам формулу Фурье* (11), получим:

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz_1\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, x_2)\cos z_1(u_1-x_1)\,du_1.$$

Аналогично и функция $f(u_1, x_2)$ от переменной x_2 при фиксированном u_1 в свою очередь представляется формулой:

$$f(u_1, x_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz_2\int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\cos z_2(u_2-x_2)\,du_2.$$

---

* Условия применимости этой формулы здесь соблюдены в силу сделанных предположений. Конечно, эти предположения можно было бы видоизменить.

Подставляя, придем к искомой формуле:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z_1 (u_1 - x_1)\, du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2 (u_2 - x_2)\, du_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_0^{\infty} dz_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1 (u_1 - x_1) \cos z_2 (u_2 - x_2)\, du_2.$$

Так же, как это было сделано в **715**, и здесь можно перейти к формуле, содержащей показательную функцию:

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{i[z_1(u_1 - x_1) + z_2(u_2 - x_2)]}\, du_2, \qquad (20)$$

если только интегралы по z_1 и по z_2 понимать в смысле главного значения.

Если функция $f(x_1, x_2)$ оказывается четной как по x_1, так и по x_2, то все промежутки интегрирования можно свести к промежутку $[0, +\infty]$ и сохранить лишь косинусы:

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \cos z_1 x_1\, dz_1 \int_0^{\infty} \cos z_1 u_1\, du_1 \int_0^{\infty} \cos z_2 x_2\, dz_2 \times$$

$$\times \int_0^{\infty} f(u_1, u_2) \cos z_2 u_2\, du_2. \qquad (21)$$

В случае нечетности вместо косинусов повсюду здесь надлежит поставить синусы.

Обе формулы имеют место и для функции $f(x_1, x_2)$, заданной лишь в первом квадранте $[0, +\infty; 0, +\infty]$, так как ее можно продолжить на всю плоскость по желанию четным или нечетным образом (для формулы, содержащей синусы, исключение составляют точки на осях!).

Во всех этих формулах порядок интегрирований должен быть таков, как указано (разве лишь с перестановкой значков 1 и 2). Если удается обосновать перестановку двух промежуточных интегрирований, то формулы приобретают

особенно симметричную форму. Формула (20) в этом случае оказывается эквивалентной двум таким:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2)\, e^{i(z_1u_1 + z_2u_2)}\, du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2)\, e^{-i(z_1x_1 + z_2x_2)}\, dz_2;$$

функция $F(z_1, z_2)$ называется *преобразованием Фурье* функции $f(x_1, x_2)$.

Аналогично этому и формула (21) распадается на две формулы, имеющие на этот раз совершенно одинаковый вид:

$$F_c(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} du_1 \int_0^{\infty} f(u_1, u_2) \cos z_1u_1 \cos z_2u_2\, du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dz_1 \int_0^{\infty} F_c(z_1, z_2) \cos z_1x_1 \cos z_2x_2\, dz_2.$$

Здесь $F_c(z_1, z_2)$ представляет собой *косинус-преобразование* функции $f(x_1, x_2)$; очевидно, и $f(x_1, x_2)$ служит косинус-преобразованием для функции $F_c(z_1, z_2)$.

Перенести все сказанное на синус-преобразования предоставляем читателю.

§ 7. Приложения

720. Выражение эксцентрической аномалии планеты через ее среднюю аномалию. Разложение функции в ряд Фурье приводит к удобному аналитическому представлению функции, которое часто оказывается выгодным для вычислительных целей. Изложенный ниже важный пример этого рода мы заимствуем из теоретической астрономии.

Мы уже имели дело с *уравнением Кеплера*:

$$E = M + \varepsilon \sin E \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

которое связывает эксцентрическую аномалию E планеты с ее средней аномалией M [83; 452, 2)]. В силу этого уравнения E является однозначной и дифференцируемой функцией от M, к тому же — нечетной. Увеличение M на 2π влечет явным образом и увеличение E на 2π. Отсюда ясно, что $\sin E$ будет периодической функцией от M с периодом 2π и разлагается в ряд по синусам дуг, кратных M:

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nM.$$

Остается определить коэффициенты b_n.

По формулам (21) n° 689

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^\pi \sin E \sin nM \, dM =$$

$$= -\sin E \cdot \frac{\cos nM}{n} \Bigg|_{M=0}^{M=\pi} + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nM \frac{d \sin E}{dM} dM.$$

Внеинтегральный член обратится в нуль, так как при $M = 0$ (или π) также и $E = 0$ (или π). Заменяя в последнем интеграле переменную M переменной E, для которой промежуток изменения будет тот же, и учитывая само уравнение Кеплера, получим далее:

$$\frac{\pi}{2} b_n = \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nM \cos E \, dE = \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos (nE - n\varepsilon \sin E) \cos E \, dE =$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\int_0^\pi \cos (\overline{n+1}E - n\varepsilon \sin E) \, dE + \int_0^\pi \cos (\overline{n-1}E - n\varepsilon \sin E) \, dE \right].$$

Согласно известной интегральной формуле, выражающей функцию $J_m(x)$ Бесселя,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (mE - x \sin E) \, dE = J_m(x)$$

[см., например, n° 695]. Таким образом,

$$b_n = \frac{1}{n} [J_{n+1}(n\varepsilon) + J_{n-1}(n\varepsilon)].$$

С другой стороны, легко установить тождество

$$\frac{x}{2n} [J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] = J_n(x).$$

Поэтому

$$b_n = \frac{2}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon),$$

так что

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM$$

и, наконец,

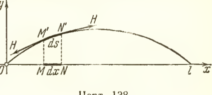
$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

Полученное выражение эксцентрической аномалии E через среднюю аномалию M играет важную роль в небесной механике. Ранее нами уже было найдено разложение величины E по степеням эксцентриситета ε с коэффициентами, зависящими от M [452, 2)]. Но оно годилось лишь для значений $\varepsilon < 0$,

6627... и, например, не могло быть применяемо для кометных орбит с большим эксцентриситетом; установленная здесь формула свободна от этого недостатка.

721. Задача о колебании струны. Наиболее важные приложения ряды (и интегралы) Фурье имеют в области математической физики. Желая осветить эти приложения примерами, мы начнем с классической *задачи о колебании струны*, которая сыграла важную роль в самой постановке вопроса о возможности тригонометрического разложения функции.

Под струной мы разумеем свободно изгибающуюся и невесомую нить. Пусть такая струна, длины l, закреплена концами в точках $x=0$ и $x=l$ оси x и под действием натяжения H располагается в равновесии вдоль этой оси (черт. 138). Представим себе, что в момент $t=0$ струна выводится из положения равновесия и, вдобавок, точки ее снабжаются некоторыми скоростями в вертикальном направлении. Тогда точки струны начнут колебаться в вертикальной же плоскости *. Если допустить, что каждая точка M струны с абсциссой x колеблется строго вертикально, то ее отклонение y в момент времени $t \geqslant 0$ от положения равновесия будет функцией от обеих переменных x и t:



Черт. 138.

$$y = y(x, t).$$

Задача и состоит в определении этой функции.

Ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний струны, при которых величины y и $\frac{\partial y}{\partial x}$ малы (так что струна незначительно отдаляется от положения равновесия и остается пологой); *это дает нам право пренебрегать квадратами этих малых величин.*

Возьмем элемент $ds = M'N'$ струны в момент времени t (см. чертеж); его длину, в силу сказанного, можно считать равной его первоначальной длине $dx = MN$ в начальный момент, ибо

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx = dx.$$

Раз мы пренебрегаем изменениями длины, то и натяжение струны мы можем считать неизменным.

На выделенный элемент струны действует в точке M' натяжение H, направленное влево по касательной в этой точке, а в точке N' — такое же натяжение, но направленное вправо по касательной. Если через α и $\bar{\alpha}$ обозначить соответствующие углы наклона касательной, то сумма вертикальных составляющих этих сил (а только их нам и нужно учитывать) будет

$$H(\sin\bar{\alpha} - \sin\alpha) = H\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'}\right] = H\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx.$$

Здесь мы снова воспользовались правом отбрасывать квадраты малых величин (например, положили

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}\Big),$$

а затем приращение функции $\frac{\partial y}{\partial x}$ заменили ее дифференциалом.

* Плоскость черт. 138 мы и предполагаем вертикальной.

Еслн обозначить через ρ «лииейную» плотность струиы, то масса элемента будет

$$\rho\, ds = \rho\, dx.$$

Тогда по закону двнжения *Ньютона* произведенне массы элемента $\rho\, dx$ на ускоренне $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ должно равняться найденной выше снле, действующей на этот элемент:

$$\rho\, dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Полагая

$$a^2 = \frac{H}{\rho},$$

окончательно получнм такое *диффереицнальное уравненне в частиых пронзводиых*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

которое н опнсывает нзучаемое явленне.

Кроме этого уравнения, нскомая функцня $y = y(x, t)$ должна удовлетворять еще ряду требованнй, прежде всего — так называемым *предельиым* нли *граннчным условням*:

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0, \tag{3}$$

выражающнм факт закреплення концов струны. Затем, еслн функцнн $f(x)$ н $g(x)$* $(0 \leqslant x \leqslant l)$ характернзуют отклонення н скоростн точек струны в момеит $t = 0$, то должны выполняться и *начальные условня*:

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x). \tag{4}$$

Такнм образом, *задача сводится к разысканию такой функцни $y(x, t)$, которая удовлетворяла бы уравненню (2) н условням (3) н (4).*

Начнем, следуя по путн, указанному *Фурье*, с разыскання *частных решений* уравнення (2), удовлетворяющнх, сверх того, предельным условиям (3), но *отлнчным от нулевого решення* (начальные условня мы пока оставляем в стороне). Упомянутые частные решення мы станем нскать в внде пронзведення двух функцнй, нз которых одна завнсит только от x, а другая — только от t:

$$y = X(x)\, T(t).$$

Уравиенне (2) в этом случае прннимает внд

$$XT'' = a^2 X'' T,$$

где штрнхн означают производные по той переменной, от которой функцня завнснт, или

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

Так как левая часть этого равенства не завнснт от x, а вторая — от t, то общее значенне их по необходимостн ие завнснт нн от x, ни от t н своднтся

---

* Прн $x = 0$ или $x = l$ обе фуикции, очевндно, должны обращаться в иуль.

к постоянной, которую мы возьмем в виде $-a^2\lambda^2$ (при $\lambda > 0$). Тогда уравнение (5) распадается на два:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0; \tag{6}$$

их решения («общие интегралы») имеют вид:

$$T = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$
$$X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Для того чтобы функция $y = XT$ удовлетворяла предельным условиям (3), им должна удовлетворять функция X. Полагая $x = 0$, сразу видим, что $C = 0$; полагая же $x = l$ и учитывая, что D уже не может быть нулем, придем к условию

$$\sin \lambda l = 0,$$

откуда $\lambda l = n\pi$ при натуральном n. Таким образом, λ может иметь одно из следующих значений:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = 2\frac{\pi}{l}, \ldots, \quad \lambda_n = n\frac{\pi}{l}, \ldots^{*}. \tag{7}$$

Полагая при $\lambda = \lambda_n$

$$AD = a_n, \quad BD = b_n,$$

придем к такой последовательности частных решений:

$$y_n = (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x.$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Нетрудно видеть, что поставленным требованиям будет удовлетворять и сумма этих решений, взятых в любом числе. Это наталкивает на мысль рассмотреть бесконечный ряд, составленный из всех таких решений, и положить

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \tag{8}$$

Мы примем пока, что этот ряд сходится и что сумма его удовлетворяет уравнению (2); выполнение условий (3) очевидно. Теперь лишь обращаемся мы к начальным условиям (4) и постараемся распорядиться постоянными a_n, b_n так, чтобы удовлетворить и им. Допустим, что для ряда (8) законно почленное дифференцирование по t, так что

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n a\lambda_n \sin a\lambda_n t + b_n a\lambda_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \tag{9}$$

Полагая в (8) и (9) $t = 0$, приходим к условиям

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = f(x), \quad \sum_{1}^{\infty} a\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = g(x). \tag{10}$$

Отсюда, если только функции f и g удовлетворяют условиям разложимости в ряд Фурье, по формулам (25) n° 689 и определяются, наконец, искомые

* Если бы мы взяли постоянное значение отношений (5) в форме $a^2\lambda^2$, то предельным условиям могла бы удовлетворять только функция X, тождественно равная нулю.

коэффициенты:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin\lambda_n x\,dx, \qquad b_n = \frac{2}{a\lambda_n l}\int_0^l g(x)\,\sin\lambda_n x\,dx. \tag{11}$$

Мы получили, таким образом, по крайней мере формально, полное решение поставленной задачи в виде ряда (8) с коэффициентами, вычисленными по формулам (11)!

Правда, вопрос о том, будет ли оно действительно решением, пока остается открытым. Для того чтобы ответить на него, наложим теперь требования на функции f и g; именно, пусть функция g будет дифференцируема, а функция f дважды дифференцируема, причем производные f'' и g' предположим имеющими ограниченное изменение в промежутке $[0, l]$. Тогда имеют место такие оценки:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \lambda_n b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)^*.$$

Оба разложения (10) в действительности имеют место во всем промежутке $[0, l]$; сходится и разложение (8), причем определяемая им функция удовлетворяет как предельным, так и начальным условиям (почленное дифференцирование по t теперь оправдывается равномерной сходимостью ряда (9)!). Несколько сложнее удостовериться в том, что эта функция удовлетворяет самому дифференциальному уравнению **.

Заметим, что ряды (10) сходятся и за пределами промежутка $[0, l]$; обозначая их суммы по-прежнему через $f(x)$ и $g(x)$, мы получаем, таким образом, распространения этих функций на весь бесконечный промежуток $(-\infty, +\infty)$ с сохранением их дифференциальных свойств, за исключением разве лишь точек вида kl при целом k. Ряд для $g(x)$, равномерно сходящийся в любом конечном промежутке, можно почленно проинтегрировать, так что

$$-\sum_1^\infty b_n \cos\lambda_n x = \frac{1}{a}\,g_1(x),$$

где $g_1(x)$ есть одна из первообразных для функции $g(x)$. Раскрывая скобки в (8), можно переписать это выражение в виде

$$y = \frac{1}{2}\left\{\sum_1^\infty a_n \sin\lambda_n(x+at) + \sum_1^\infty a_n \sin\lambda_n(x-at) - \right.$$

$$\left. - \sum_1^\infty b_n \cos\lambda_n(x+at) + \sum_1^\infty b_n \cos\lambda_n(x-at)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{f(x+at) + f(x-at) + \frac{1}{a}\,g_1(x+at) - \frac{1}{a}\,g_1(x-at)\right\}.$$

---

* Это следует из общих формул (21) п° **708** и замечания п° **709**, замена промежутка $[0, \pi]$ промежутком $[0, l]$, конечно, несущественна. При этом естественные условия

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0,$$

связанные с закреплением концов струны, как раз и влекут за собой равенство нулю величины, обозначенной там через B_n.

** Почленным дифференцированием установить это можно было бы, лишь наложив чрезмерно тяжелые ограничения на функции f и g, чтобы повысить порядок малости коэффициентов a_n и b_n.

Дважды дифференцируя по t и по x, теперь уже легко убедиться в выполнении уравнения (2)!

Решение рассмотренной здесь задачи можно было бы получить и непосредственно в последней форме, но решение в форме тригонометрического ряда (8) имеет преимущество, ибо позволяет вскрыть важные физические особенности изучаемого явления. Объединяя в (8) оба члена в скобках, перепишем разложение так:

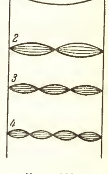
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t + \alpha_n\right).$$

Мы видим, что полное колебание струны слагается из ряда отдельных колебаний

$$y_n = A_n \sin\frac{n\pi}{l}x \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t + \alpha_n\right).$$

Участвующие в таком элементарном колебании точки струны все колеблются с одной и той же частотой или, если угодно, с одним и тем же периодом, которому отвечает тон определенной высоты. Амплитуда колебания каждой точки зависит от ее положения; она равна

$$A_n \left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|.$$



Черт. 139.

Вся струна разбивается на n равных участков, причем точки одного и того же участка находятся всегда в одной и той же фазе, а точки соседних участков — в прямо противоположных фазах. На черт. 139 изображены последовательные положения струны для случаев $n = 1, 2, 3, 4$. Точки, отделяющие один участок от другого, находятся в покое; это — так называемые «узлы». Середины участков («пучности») колеблются с наибольшей амплитудой. Описанное явление носит название *стоячей волны*; отсюда и сам метод Фурье обычно называют *методом стоячих волн*.

Основной тон определяется первой составляющей y_1; ей отвечает частота $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}$ и период $T_1 = 2l\sqrt{\frac{\rho}{H}}$. Остальные тона, одновременно с основным издаваемые струной, или обертоны, характеризуют определенную «окраску» звука, или его тембр. Если нажать пальцем в середине струны, то сразу заглохнут как основной тон, так и нечетные обертоны, для которых там была пучность. Четные обертоны, для которых на середину струны приходится узел, все сохранятся; среди них роль основного будет играть второй обертон, с периодом $T_2 = \frac{1}{2}T_1$, и струна станет издавать октаву первоначального тона. Все это можно прочитать по полученному решению нашей задачи!

722. Задача о распространении тепла в конечном стержне. Пусть имеем тонкий однородный стержень длины l, расположенный между точками $x = 0$ и $x = l$ по оси x. Сечение стержня, площади σ, мы считаем настолько малым, что всем точкам сечения в каждый момент можно приписать одну и ту же температуру. Боковая поверхность стержня предполагается изолированной от окружающей среды*. В начальный момент $t = 0$

* Вместо стержня можно было бы представить себе бесконечную стену между плоскостями $x = 0$ и $x = l$, в предположении, что в каждой перпендикулярной к оси x плоскости сохраняется один и тот же тепловой режим.

дано распределение температуры u вдоль стержня, характеризуемое функцией $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$; кроме того, указан тепловой режим, поддерживаемый на концах стержня. Задача состоит в определении температуры точек стержня, как функции от абсциссы точки x и времени t:

$$u = u(x, t).$$

Рассмотрим элемент стержня между сечениями x и $x + dx$. Количество тепла, которое за бесконечно малый промежуток времени dt пройдет через левое сечение внутрь элемента, выразится так [ср. 666, 2)]:

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} dt,$$

где k есть «коэффициент внутренней теплопроводности» стержня; знак минус объясняется тем, что тепло переходит от более нагретых мест к менее нагретым. Аналогично этому через правое сечение вовне проходит за тот же промежуток времени количество тепла

$$-k\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\right) dt;$$

изменив здесь знак, мы получим количество тепла, прошедшего через упомянутое сечение справа налево, т. е. внутрь элемента. Таким образом, общее количество тепла, накопившегося в выделенном элементе за промежуток времени dt, будет:

$$k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx\, dt.$$

Это количество можно подсчитать и иначе, исходя из того, что им обусловлено повышение температуры на $\frac{\partial u}{\partial t} dt$. Если через c и ρ обозначить, соответственно, теплоемкость и плотность вещества стержня, то затраченное на это тепло выразится так:

$$c\rho\sigma\, dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Приравнивая оба выражения, придем к основному *дифференциальному уравнению теплопроводности:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{12}$$

где для краткости положено:

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

[Впрочем, это уравнение можно было бы получить из общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

выведенного для пространства в n° 612, 3°, если считать u не зависящим ни от y, ни от z.]

(а) Предположим сначала, что на обоих концах стержня поддерживается постоянная температура, скажем, 0. Это приводит к таким предельным условиям:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geqslant 0).$$

Выше мы упоминали уже о начальном условии:

$$u(x,\ 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{13}$$

причем в связи с предельными условиями необходимо предположить $f(0) = f(l) = 0$. Для разыскания функции $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (12) и всем поставленным условиям, применим метод Фурье.

Пусть, как и выше, $u = XT$, так что уравнение принимает вид:

$$XT' = a^2X''T \text{ или } \frac{T'}{T} = a^2\frac{X''}{X};$$

если постоянное значение этих отношений положить равным $-a^2\lambda^2$ $(\lambda > 0)$, то уравнение разобьется на два:

$$T' + a^2\lambda^2T = 0, \text{ откуда } T = Ce^{-a^2\lambda^2t} \tag{14}$$

и

$$X'' + \lambda^2X = 0, \text{ откуда } X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x. \tag{15}$$

Для того чтобы функция XT удовлетворяла предельным условиям, необходимо, чтобы было

$$A = 0,\ \lambda l = n\pi \text{ (где } n = 1,\ 2,\ 3 \ldots),$$

так что λ может принимать лишь значения (7), как и в предыдущей задаче *. Полагая $BC = b_n$, получим такой ряд частных решений:

$$u_n = b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx.$$
$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Общее решение возьмем в форме ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx. \tag{16}$$

Желая удовлетворить начальному условию, мы должны положить:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение, то для осуществления этого разложения достаточно взять:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

На этот раз установление того факта, что формальное решение (16) является и действительным решением, не представляет затруднений. Наличие множителя

$$e^{-a^2\lambda_n^2t} = e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}.$$

позволяет дифференцировать ряд (16) почленно — по t и дважды по x, ибо получающиеся ряды сходятся равномерно относительно x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и относительно t $(t \geqslant \alpha > 0)$.

---

* См. сноску на стр. 551.

(б) Пусть теперь на конце $x=l$ поддерживается постоянная температура u_0, а второй конец $x=0$ изолирован, так что через него никакого движения тепла не происходит. Этим предположениям отвечают предельные условия:

$$u(l,\ t)=u_0, \quad \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=0. \tag{17}$$

Начальное условие сохраняем в прежнем виде.

Удобнее, впрочем, ввести взамен u новую неизвестную функцию v, положив $u=u_0+v$. Для v имеем, очевидно, такое же уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Предельные условия заменятся более простыми:

$$v(l,\ t)=0, \quad \frac{\partial v(0,\ t)}{\partial x}=0.$$

Наконец, начальное условие преобразуется так:

$$v(x,\ 0)=f(x)-u_0.$$

Полагая, как обычно, $v=XT$, получим для T и X прежние выражения (14) и (15). Так как

$$\frac{dX}{dx}=-\lambda A\sin\lambda x+\lambda B\cos\lambda x,$$

то второе предельное условие даст $B=0$, а из первого получим:

$$\cos\lambda l=0,$$

так что на этот раз λ может принимать значения

$$\lambda_1=\frac{\pi}{2l}, \quad \lambda_2=3\frac{\pi}{2l}, \ \dots, \ \lambda_n=(2n-1)\frac{\pi}{2l}, \ \dots$$

Окончательно приходим к таким частным решениям:

$$v_n=a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x, \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

из которых и составляем общее решение

$$v=\sum_1^\infty a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x.$$

Начальное условие в этом случае приводит к разложению

$$\sum_1^\infty a_n\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}=f(x)-u_0$$

не стандартного вида [ср. задачу 25) n° 690]. Легко, однако, показать, что при соблюдении обычных требований относительно функции $f(x)$ это разложение в действительности имеет место при

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}\,dx-\frac{4}{\pi}u_0\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

Итак, окончательно

$$u = u_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

при только что указанных значениях коэффициентов; то, что это — действительно решение, проверяется, как и в случае (а).

В частности, если $f(x) = 0$, имеем разложение:

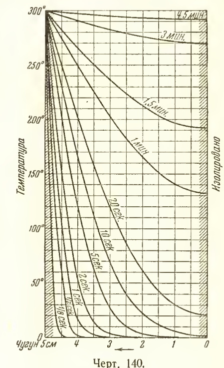
$$u = u_0 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

По этой формуле, при $u_0 = 300$ и $a^2 = 0{,}139$ *, и были вычислены значения u для различных t и x, и по ним построены приведенные на черт. 140 графики распределения температур в стержне в различные моменты времени.

723. Случай бесконечного стержня. Решим теперь ту же задачу о распространении тепла для случая стержня, бесконечного в обе стороны, скажем, расположенного вдоль оси x (или для всего пространства, если только во всех точках каждой перпендикулярной к оси x плоскости температура одна и та же). Дифференциальное уравнение остается тем же; н а ч а л ь н о е у с л о в и е

$$u(x, 0) = f(x)$$

на этот раз должно выполняться во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$, а п р е д е л ь н ы х у с л о в и й, естественно, никаких нет.



Черт. 140.

Как и в прежних случаях получается частное решение уравнения в виде

$$u = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t};$$

но здесь нет оснований из всех положительных значений параметра λ выбирать какие-либо. Поэтому, считая и постоянные a и b зависящими от λ:

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda),$$

* Имеется в виду ч у г у н н ы й стержень длиной 5 *см*; для этого случая

$$\rho = 0{,}0072 \ \frac{кг}{см^3}, \quad c = 0{,}13 \ \frac{Кал}{кг \cdot {}^\circ C}, \quad k = 0{,}00013 \ \frac{Кал}{см \cdot {}^\circ C \cdot сек},$$

так что $a^2 = 0{,}139$.

естественно для получения общего решения вместо суммы прибегнуть к интегралу:

$$u = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] \, e^{-a^2\lambda^2 t} \, d\lambda. \tag{18}$$

Для того чтобы это — пока ф о р м а л ь н о е — решение удовлетворяло начальному условию, функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ должны быть подобраны так, чтобы для всех x было

$$\int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] \, d\lambda = f(x).$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям приложимости формулы Ф у р ь е, которую напишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z \, dz + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z \, dz \right\} d\lambda.$$

Отсюда ясно, что функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ можно определить формулами:

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z \, dz, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z \, dz.$$

В таком случае решение (18) примет вид:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda (z - x) \cdot dz.$$

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[-\infty, +\infty]$, то [521, теорема 5] здесь можно переставить интегрирования по λ и по z:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \, dz \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (z - x) \, d\lambda.$$

Внутренний интеграл непосредственно вычисляется согласно 6) (a) n° **519**; он оказывается равным

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \, e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Таким образом, окончательно решение задачи представляется в виде простого интеграла:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \, e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} \, dz. \tag{19}$$

Дифференцированием по t и по x (дважды) под знаком интеграла легко убедиться, что это — д е й с т в и т е л ь н о решение.

Рассмотрим еще случай «полубесконечного», т. е. бесконечного в одну сторону стержня, например лежащего вдоль положительной части оси x

(или, если угодно, полупространства $x \geqslant 0$). Пусть на конце $x=0$ поддерживается температура 0. Для этого случая может быть использовано прежнее решение (19), если только продолжить функцию $f(x)$ (здесь заданную лишь для значений x между 0 и $+\infty$) на отрицательные значения x так, чтобы было

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}\, dz = 0.$$

Ввиду четности показательного множителя, очевидно, достаточно продолжить функцию $f(x)$ нечетным образом. Тогда решение новой задачи запишется так:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz.$$

Если потребовать, чтобы при $x=0$ было $u=u_0$, то, вводя новую неизвестную функцию $v=u-u_0$, легко получить:

$$u = u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [f(z) - u_0] \cdot \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz.$$

Отметим частный случай, когда при этом $f(x)=0$; решение примет вид:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi \right\}.$$

Для $u_0 = 300$ и $a^2 = 0{,}139$ * по этой формуле при различных x и t были вычислены значения u, и по ним построены графики распределения температуры в стержне в различные моменты времени. Эти графики, изображенные на черт. 141, интересно сопоставить с графиками на черт. 140.

724. Видоизменение предельных условий. Вернемся к задаче о распространении тепла в конечном стержне, рассмотренной в **722**, но видоизменим предельные условия. Именно, предполагая по-прежнему, что на конце $x=0$ поддерживается температура 0, будем считать, что на конце $x=l$ имеет место свободное излучение в окружающую среду температуры 0. Количество тепла, подводимого за промежуток времени dt к этому концу, будет [см. **722**]:

$$-k\sigma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} dt,$$

а количество излучаемого тепла по закону Ньютона [ср. **359**, 3)] равно:

$$h\sigma u(l, t)\, dt,$$

где h есть «коэффициент внешней теплопроводности». Следовательно, на конце $x=l$ должно выполняться такое условие:

$$-k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = hu(l, t).$$

* Что отвечает стержню из чугуна; см. сноску на стр. 557.

Если рассмотреть теперь частное решение — вида $u = XT$, то получим, как и в п° 722:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Предельное условие на конце $x = 0$ даст $A = 0$; предельное же условие на конце $x = l$ приведет к равенству

$$-k\lambda\cos\lambda l = h\sin\lambda l,$$

или

$$\operatorname{tg}\lambda l = -\frac{k}{hl}\lambda l.$$

Таким образом, для λ получается ряд значений

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{l},$$

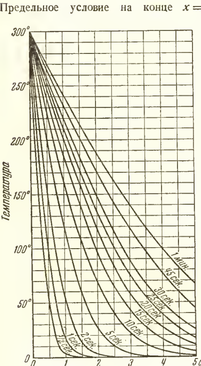
где ξ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ суть положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\xi = -\frac{k}{hl}\xi$$

[см. 679, 4)]. Общее решение получается в виде:

$$u = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x,$$

сходном с (16), однако (и это важно подчеркнуть) числа λ_n здесь имеют гораздо более сложную природу.



Черт. 141.

Начальное условие приводит к разложению:

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{\xi_n x}{l} = f(x); \qquad (20)$$

его можно рассматривать как обобщенный ряд Фурье функции $f(x)$ в промежутке $[0, l]$ и, пользуясь ортогональностью функций

$$\sin\frac{\xi_n x}{l}$$

[679, 4)], обычным образом определить коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{\xi_n x}{l}\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{\xi_n x}{l}\,dx}.$$

Мы оставим открытым вопрос об условиях, которые надлежало бы наложить на функцию $f(x)$, чтобы обеспечить равенство (20), и ограничимся формальным решением поставленной задачи.

725. Распространение тепла в круглой пластине. Мы рассмотрим тепловую задачу еще для одного случая — круглой пластины радиуса R с центром в начале координат. Предположим пластину настолько тонкой, что по высоте ее температура не меняется, а верхнюю и нижнюю ее поверхности будем считать изолированными. Больше того, мы ограничимся изучением случая, когда температура u будет зависеть только от полярного радиуса-вектора r (но не от полярного угла θ): для этого достаточно предположить, что таковы же начальные и предельные данные. [Можно было бы и здесь вместо пластины с изолированными поверхностями рассматривать круговой цилиндр, бесконечный вниз и вверх.]

Взяв общее дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

[672, 3°], мы прежде всего, ввиду независимости u от z, перепишем его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Переходя на плоскости xy к полярным координатам, мы должны заменить выражение в скобках следующим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

[см. 222, 1)]. Наконец, учитывая, что u не зависит от θ, приходим к такому уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \tag{21}$$

Пусть начальное распределение температуры будет задано в виде

$$u(r, 0) = \varphi(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant R),$$

а предельное условие сводится к

$$u(R, t) = 0.$$

Прибегнем и здесь к методу Фурье. Станем искать частное решение уравнения (21) в виде

$$u = R(r)\, T(t);$$

тогда для определения этих функций получатся уравнения

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \quad \text{и} \quad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0.$$

Из первого из них $T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}$. Второе же, если положить $r = \frac{1}{\lambda} z$ и $R\left(\frac{1}{\lambda} z\right) = J(z)$, перейдет в уравнение Бесселя:

$$J'' + \frac{1}{z} J' + J = 0.$$

Отождествим же J с функцией Бесселя с нулевым значком, т. е. положим $R(r) = J_0(\lambda r)$. Предельное условие дает

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

Мы уже упоминали в 679, 6), что функция $J_0(x)$ имеет бесчисленное множество положительных корней ξ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; таким, образом, для λ возможен ряд значений

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{R} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Им отвечают частные решения вида

$$u_n = c_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r),$$

из которых, как обычно, составляется общее решение:

$$u = \sum_1^\infty c_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r).$$

Остается определить коэффициенты c_n. Неиспользованное еще начальное условие дает в этом случае

$$\sum_1^\infty c_n J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) = \varphi(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant R).$$

Мы уже видели в 679, 6), что система функций $\{J_0(\xi_n x)\}$ ортогональна в обобщенном смысле — с «весом» x* в промежутке $[0, 1]$; очевидно, система $\left\{J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\right\}$ будет ортогональной в промежутке $[0, R]$ с «весом» r. Обычным образом определяя коэффициенты этого обобщенного ряда Фурье, найдем

$$c_n = \frac{\int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}{\int_0^R r J_0^2\left(\frac{\xi_n r}{R}\right) dr}.$$

И здесь мы удовольствуемся полученным формальным решением.

Читатель видит, что последние два примера уже выходят за пределы обыкновенных рядов Фурье. Мы привели их, желая создать у читателя правильную ориентацию в вопросе о приложении рядов Фурье в математической физике. Они там играют важную роль, но, конечно, далеко не исчерпывают потребностей математической физики: достаточно небольшого изменения условий задачи, чтобы оказалось необходимым прибегнуть к разложениям уже другого рода. Это обстоятельство нисколько не умаляет значения рядов Фурье и развитой для них теории, потому что ряды Фурье навсегда останутся простейшим и важнейшим примером «ортогонального разложения»; по образцу его строятся все другие подобные разложения, теория которых теснейшим образом переплетается с теорией рядов Фурье.

---

* См. сноску на стр. 423.

726. Практический гармонический анализ. Схема для двенадцати ординат. Разложение функции в ряд Фурье, или *гармонический анализ*, оказывается нужным во многих чисто практических вопросах машиноведения, электротехники и пр. Но в этих случаях очень редко приходится непосредственно пользоваться формулами Эйлера—Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,^*, \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \\ (n = 1, 2, 3, &\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

для вычисления коэффициентов разложения. Дело в том, что функции, которые нужно подвергнуть гармоническому анализу, обыкновенно задаются таблицей своих значений или графиком. Таким образом, аналитического выражения функции в нашем распоряжении нет; иногда к самому гармоническому анализу прибегают именно для того, чтобы таким путем получить хотя бы приближенное аналитическое выражение для функции. В этих условиях для вычисления коэффициентов Фурье нужно обратиться к приближенным методам. Разумеется, на практике приходится пользоваться лишь немногими первыми членами тригонометрического разложения. Коэффициенты ряда Фурье в большинстве случаев быстро убывают, а с ними быстро падает и влияние далеких гармоник.

Обычно дается (или снимается с графика) ряд равноотстоящих ординат, т. е. ряд значений функции y, отвечающих равноотстоящим значениям аргумента x. По этим ординатам величины (22) можно приближенно вычислить, пользуясь методами, изложенными в главе IX (§ 5). Но вычисления здесь оказываются довольно громоздкими, и для того чтобы упростить и, так сказать, автоматизировать их, придумано много различных приемов, один из которых мы и изложим.

Пусть, скажем, промежуток от 0 до 2π разделен на k равных частей и пусть известны ординаты

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{k-1},\ y_k = y_0,$$

отвечающие точкам деления

$$0,\ \frac{2\pi}{k},\ 2\cdot\frac{2\pi}{k},\ \ldots,\ (k-1)\frac{2\pi}{k},\ 2\pi.$$

Тогда по формуле трапеций [322] имеем (конечно, лишь приближенно!):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{k}\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right].$$

Ввиду периодичности нашей функции $y_k = y_0$, и значение a_0 можно написать и так:

$$ka_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1}. \tag{23}$$

---

* Мы возвращаемся здесь к обозначению свободного члена в тригонометрическом разложении через a_0 $\left(\text{а не } \frac{a_0}{2}\right)$.

Аналогично, применяя формулу трапеций к другим интегралам (22), найдем:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{k}\left[y_0 + y_1\cos m\frac{2\pi}{k} + y_2\cos m\frac{4\pi}{k} + \ldots + y_{k-1}\cos m\frac{2(k-1)\pi}{k}\right]$$

или

$$\frac{k}{2}a_m = y_0 + y_1\cos m\frac{2\pi}{k} + y_2\cos m\frac{4\pi}{k} + \ldots + y_{k-1}\cos m\frac{2(k-1)\pi}{k}, \qquad (24)$$

а также

$$\frac{k}{2}b_m = y_1\sin m\frac{2\pi}{k} + y_2\sin m\frac{4\pi}{k} + \ldots + y_{k-1}\sin m\frac{2(k-1)\pi}{k}. \qquad (25)$$

Положим сначала $k=12$ и будем исходить из двенадцати ординат

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{11},$$

отвечающих двенадцати равноотстоящим значениям аргумента:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

или в градусах

$$0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°.$$

Все множители, на которые придется умножать эти ординаты, по формулам приведения сведутся к следующим:

$$\pm 1;\quad \pm\sin 30° = \pm 0{,}5;\quad \pm\sin 60° = \pm 0{,}866.$$

Именно, легко проверить, что

$$\left.\begin{aligned}
12a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}\\
6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8)\sin 30° + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7)\sin 60° + (y_0 - y_6)\\
6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10})\sin 30° + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9)\\
6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}\\
6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11})\sin 30° + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})\sin 60° + (y_3 - y_9)\\
6b_2 &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11})\sin 60°\\
6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}\right\} (26)$$

Например,

$$\begin{aligned}
6a_1 &= y_0 + y_1\cos 30° + y_2\cos 60° + y_3\cos 90° + y_4\cos 120° + y_5\cos 150° +\\
&+ y_6\cos 180° + y_7\cos 210° + y_8\cos 240° + y_9\cos 270° +\\
&+ y_{10}\cos 300° + y_{11}\cos 330° = y_0 + y_1\sin 60° + y_2\sin 30° -\\
&- y_4\sin 30° - y_5\sin 60° - y_6 - y_7\sin 60° - y_8\sin 30° + y_{10}\sin 30° +\\
&+ y_{11}\sin 60°,
\end{aligned}$$

что совпадает с написанным выше выражением.

Для того чтобы свести выкладки (особенно — умножения) к минимуму, их производят по определенной схеме, предложенной Рунге (C. Runge).

Сначала выписывают в указываемом ниже порядке ординаты и над каждой парой подписанных одна под другой ординат производят сложение и вычитание:

	ординаты						
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
разности		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

Затем аналогично выписывают эти суммы и разности и снова подвергают их сложению и вычитанию:

	суммы			
	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4	
суммы	s_0	s_1	s_2	s_3
разности	d_0	d_1	d_2	

	разности		
	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
суммы	σ_1	σ_2	σ_3
разности	δ_1	δ_2	

Теперь, получив после всех этих сложений и вычитаний ряд величин s, d, σ, δ, мы можем следующим образом выразить через них искомые коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned}
12a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3,\\
6a_1 &= d_0 + 0{,}866\, d_1 + 0{,}5\, d_2,\\
6a_2 &= (s_0 - s_3) + 0{,}5\,(s_1 - s_2),\\
6a_3 &= d_0 - d_2,\\
6b_1 &= 0{,}5\,\sigma_1 + 0{,}866\,\sigma_2 + \sigma_3,\\
6b_2 &= 0{,}866\,(\delta_1 + \delta_2),\\
6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{и т. д.}
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Нетрудно убедиться, что эти формулы в точности соответствуют формулам (26).

727. Примеры. 1) На черт. 142 изображена диаграмма касательных усилий (на пальце кривошипа) для некоторой паровой машины *. В связи с вопросом о крутильных колебаниях вала представляет интерес выделить гармонические составляющие касательного усилия T, как функции от угла φ поворота кривошипа. Сняв с графика двенадцать равноотстоящих ординат, произведем гармонический анализ по указанной схеме:

T	−7200	−300	7000	4300	0	−5200	−7400
		250	4500	7600	3850	−2250	
u	−7200	−50	11500	11900	3850	−7450	−7400
v		−550	2500	−3300	−3850	−2950	

u	−7200	−50	11500	11900
	−7400	−7450	3850	
s	−14600	−7500	15350	11900
d	200	7400	7650	

v	−550	2500	−3300
	−2950	−3850	
σ	−3500	−1350	−3300
δ	2400	6350	

* Подобные диаграммы строятся на основе индикаторных диаграмм с учетом сил инерции.

Теперь по формулам (27):

$$
\begin{aligned}
12a_0 &= -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150; & a_0 &= 429,\\
6a_1 &= 200 + 7400 \cdot 0{,}866 + 7650 \cdot 0{,}5 = 10433; & a_1 &= 1739,\\
6a_2 &= (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \cdot 0{,}5 = -37925; & a_2 &= -6321,\\
6a_3 &= 200 - 7650 = -7450; & a_3 &= -1242,\\
6b_1 &= -3500 \cdot 0{,}5 - 1350 \cdot 0{,}866 - 3300 = -6219; & b_1 &= -1037,\\
6b_2 &= (2400 + 6350) \cdot 0{,}866 = 7578; & b_2 &= 1263,\\
6b_3 &= -3500 + 3300 = -200; & b_3 &= -33.
\end{aligned}
$$

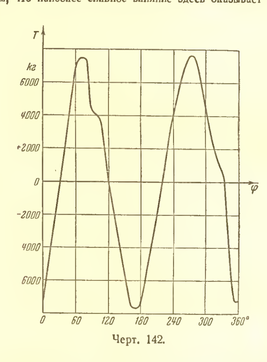
Таким образом,

$$
T = 429 + 1739 \cos\varphi - 1037 \sin\varphi - 6321 \cos 2\varphi + 1263 \sin 2\varphi - \\
- 1242 \cos 3\varphi - 33 \sin 3\varphi + \dots
$$

Объединим члены, содержащие косинус и синус одного и того же угла:

$$
T = 430 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) + \\
+ 1240 \sin(3\varphi + 268^\circ) + \dots
$$

Мы видим, что наиболее сильное влияние здесь оказывает в т о р а я гармоника.



Черт. 142.

2) Для того чтобы дать себе отчет в том, с какой, примерно, точностью получаются коэффициенты Ф у р ь е функции по двенадцати ординатам ее графика, мы приложим изложенный метод к некоторым аналитически заданным функциям и сравним приближенные результаты с точными.

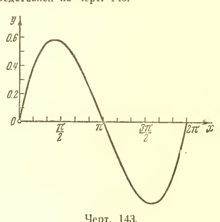
Сначала рассмотрим функцию $f(x)$, которая в промежутке $[0, 2\pi]$ задается формулой

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x),$$

а для остальных значений x определяется по закону периодичности:

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

График функции представлен на черт. 143.



Черт. 143.

Вычислим табличку:

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y =$	0	0,400	0,582	0,589	0,465	0,255	0	−0,255	−0,465	−0,589	−0,582	−0,400	0

При этом можно использовать легко проверяемое тождество:

$$f(2\pi - x) = -f(x).$$

По схеме Рунге по этим значениям y найдем:

$$b_1 = 0{,}608, \quad b_2 = 0{,}076, \quad b_3 = 0{,}022;$$

все числа u_i, а с ними и все коэффициенты a_n оказываются нулями [690, 22)].

В то же время формулы (22) непосредственно дают (с помощью трехкратного интегрирования по частям):

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\,\sin mx\,dx = \frac{6}{m^3\pi^2},$$

так что

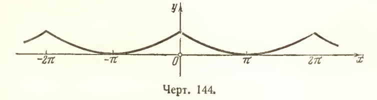
$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079, \quad b_2 = \frac{3}{4\pi^2} = 0{,}0760, \quad b_3 = \frac{2}{9\pi^2} = 0{,}0225.$$

Совпадение превосходное!

3) Однако далеко не всегда получается столь точный результат. В виде второго примера мы возьмем функцию с периодом 2π, которая в промежутке $[0, 2\pi]$ определяется так:

$$y = f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2.$$

Ее график дан на черт. 144.



Черт. 144.

Пользуясь очевидным тождеством:

$$f(2\pi - x) = f(x),$$

составим табличку:

$x=$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=$	1	0,694	0,444	0,250	0,111	0,028	0	0,028	0,111	0,250	0,444	0,694	1

Тогда по схеме Рунге

$$a_0 = 0{,}338; \quad a_1 = 0{,}414; \quad a_2 = 0{,}111; \quad a_3 = 0{,}056;$$

числа же v_i и коэффициенты b_m — на этот раз нули [690, 22)]. Точные значения коэффициентов будут:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^3}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx = \frac{1}{3} \doteq 0{,}333,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos mx\,dx = \frac{4}{m^2\pi^2} \quad (m \geqslant 1),$$

в частности,

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} \doteq 0{,}405; \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2} \doteq 0{,}101; \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \doteq 0{,}045.$$

Таким образом, если для первых двух коэффициентов относительная погрешность не превосходит $1{,}5 - 2\%$, то для последующих она достигает 10% (a_2) и даже 20% (a_3)! Ниже [730] мы еще вернемся к вопросу о точности полученных нами приближенных формул. Но уже и сейчас ясно, что для повышения этой точности нужно брать больше ординат.

728. Схема для двадцати четырех ординат. Положим теперь, что даны или сняты с графика двадцать четыре ординаты:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{23},$$

отвечающих значениям аргумента:

$$0,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \ldots,\ \frac{23\pi}{12},$$

или

$$0^\circ,\ 15^\circ,\ 30^\circ,\ 45^\circ,\ \ldots,\ 345^\circ.$$

На этот раз все множители, на которые при приближенном вычислении коэффициентов Фурье приходится умножать ординаты, сведутся к таким:

$$\pm 1,\quad \pm\sin 30^\circ,\quad \pm\sin 45^\circ,\quad \pm\sin 60^\circ,\quad \pm\sin 75^\circ.$$

Не вдаваясь в подробности (ввиду полной аналогии с предыдущим), приведем сразу схему вычислений, также предложенную Рунге. После опыта, который уже имеет читатель, эта схема ему будет понятна без пояснений. Вот она:

	ординаты												
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
		y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	
суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
разности		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	

	суммы						
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7	
суммы	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
разности	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

	разности					
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
	v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7	
суммы	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
разности	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	

	суммы			
	p_0	p_1	p_2	p_3
	p_6	p_5	p_4	
суммы	k_0	k_1	k_2	k_3
разности	l_0	l_1	l_2	

	разности		
	s_1	s_2	s_3
	s_5	s_4	
суммы	m_1	m_2	m_3
разности	n_1	n_2	

Отметим, что с величинами q и r нет надобности проделывать сложения и вычитания.

Теперь через полученные указанным путем величины k, l, m, n, q и r коэффициенты Фурье выразятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
24a_0 &= k_0 + k_1 + k_2 + k_3,\\
12a_1 &= [q_0 + 0{,}5q_4 + 0{,}6124\,(q_1 + q_5)] + [0{,}8660q_2 + 0{,}7071q_3 +\\
&\qquad + 0{,}3536\,(q_1 - q_5)],\\
12a_2 &= l_0 + 0{,}8660l_1 + 0{,}5l_2,\\
12a_3 &= (q_0 - q_4) + 0{,}7071\,(q_1 - q_3 - q_5),\\
12a_4 &= (k_0 - k_3) + 0{,}5\,(k_1 - k_2),\\
12a_5 &= [q_0 + 0{,}5q_4 + 0{,}6124\,(q_1 + q_5)] - [0{,}8660q_2 + 0{,}7071q_3 +\\
&\qquad + 0{,}3536\,(q_1 - q_5)],\\
12a_6 &= l_0 - l_2,\\
12b_1 &= [0{,}5r_2 + r_6 + 0{,}6124\,(r_1 + r_5)] + [0{,}7071r_3 + 0{,}8660r_4 -\\
&\qquad - 0{,}3536\,(r_1 - r_5)],\\
12b_2 &= 0{,}5m_1 + 0{,}8660m_2 + m_3,\\
12b_3 &= (r_2 - r_6) + 0{,}7071\,(r_1 + r_3 - r_5),\\
12b_4 &= 0{,}8660\,(n_1 + n_2),\\
12b_5 &= [0{,}5r_2 + r_6 + 0{,}6124\,(r_1 + r_5)] - [0{,}7071r_3 + 0{,}8660r_4 -\\
&\qquad - 0{,}3536\,(r_1 - r_5)],\\
12b_6 &= m_1 - m_3, \quad \text{и т. д.}
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Дальнейшие коэффициенты по двадцати четырем ординатам получаются с все меньшей и меньшей точностью.

Обращаем внимание читателя на одну подробность. Для получения коэффициентов a_1 и a_5 нужно отдельно вычислить те выражения, которые поставлены в квадратные скобки, а затем сложить их (для нахождения a_1) и вычесть (для нахождения a_5). Аналогичное замечание — относительно вычисления коэффициентов b_1 и b_5.

729. Примеры. 1) Возвращаясь к диаграмме касательных усилий, представленной на черт. 142, снимем с нее двадцать четыре ординаты и наново произведем гармонический анализ, пользуясь новой схемой:

T	−7200	−4150	−300	3250	7000	7450	4300	2750	0	−2650	−5200	−7700	−7400
		−5150	250	2300	4500	6800	7600	6400	3850	650	−2250	−4850	
u	−7200	−9300	−50	5550	11500	14250	11900	9150	3850	−2000	−7450	−12550	−7400
v		1000	−550	950	2500	650	−3300	−3650	−3850	−3300	−2950	−2850	

u	−7200	−9300	−50	5550	11500	14250	11900
	−7400	−12550	−7450	−2000	3850	9150	
p	−14600	−21850	−7500	3550	15350	23400	11900
q		200	3250	7400	7550	7650	5100

v	1000	−550	950	2500	650	−3300
	−2850	−2950	−3300	−3850	−3650	
r	−1850	−3500	−2350	−1350	−3000	−3300
s	3850	2400	4250	6350	4300	

p	−14600	−21850	−7500	3550
	11900	23400	15350	
k	−2700	1550	7850	3550
l	−26500	−45250	−22850	

s	3850	2400	4250
	4300	6350	
m	8150	8750	4250
n	−450	−3950	

Отсюда по формулам (28):

$$a_0 = 427,\quad a_1 = 1685,\quad a_2 = -6426,\quad a_3 = -1175,\quad a_4 = -783,$$
$$a_5 = -163,\quad a_6 = -304,\quad b_1 = -938,\quad b_2 = 1325,\quad b_3 = -87,$$
$$b_4 = -318,\quad b_5 = -398,\quad b_6 = 325.$$

Итак, получается разложение:

$$T = 427 + 1685\cos\varphi - 938\sin\varphi - 6426\cos 2\varphi + 1325\sin 2\varphi -$$
$$- 1175\cos 3\varphi - 87\sin 3\varphi - 783\cos 4\varphi - 318\sin 4\varphi - 163\cos 5\varphi -$$
$$- 398\sin 5\varphi - 304\cos 6\varphi + 325\sin 6\varphi + \ldots$$

или, объединяя и округляя:

$$T = 430 + 1930\sin(\varphi + 119^\circ) + 6560\sin(2\varphi + 282^\circ) +$$
$$+ 1180\sin(3\varphi + 266^\circ) + 845\sin(4\varphi + 248^\circ) + 430\sin(5\varphi + 202^\circ) +$$
$$+ 445\sin(6\varphi + 317^\circ) + \ldots$$

Сравнивая это разложение с разложением той же величины T, произведенным в n° **727**, 1), видим, что в первых трех гармониках получается более или менее удовлетворительное совпадение.

2) Предлагается читателю вычислить двадцать четыре ординаты кривой

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2,$$

о которой была речь в n° **727**, 3), и, пользуясь указанной схемой, найти приближенные значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

Ответ. $a_0 \doteq 0{,}334$; $a_1 \doteq 0{,}407$; $a_2 \doteq 0{,}104$; $a_3 \doteq 0{,}047$; $a_4 \doteq 0{,}028$; $a_5 \doteq 0{,}019$; $a_6 \doteq 0{,}014$, в то время как верные знаки будут:

$$a_0 \doteq 0{,}333;\quad a_1 \doteq 0{,}405;\quad a_2 \doteq 0{,}101;\quad a_3 \doteq 0{,}045;\quad a_4 \doteq 0{,}025;$$
$$a_5 \doteq 0{,}016;\quad a_6 \doteq 0{,}011.$$

Кроме приведенных схем для приближенного вычисления коэффициентов тригонометрического разложения функции, существуют и другие: для шестнадцати или тридцати двух ординат (обычны в морском деле при изучении девиации компасов), для тридцати шести ординат (употребительны в электротехнике) и т. д. Придуманы также вырезные ш а б л о н ы, автоматически устанавливающие расположение вычислений. Во всех этих случаях сущность приемов, с помощью которых достигаются упрощения при практическом вычислении коэффициентов Ф у р ь е, остается та же, что и выше.

730. Сопоставление приближенных и точных значений коэффициентов Фурье. Если функция $y = f(x)$ задана в промежутке $[0, 2\pi]$ аналитически и дважды дифференцируема, то погрешности найденных выше приближенных формул для коэффициентов Ф у р ь е могут быть установлены, как обычно [730]. Мы зададимся здесь другой целью, именно, мы выведем соотношения, связывающие п р и б л и ж е н н о е значение данного коэффициента с т о ч н ы м и значениями этого же и других коэффициентов. Эти соотношения не приводят к оценкам для погрешностей, но все же проливают свет на весь вопрос в целом и создают в нем надлежащую ориентацию.

Итак, предположим, что для рассматриваемой функции $y=f(x)$ в промежутке $[0, 2\pi]$ имеет место разложение Фурье:

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

Мы умышленно обозначаем здесь коэффициенты Фурье большими буквами, чтобы отличить их от приближенных значений их, которые будут обозначаться малыми буквами. Полагая в написанном равенстве $x=\frac{2i\pi}{k}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, мы вычислим те частные значения функции y_i, которые фигурируют в формулах (23), (24) и (25), дающих приближенные значения коэффициентов:

$$y_i = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{2in\pi}{k}.$$

Подставим эти величины в первую из этих формул; переставляя суммирования, найдем:

$$a_0 = \frac{1}{k}\left\{kA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos\frac{2in\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=1}^{k-1} \sin\frac{2in\pi}{k}\right\}.$$

Но, как легко видеть, суммы

$$\sum_{i=0}^{k-1} \cos\frac{2in\pi}{k}, \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \sin\frac{2in\pi}{k}$$

равны 0, за исключением того случая, когда n кратно k и первая сумма получает значение k (вторая сумма и в этом случае равна 0). Отсюда сразу получается

$$a_0 = A_0 + A_k + A_{2k} + A_{3k} + \ldots \tag{29}$$

Подставляя выражения для y_i в формулу (24) и снова переставляя суммирования, получим последовательно:

$$a_m = \frac{2}{k}\left\{A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} \cos i\frac{2n\pi}{k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} \sin i\frac{2n\pi}{k}\right\} =$$
$$= \frac{1}{k}\left\{2A_0 \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2m\pi}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2(n+m)\pi}{k} + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{k-1} \cos i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sum_{i=1}^{k-1} \sin i\frac{2(n+m)\pi}{k} + \right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{k-1} \sin i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right]\right\}.$$

И здесь также отличными от нуля (и при этом — равными k) будут лишь те суммы косинусов, у которых множитель $n \pm m$ оказывается кратным k, т. е. для значений n вида $pk \pm m$ (p — целое). Если для определенности считать $2m \leqslant k$, то придем к такому ряду для a_m:

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \ldots \tag{30}$$

Совершенно аналогично получается, что

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \ldots \tag{31}$$

Это и есть те формулы, которые мы хотели установить.

Мы усматриваем из них, что, скажем, a_m отличается от A_m суммой некоторых коэффициентов A с большими номерами, если только k велико, а m, наоборот, не слишком велико. Становится ясным, что важную роль в вопросе о точности приближений играет быстрота убывания коэффициентов Фурье, которая, как мы знаем [706—708], в свою очередь, связана с дифференциальными свойствами функции, продолженной на весь промежуток $(-\infty, +\infty)$. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется примерами 2) и 3) n° 727: обращаем внимание читателя на угловые точки графика во втором из них!

Полагая $k = 12$, мы будем иметь в частности (ограничиваясь для примера коэффициентами при косинусах):

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \ldots, \quad a_1 = A_1 + A_{11} + \ldots,$$
$$a_2 = A_2 + A_{10} + \ldots, \quad a_3 = A_3 + A_9 + \ldots$$

и наряду с этим

$$a_5 = A_5 + A_7 + \ldots, \quad a_6 = 2A_6 + \ldots (!),$$

и т. д. Отсюда видно, что за пределами первых двух-трех гармоник нельзя ждать сколько-нибудь удовлетворительной точности.

Результаты сразу улучшаются при переходе к $k = 24$:

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \ldots, \quad a_1 = A_1 + A_{23} + \ldots,$$
$$a_6 = A_6 + A_{18} + \ldots, \quad \text{и т. д.}$$

Здесь, вообще говоря, можно ждать хорошей точности для первых семи-восьми гармоник.

ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ (продолжение)*

§ 1. Операции над рядами Фурье. Полнота и замкнутость

731. Почленное интегрирование ряда Фурье. Предположим функцию $f(x)$, как обычно, абсолютно интегрируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$. Пусть ее ряд Фурье будет

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функцию

$$F(x) = \int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx, \tag{2}$$

очевидно, непрерывную и с ограниченным изменением [486, 7°; 568, 4°]; к тому же она имеет период 2π, ибо

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - \pi a_0 = 0. \tag{3}$$

В таком случае, по теореме n° 686, эта функция во всем промежутке разлагается в ряд Фурье:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \tag{4}$$

(который к тому же, согласно 699, равномерно сходится к ней).

---

* Глава XIX была посвящена, главным образом, разложению функций в сходящиеся ряды Фурье; в ней эти ряды изучались как вычислительный аппарат. В настоящей же главе мы становимся на более общую точку зрения и изложим ряд важных вопросов, представляющих преимущественно теоретический интерес.

Между коэффициентами рядов (1) и (4) существует простая связь. Действительно, если воспользоваться обобщенной формулой интегрирования по частям, установленной в n° 580, 9), то будем иметь (для $n \geqslant 1$):

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

т. е.

$$A_n = -\frac{b_n}{n}.$$

Аналогично, на этот раз с учетом равенства (3), получим

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

Для нахождения же A_0 положим в (4) $x = 0$:

$$\frac{A_n}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \tag{5}$$

Подставив в разложение (4) найденные значения коэффициентов, можем переписать его в виде

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n (1 - \cos nx)}{n}.$$

Отсюда, если учесть равенство (2), имеем

$$\int_0^x f(x) \, dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \, dx. \tag{6}$$

Очевидно, и для любого промежутка $[x', x'']$, где $-\pi \leqslant x' < x'' \leqslant \pi$, имеет место подобное же соотношение:

$$\int_{x'}^{x''} f(x) \, dx = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \, dx.$$

Таким образом, *интеграл от функции $f(x)$ получается почленным интегрированием соответствующего ей ряда Фурье.* Тот факт, что почленное интегрирование ряда Фурье оказывается всегда допустимым, тем более замечателен, что мы установили его, даже не делая предположения о сходимости самого ряда (1) к функции $f(x)$!

Ясно, что в качестве основного промежутка вместо $[-\pi, \pi]$ может быть выбран любой другой промежуток длины 2π. Точно так же все сказанное относится и к рядам, содержащим одни лишь косинусы или одни лишь синусы [689] и рассматриваемым в промежутке $[0, \pi]$.

Интегрированием известных тригонометрических разложений могут быть получены другие разложения. Член $\frac{a_0 x}{2}$ в (6), если угодно иметь тригонометрическое же разложение, следует перенести в другую часть равенства. Некоторого внимания требует к себе свободный член $\frac{A_0}{2}$: получить его в конечном виде удается либо непосредственным суммированием ряда (5), либо же интегрированием по формуле

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx.$$

Поясним это примером. Если проинтегрировать разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

[см. 690, 2)] от 0 до x, то получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{4} x^2.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4} x^2 - \frac{\pi}{2} x + c \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

причем c определяется либо как сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

либо как интеграл:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{4} x^2 \right) dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Таким образом, мы приходим к разложению, которое независимо было получено в 690, 9). Аналогично разложение в 7) (а) получается из разложения 7) (б) и т. д.

Замечание. Подчеркнем, что проведенным рассуждением попутно установлен такой факт: *какова бы ни была абсолютно интегрируемая в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \tag{5*}$$

где b_n — *коэффициенты при синусах в ее ряде Фурье, необходимо сходится* [ср. 692, 2°]. Ниже, в 758, мы воспользуемся этим замечанием.

732. Почленное дифференцирование ряда Фурье. Пусть в промежутке $[-\pi, \pi]$ задана непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(-\pi)=f(\pi)$ и имеющая (исключая разве лишь отдельные точки в конечном числе) производную $f'(x)$; пусть, далее, эта производная сама оказывается абсолютно интегрируемой в названном промежутке. Тогда

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx+f(0)$$

[310, 481] и, как мы только что видели, ряд Фурье (1) функции $f(x)$ получается из ряда Фурье функции $f'(x)$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n'\cos nx+b_n'\sin nx \tag{7}$$

почленным интегрированием, так как при наложенных на $f(x)$ условиях свободного члена в последнем разложении не будет:

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0.$$

В таком случае, очевидно, и обратно — *ряд* (7) *для производной* $f'(x)$ *может быть получен из ряда* (1), *отвечающего данной функции* $f(x)$, *почленным дифференцированием.*

Мы обращаем особое внимание читателя на ту роль, которую здесь играет предположение о периодичности функции $f(x)$. При нарушении этого условия свободный член $\frac{a_0'}{2}$ ряда Фурье для $f'(x)$ был бы отличен от нуля, и уже по одному этому упомянутый ряд не мог бы быть получен из ряда (1) почленным дифференцированием! Например, в случае разложения (a — не целое)

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{a^2-n^2}\sin nx$$

[664, 7) (б)] почленное дифференцирование приводит к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{a^2-n^2}\cos nx,$$

который заведомо никаким рядом Фурье быть не может, ибо его коэффициенты даже не стремятся к нулю [682].

Замечание. До сих пор мы говорили о возможности получения ряда Фурье (7) для производной $f'(x)$ путем почленного дифференцирования ряда Фурье исходной функции $f(x)$. При этом вовсе

не было речи о сходимости ряда (7) к функции $f'(x)$; эту сходимость надлежит устанавливать особо, пользуясь теми или другими достаточными признаками [684, 686].

Нужно отметить, что, ввиду появления при дифференцировании $\cos nx$ и $\sin nx$ натуральных множителей n, порядок малости коэффициентов понижается и ухудшаются шансы на сходимость. Между тем, при решении с помощью рядов Фурье задач математической физики часто приходится дифференцировать эти ряды, и даже неоднократно. Для обеспечения сходимости получаемых рядов иногда оказывается полезным предварительное выделение плохо сходящихся частей по методу А. Н. Крылова [710]. При этом сумма выделенной части, известная в конечном виде, дифференцируется непосредственно, а для остающегося ряда стараются добиться столь высокого порядка малости коэффициентов, чтобы и после дифференцирования получить все же равномерно сходящийся ряд.

733. Полнота тригонометрической системы. *Если непрерывная в промежутке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ имеет коэффициенты Фурье, все равные нулю, то и сама функция сводится тождественно к нулю.* Действительно, в этом случае, как ясно из равенства (6), при всех x будет

$$\int_0^x f(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

откуда, дифференцируя по x, именно ввиду непрерывности подинтегральной функции [305, 12°] и получим тождественно

$$f(x) = 0.$$

Иными словами, *кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая в промежутке $[-\pi, \pi]$* была бы ортогональна [679] ко всем функциям тригонометрической системы*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{9}$$

Этот именно факт и выражают, говоря, что *тригонометрическая система полна — в классе непрерывных функций.*

Если две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они необходимо тождественны, ибо их разность $f_1(x) - f_2(x)$ будет иметь коэффициенты Фурье, сплошь равные нулю. Таким образом, *непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.* Это — лишь другая формулировка свойства полноты тригонометрической системы.

Если обратиться к рассмотрению и разрывных функций, то положение вещей может оказаться другим. Функция, которая, скажем, лишь в конечном

* Или в каком-нибудь другом промежутке длины 2π.

числе точек отлична от нуля, уже не равна нулю «тождественно», но в то же время, очевидно, будет ортогональна к любой из функций (9), как, впрочем, и ко всякой интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) функции. Можно представить себе функции, отличные от нуля даже в бесконечном множестве точек и все же обладающие последним свойством. Такова, например, функция $f(x)$ [ср. **70**, 8), **300**, 1)], равная $\frac{1}{q}$, если x есть несократимая дробь вида $\pm\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}<\pi\right)$, а в прочих точках промежутка $[-\pi, \pi]$ равная 0.

Однако функция, которая в рассматриваемом промежутке ортогональна ко всякой вообще интегрируемой функции, не отличается «существенно» от нуля; мы будем называть такую функцию *эквивалентной нулю*.

Теперь можно доказать, что *абсолютно интегрируемая в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$, *коэффициенты Фурье которой все равны нулю, необходимо эквивалентна нулю.*

Действительно, если $g(x)$ — произвольная функция, интегрируемая в собственном смысле, то, в силу **579**, 1°,

$$\text{(R)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \text{(S)}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dF(x),$$

где $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$. При сделанных предположениях $F(x)=0$ [см. (8)], так что $f(x)$ ортогональна к $g(x)$.

Отсюда легко перейти к случаю, когда $g(x)$ интегрируема в несобственном смысле. Пусть, например, точка π будет ее единственной особой точкой. Тогда, полагая $g^*(x)=g(x)$ в $[-\pi, \pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ и $g^*(x)=0$ в $(\pi-\varepsilon, \pi]$, по доказанному будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi-\varepsilon} f\cdot g\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g^*\,dx=0.$$

Остается лишь перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Расширяя несколько понятие «полноты», можно утверждать теперь, что *тригонометрическая система* (9) *полна в классе абсолютно интегрируемых функций.* Смысл этого таков: *кроме функций, эквивалентных нулю, не существует абсолютно интегрируемой функции, которая в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *была бы ортогональна ко всем функциям* (9).

Наконец, если две абсолютно интегрируемые функции имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то их разность эквивалентна нулю. Если не считать такие функции «существенно» различными, то в некотором смысле можно сказать и здесь, что *абсолютно интегрируемая функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.*

Замечание. Все сказанное сохраняет свою силу и порознь для систем

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x, \ldots,\ \cos nx, \ldots$$

или

$$\sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \sin nx, \ldots,$$

но лишь в промежутке $[0, \pi]$.

734. Равномерная аппроксимация функций. Теоремы Вейерштрасса. Если какую-либо функцию $f(x)$ в промежутке $[a, b]$

«аппроксимируют»* с помощью другой, $g(x)$, то качество этой аппроксимации можно, в зависимости от обстоятельств, оценивать поразному. Но, естественно, в основу во всех случаях кладется рассмотрение разности

$$r(x) = f(x) - g(x).$$

Если мы одинаково заинтересованы в малом отклонении одной из функций от другой во всех отдельно взятых точках, то за меру приближения принимают их *максимальное отклонение* в промежутке, т. е. число

$$\delta = \sup_{a \leq x \leq b} |r(x)|.$$

В этом случае говорят о равномерной аппроксимации функции $f(x)$ с помощью функции $g(x)$.

Мы приведем две фундаментальные теоремы Вейерштрасса, относящиеся к равномерной аппроксимации непрерывных функций, во-первых, с помощью тригонометрических многочленов и, во-вторых, с помощью обыкновенных (алгебраических) многочленов.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию*

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такой тригонометрический многочлен

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

что равномерно для всех значений x в упомянутом промежутке будет

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Построим прежде всего такую кусочно-линейную функцию $\varphi(x)$, чтобы повсюду в $[-\pi, \pi]$ выполнялось неравенство

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Для этого разобьем промежуток $[-\pi, \pi]$ точками

$$-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_k = \pi$$

на столь малые части, чтобы в каждой из них колебание функции f было $< \frac{\varepsilon}{2}$. Функцию $\varphi(x)$ определим в промежутке $[-\pi, \pi]$, полагая

* То есть приближенно воспроизводят.

ее в каждом отдельном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ равной линейной функции

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

которая на концах промежутка совпадает с $f(x)$. По сути дела речь идет о вписывании ломаной линии в кривую, выражаемую уравнением $y = f(x)$. Если через m_i и M_i обозначить наименьшее и наибольшее значения функции f в i-м промежутке, то по условию $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$, и так как в этом промежутке значения обеих функций f и φ содержатся между m_i и M_i, то выполнение неравенства (11) во всем промежутке $[-\pi, \pi]$ удостоверено.

Функция $\varphi(x)$ подобно $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi);$$

но, сверх того, она, как кусочно-монотонная функция, имеет в этом промежутке ограниченное изменение [568, 1°]. При этих условиях, согласно признаку Дирихле—Жордана [699], $\varphi(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx.$$

Следовательно, если в качестве многочлена $T(x)$ взять n-ю частичную сумму этого ряда при достаточно большом n, то он будет отличаться от $\varphi(x)$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

сразу для всех рассматриваемых значений x.

Из (11) и (12) вытекает (10).

Возьмем теперь последовательность $\{\varepsilon_k\}$ убывающих до нуля положительных чисел и для каждого числа $\varepsilon = \varepsilon_k$ построим многочлен $T = T_k(x)$, о котором была речь в доказанной теореме; тогда получится последовательность $\{T_k(x)\}$ тригонометрических многочленов, которая сходится к функции $f(x)$ равномерно в промежутке $[-\pi, \pi]$. Переходя обычным образом [427] от последовательности к бесконечному ряду, получим другую формулировку теоремы, очевидно, равносильную прежней: *при указанных в теореме 1 условиях функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд, членами которого являются тригонометрические многочлены.*

Из теоремы 1 уже легко выводится

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такой целый алгебраический многочлен*

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n,$$

что равномерно для всех значений x в $[a, b]$ будет

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{13}$$

Простой подстановкой

$$x = a + \frac{x'}{\pi}(b - a)$$

можно свести дело к рассмотрению промежутка $[0, \pi]$, ибо многочлен, целый относительно x', очевидно, будет целым и относительно x. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что первоначально данный промежуток и есть $[0, \pi]$.

Распространим теперь функцию $f(x)$ на весь промежуток $[-\pi, \pi]$, полагая

$$f(-x) = f(x) \qquad (0 < x \leqslant \pi).$$

Функция сохранит непрерывность и, очевидно, будет удовлетворять условию $f(-\pi) = f(\pi)$. В таком случае по теореме 1 найдется такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что для всех значений x между $-\pi$ и π будет

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Если заменить каждую из тригонометрических функций, входящих в состав T, ее разложением по степеням x [404], то и функция T представится в виде суммы повсюду сходящегося степенного ряда:

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

В промежутке $[-\pi, \pi]$ этот ряд сходится равномерно; поэтому, если отождествить многочлен $P(x)$ с n-й частичной суммой этого ряда, при достаточно большом n, то для всех x в промежутке $[-\pi, \pi]$ будет

$$|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Остается сопоставить (14) и (15).

Как и выше, доказанной теореме можно дать другую формулировку: *функция $f(x)$, непрерывная в промежутке $[a, b]$, разлагается в этом промежутке в равномерно сходящийся ряд, членами которого являются целые алгебраические многочлены*

735. Аппроксимация функций в среднем. Экстремальные свойства отрезков ряда Фурье. При аппроксимации функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ с помощью другой функции $g(x)$ можно стать и на другую точку зрения, предпочитая вместо равномерной близости этих функций требовать, чтобы функции были близки лишь «в среднем». В этом случае за меру близости их можно взять их *среднее отклонение*

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |r(x)|\, dx$$

или, чего мы и будем держаться в последующем, *среднее квадратичное отклонение*

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x)\, dx}.$$

Вместо этого выражения, впрочем, удобнее рассматривать более простую величину:

$$\Delta = \int_a^b r^2(x)\, dx = (b-a)\, \delta''^2.$$

Обратимся вновь к рассмотрению произвольной *ортогональной* в промежутке $[a, b]$ системы функций $\{\varphi_m(x)\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, интегрируемых с их квадратами [679]. Пусть $f(x)$ — заданная в том же промежутке функция, также интегрируемая с квадратом, и n — фиксированное натуральное число. Поставим себе такую задачу: из всех линейных комбинаций первых $n+1$ функций φ

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(x) \tag{16}$$

при произвольном наборе коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ найти ту, которая осуществляет *наилучшее* — в смысле среднего квадратического отклонения — приближение к функции $f(x)$. Иными словами, требуется добиться наименьшего значения для величины

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2\, dx.$$

Подставив сюда вместо $\sigma_n(x)$ ее развернутое выражение, получим:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\, dx - 2\sum_{m=0}^{n} \gamma_m \int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n} \gamma_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x)\, dx + 2\sum_{k<m} \gamma_k\gamma_m \int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_m(x)\, dx.$$

Последняя сумма исчезает ввиду ортогональности нашей системы. Вводя постоянные

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx$$

и (обобщенные) коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx,$$

можно переписать выражение для Δ_n в виде

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m \gamma_m + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \gamma_m^2.$$

Чтобы под знаком суммы получить полные квадраты, нужно ввести туда еще члены $\lambda_m c_m^2$. Добавив их с плюсами и с минусами, окончательно получим:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m (\gamma_m - c_m)^2.$$

Теперь ясно, что Δ_n достигает своего наименьшего значения тогда, когда обращается в нуль последняя сумма, а это будет при

$$\gamma_0 = c_0,\ \gamma_1 = c_1, \ldots,\ \gamma_n = c_n.$$

Таким образом, *из всех многочленов вида* (16) *именно отрезок (обобщенного) ряда Фурье*

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

доставляет величине Δ_n *наименьшее возможное для нее значение*

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2. \qquad (17)$$

Снова наше внимание приковывается к коэффициентам Фурье как, в некотором смысле, «лучшим» из всех возможных! Важно отметить при этом, что коэффициенты, оказавшиеся «лучшими» при фиксированном n, сохраняют свою роль и при бо́льших значениях n, к ним лишь присоединяются еще новые коэффициенты!

Равенство (17) называют *тождеством Бесселя*. Из него получаются неравенства

$$\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx$$

и (если перейти к пределу при $n \to +\infty$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (18)$$

Это — *неравенство Бесселя*. Любопытно, что ряд в (18) оказывается всегда сходящимся, лишь бы функция $f(x)$ была интегрируема с квадратом.

При возрастании n величина δ_n убывает, поскольку в ее выражении (17) добавляются новые отрицательные слагаемые. Чем больше n, тем ближе сумма $s_n(x)$ «в среднем» подходит к рассматриваемой функции $f(x)$. Естественно возникает вопрос: можно ли за счет увеличения n добиться сколь угодно малого среднего квадратического отклонения, т. е. стремится ли δ_n к 0 при $n \to \infty$?

Если это выполняется, то говорят, что сумма $s_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ «в среднем» (что — подчеркнем это — вовсе не предполагает «точечной» сходимости $s_n(x)$ к $f(x)$ в обычном смысле слова). Из тождества Бесселя ясно, что тогда (и только тогда), имеет место равенство [ср. (18)]:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Следуя В. А. Стеклову, мы будем называть его *уравнением замкнутости*. Обычно, впрочем, его называют *формулой Парсеваля* (M. A. Parseval), по имени ученого, который еще в начале XIX века рассматривал подобную формулу для тригонометрической системы (без какого-либо обоснования).

Если уравнение замкнутости выполняется для каждой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, то самоё систему $\{\varphi_n(x)\}$ называют *замкнутой*.

Применим теперь все сказанное в частности к тригонометрической системе (9). Вместо сумм вида (16) придется рассматривать тригонометрические многочлены

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{n} A_m \cos mx + B_m \sin mx$$

и исследовать осуществляемое ими приближение «в среднем», которое характеризуется величиной

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx.$$

Оказывается, что при фиксированном n *наименьшее значение этой величине доставляет соответствующий отрезок ряда Фурье*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

Само же это наименьшее значение дается равенством

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2) \right\} \tag{19}$$

(«тождество Бесселя»). Из него вытекает, как и в общем случае, сходимость ряда, составленного из квадратов коэффициентов Фурье:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$$

(«неравенство Бесселя»).

Для рассматриваемой конкретной системы (9) мы в состоянии полностью решить поставленный в общем случае вопрос, что и будет выполнено в следующем n°.

736. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Ляпунова. Имеет место следующая замечательная теорема, строгое доказательство которой (для случая ограниченной функции) впервые было дано А. М. Ляпуновым.

Теорема. *Какова бы ни была интегрируемая с квадратом функция $f(x)$, всегда*

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0,$$

и выполняется «уравнение замкнутости»

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx. \tag{20}$$

Доказательство мы разобьем на несколько этапов.

1°. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то по первой теореме Вейерштрасса существует такой тригонометрический полином $T(x)$ (порядок которого мы здесь обозначим через N), что

$$|f(x) - T(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}},$$

где ε — произвольное наперед заданное положительное число. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 \, dx < \varepsilon.$$

По экстремальному же свойству отрезка ряда Фурье [735], поскольку $T(x)$ при желании можно рассматривать как тригонометрический полином любого порядка $n \geqslant N$, и подавно, при $n \geqslant N$

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx < \varepsilon,$$

так что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

2°. Для того чтобы распространить это заключение и на другие случаи, установим одно вспомогательное неравенство.

Если интегрируемая с квадратом функция $f(x)$ представляется в виде суммы $f'(x) + f''(x)$ двух подобных же функций, то, обозначая штрихами относящиеся к ним величины, будем иметь

$$f(x) - s_n(x) = [f'(x) - s'_n(x)] + [f''(x) - s''_n(x)],$$

откуда

$$[f(x) - s_n(x)]^2 \leqslant 2\{[f'(x) - s'_n(x)]^2 + [f''(x) - s''_n(x)]^2\}\,^*$$

и, далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx \leqslant 2\left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - s'_n(x)]^2 \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} [f''(x) - s''_n(x)]^2 \, dx\right\}$$

или, короче:

$$\delta_n \leqslant 2\{\delta'_n + \delta''_n\}.$$

Заметим, наконец, что из тождества Бесселя [см. (19)], примененного к функции f', следует

$$\delta''_n \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 \, dx.$$

Таким образом, окончательно

$$\delta_n \leqslant 2\left\{\delta'_n + \int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx\right\}. \tag{21}$$

Это и есть нужное нам неравенство.

---

* Мы пользуемся здесь элементарным неравенством

$$(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2).$$

3°. Пусть теперь функция $f(x)$ будет интегрируема в собственном смысле (а значит ограничена) в промежутке $[-\pi, \pi]$. Изменяя в случае надобности значение функции на одном из концов промежутка, можно считать, что $f(-\pi)=f(\pi)$. Построим вспомогательную функцию $\varphi(x)$, как мы делали это при доказательстве первой теоремы Вейерштрасса [734], причем дробление промежутка на этот раз выберем так, чтобы было

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega},$$

где ε — наперед взятое по произволу положительное число, ω_i — колебание функции f в i-м частичном промежутке, а Ω — полное колебание функции f во всем промежутке от $-\pi$ до π [297].

Мы положим

$$f' = \varphi, \quad f'' = f - \varphi.$$

В силу 1°, $\delta_n' \to 0$ при $n \to \infty$, так что, начиная с некоторого места,

$$\delta_n' < \frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, так как в i-м частичном промежутке

$$|f''(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \omega_i,$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''^2 dx \leqslant \sum_i \omega_i^2 \Delta x_i \leqslant \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Теперь, ввиду (21), уже ясно, что для достаточно больших n будет

$$\delta_n < \varepsilon,$$

и т. д.

4°. Пусть, наконец, функция $f(x)$ будет интегрируема в несобственном смысле, но обязательно с квадратом. Для простоты предположим, что при этом единственной особой точкой для f (и для f^2) будет $x=\pi$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\eta > 0$, что будет

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим в этом случае

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } -\pi \leqslant x < \pi - \eta, \\ 0 & \text{для } \quad x \geqslant \pi - \eta \end{cases}$$

и, наоборот,

$$f''(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -\pi\leqslant x<\pi-\eta, \\ f(x) & \text{для } \quad x\geqslant \pi-\eta. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2\,dx=\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2\,dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, к функции f', интегрируемой в собственном смысле, приложим только что доказанный результат. С помощью (21) заключаем, что и здесь $\delta_n\to 0$. Этим завершается доказательство теоремы Ляпунова.

Пользуясь установленной в предыдущем n° терминологией, можно сказать, что *тригонометрическая система является замкнутой*.

737. Обобщенное уравнение замкнутости. Пусть даны две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, интегрируемые в промежутке $[-\pi, \pi]$ с квадратами. Как известно [483, 6)], тогда функции $f+\varphi$ и $f-\varphi$ также будут интегрируемы с квадратами. Если обозначить, соответственно, через a_m, b_m и α_m, β_m коэффициенты Фурье функций f и φ, то для функций $f\pm\varphi$, очевидно, коэффициентами Фурье будут $a_m\pm\alpha_m$, $b_m\pm\beta_m$.

Применив уравнение замкнутости порознь к функциям $f+\varphi$ и $f-\varphi$, получим:

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m+\alpha_m)^2+(b_m+\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f+\varphi]^2\,dx$$

и

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m-\alpha_m)^2+(b_m-\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-\varphi]^2\,dx.$$

Если почленно вычесть эти два равенства одно из другого, то, принимая во внимание тождество

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$$

придем к *обобщенному уравнению замкнутости*

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{22}$$

Уравнение (20) получается отсюда при $\varphi=f$. Эту общую формулу также называют формулой Парсеваля.

Обобщенное уравнение замкнутости (22) теснейшим образом связано с вопросом о почленном интегрировании рядов Фурье. Подставляя вместо коэффициентов α_m, β_m их интегральные выражения:

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos mx\, dx, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin mx\, dx,$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

перепишем равенство (22) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \varphi(x)\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Отсюда ясно, что упомянутое равенство совершенно равносильно утверждению: *ряд Фурье функции $f(x)$ (интегрируемой с квадратом) по умножении всех его членов на произвольную функцию $\varphi(x)$ (также интегрируемую с квадратом) можно в промежутке от $-\pi$ до π интегрировать почленно* (в том смысле, что в результате этого получится интеграл от произведения обеих функций!).

Конечно, промежуток $[-\pi, \pi]$ здесь может быть заменен любой его частью $[x', x'']$, ибо это попросту сводится к замене, скажем, функции φ другой функцией, которая совпадает с φ в промежутке $[x', x'']$ и равна нулю вне этого промежутка. При $\varphi = 1$ мы возвращаемся к тому утверждению, которое было установлено в **731**, впрочем, с одним ограничением: функция f все же здесь предполагается интегрируемой с квадратом.

Формулу (22) можно доказать и при несимметричных условиях, налагаемых на f и φ, облегчая эти условия для одной из функций, но зато отягчая их для другой. Так, Юнгом (W. H. Young) была высказана следующая теорема: *формула* (22) *имеет место в предположении, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *а функция* $\varphi(x)$ *имеет ограниченное изменение.*

Доказательство опирается на одно свойство частичных сумм $\sigma_n(x)$ ряда Фурье функции $\varphi(x)$, которое будет установлено лишь впоследствии [744, 5°]: эти суммы равномерно ограничены, т. е. для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$|\sigma_n(x)| \leqslant L \qquad (L = \text{const.}).$$

Примем это свойство пока без доказательства.

Не умаляя общности рассуждений, можно предположить, что точки разрыва функции $\varphi(x)$ все являются регулярными [658], так что всегда

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2};$$

в таком случае по теореме Дирихле — Жордана [686] будем иметь для всех значений x

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x) = \varphi(x),$$

и одновременно

$$\lim_{n \to \infty} f(x)\,\sigma_n(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Если $f(x)$ ограничена:

$$|f(x)| \leqslant M \qquad (M = \text{const.}),$$

так что и

$$|f(x)\,\sigma_n(x)| \leqslant ML \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то по теореме Арцела [526] заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{23}$$

Справедливость этого равенства может быть установлена и для случая неограниченной (но абсолютно интегрируемой) функции $f(x)$. Пусть ее единственной особой точкой будет $x = \pi$. Тогда сначала по заданному $\varepsilon > 0$ возьмем $\eta > 0$ так, чтобы было

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} |f(x)|\,dx < \varepsilon;$$

вместе с этим будут выполняться и неравенства

$$\left|\int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| < L\varepsilon, \qquad \left|\int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx\right| < L\varepsilon$$

(последнее — каково бы ни было n). В промежутке же $[-\pi,\ \pi-\eta]$, где функция $f(x)$ ограничена, имеем аналогично (23):

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда уже легко получается и само равенство (23).

Доказанное равенство есть лишь другая форма записи для формулы (22), ибо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx\right]dx =$$

$$= \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m\alpha_m + b_m\beta_m).$$

Обобщенное уравнение замкнутости, установленное при иных условиях, чем раньше, снова может быть перефразировано, как утверждение, относящееся к почленному интегрированию ряда Фурье (и притом в двух различных формулировках в связи с несимметричностью условий, налагаемых здесь на функции f и φ). Заметим, что на этот раз предложение n° **731** получается как следствие уже с полной общностью.

738. Умножение рядов Фурье. Пусть даны две функции f и φ с их рядами Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx.$$

Задача, которую мы сейчас ставим перед собой, состоит в том, чтобы написать ряд Фурье для произведения $f\varphi$ этих функций:

$$f(x)\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mx + B_m \sin mx,$$

т. е. выразить его коэффициенты через данные коэффициенты a, b и α, β.

Предположим, что функции f и φ интегрируемы с их квадратами*, так что для них имеет место обобщенное уравнение замкнутости (22). Тогда оно непосредственно приводит к выражению для коэффициента A_0:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi\, dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m\alpha_m + b_m\beta_m).$$

Нетрудно и определение коэффициентов A_k, B_k (при $k = 1, 2, 3, \ldots$) тоже свести к использованию формулы (22). Выражение для A_k

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi \cos kx\, dx$$

отличается от выражения для A_0 тем, что φ заменено на $\varphi \cos kx$. Постараемся же найти коэффициенты Фурье для этой последней функции:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m+k)\, x\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(m-k)\, x\, dx \right\} = \frac{1}{2}(\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}(\beta_{m+k} + \beta_{m-k}),$$

* Вместо этого можно было бы предположить функцию f абсолютно интегрируемой, а φ — имеющей ограниченное изменение.

причем эти формулы годятся не только для $m \geqslant k$, но и для $m < k$, если условиться полагать

$$\alpha_{-h} = \alpha_h, \quad \beta_{-h} = -\beta_h.$$

Теперь, снова по формуле (22),

$$A_k = \frac{a_0 \alpha_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}) + b_m (\beta_{m+k} + \beta_{m-k})].$$

Аналогично получается, что

$$B_k = \frac{a_0 \beta_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\beta_{m+k} - \beta_{m-k}) - b_m (\alpha_{m+k} - \alpha_{m-k})].$$

Этими формулами и решается поставленная задача.

Интересно отметить, что те же выражения для коэффициентов A, B могут быть получены путем формального перемножения рядов Фурье для функций f и φ, если в последующем заменить произведения косинусов и синусов их суммами или разностями и объединить подобные члены. Это обстоятельство тем более замечательно, что здесь мы вовсе не предполагаем даже сходимости перемножаемых рядов.

739. Некоторые приложения уравнения замкнутости. Уравнение замкнутости находит многообразные приложения как в самой теории рядов Фурье, так и в других областях анализа. Мы рассмотрим в виде примера некоторые из них.

1°. *Абсолютная сходимость рядов Фурье.* Акад. С. Н. Бернштейну принадлежит следующая теорема: *если функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant L |h|^{\alpha}$$

с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

*где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f**.

Заметим прежде всего, что, если

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

то

$$f(x \pm h) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m \cos mh \pm b_m \sin mh) \cos mx + \\ + (b_m \cos mh \mp a_m \sin mh) \sin mx]$$

* Это влечет за собой сходимость порознь рядов $\Sigma |a_n|$ и $\Sigma |b_n|$ и, следовательно, абсолютную сходимость соответствующего ряда Фурье.

[690, 26)]. В таком случае

$$f(x+h)-f(x-h)\sim 2\sum_{m=1}^{\infty}\sin mh\,(b_m\cos mx-a_m\sin mx)$$

и, по уравнению замкнутости,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx=4\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m^2\sin^2 mh.$$

Если учесть теперь само условие Липшица, то интеграл слева оценится числом $Ch^{2\alpha}$, где C — постоянная. Взяв произвольное натуральное число N, положим $h=\frac{\pi}{2N}$; тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m^2\sin^2\frac{m\pi}{2N}\leqslant C_1N^{-2\alpha}$$

(здесь C_1 означает новую постоянную), а следовательно, и подавно

$$\sum_{m>\frac{N}{2}}^{N}\rho_m^2\sin^2\frac{m\pi}{2N}\leqslant C_1N^{-2\alpha}.$$

Но для $m>\frac{N}{2}$, очевидно,

$$\sin^2\frac{m\pi}{2N}>\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},$$

и можно утверждать, что

$$\sum_{m>\frac{N}{2}}^{N}\rho_m^2\leqslant 2C_1N^{-2\alpha}.$$

В частности, если выбрать $N=2^\nu$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots$), имеем

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_m^2\leqslant 2C_1\cdot 2^{-2\nu\alpha}.$$

Но по известному неравенству 133 (5а)

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_m\leqslant\left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\rho_m^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}1^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2C_1}\cdot 2^{-\nu\alpha}\cdot 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)}=\sqrt{C_1}\,2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}.$$

Суммируя все подобные неравенства при $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$\sum_{m=2}^{\infty} \rho_m \leqslant \sqrt{C_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} < +\infty,$$

ибо при $\alpha > \frac{1}{2}$ ряд справа сходится. Теорема доказана.

Полученный результат предельно точен: примером можно показать, что при $\alpha = \frac{1}{2}$ он уже не имеет места.

2°. *Доказательство некоторых неравенств.* Уравнение замкнутости применяется к доказательству ряда полезных неравенств.

Начнем с неравенств, указанных впервые В. А. Стекловым и с успехом использованных им в математической физике. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[0, \pi]$ и имеет в нем (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную $f'(x)$, интегрируемую с квадратом. Тогда, если выполняется одно из двух условий

(а) $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

или

(б) $f(0) = f(\pi) = 0$,

имеет место неравенство

$$\int_0^{\pi} [f'(x)]^2\,dx \geqslant \int_0^{\pi} [f(x)]^2\,dx, \tag{24}$$

причем равенство осуществляется в случае (а) лишь для функций вида $f(x) = A\cos x$, а в случае (б) — для функций вида $f(x) = B\sin x$.

Начнем со случая (а). В этом случае в разложении функции $f(x)$ в промежутке $[0, \pi]$ по косинусам отсутствует свободный член:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Так как при четном продолжении функции $f(x)$ на промежуток $[-\pi, 0]$ выполняется условие $f(-\pi) = f(\pi)$, то по правилу п° 732

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx.$$

Теперь согласно уравнению замкнутости, которое, как легко видеть, имеет место в промежутке $[0, \pi]$ и для ряда по косинусам и для ряда по синусам, будет

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

и одновременно

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f'(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

Отсюда непосредственно и вытекает неравенство (24), причем ясно, что равенство может иметь место, лишь если

$$a_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

т. е. если $f(x) = a_1 \cos x$.

В случае (б) аналогично рассмотрим для функции $f(x)$ ряд по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

При нечетном продолжении функции $f(x)$ на промежуток $[-\pi, 0]$, именно в силу условия (б), сохранится непрерывность при $x = 0$ и выполнится требование $f(-\pi) = f(\pi)$, так что снова приложимо правило n° **732**:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx.$$

Применение уравнения замкнутости и здесь сразу решает вопрос.

Впоследствии Виртингер (W. Wirtinger) установил несколько более общее неравенство. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем (за исключением разве лишь конечного числа точек) производную $f'(x)$, интегрируемую с квадратом. Тогда, если выполнены условия

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

имеет место неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx, \tag{25}$$

причем равенство осуществляется для функций вида $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

Доказательство, как и выше, сводится к применению уравнения замкнутости к рядам

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\,(b_n \cos nx - a_n \sin nx).$$

Неравенства Стеклова получаются из (25), если, в частности, положить функцию $f(x)$ (а) четной или (б) нечетной.

Ниже мы приводим пример установления более сложного неравенства.

3°. *Изопериметрическая задача:* требуется среди всевозможных замкнутых плоских кривых, имеющих данную длину L, найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.

Известно, что решением является окружность; приведем чисто аналитическое доказательство этого факта, принадлежащее Гурвицу (A. Hurwitz), причем ограничимся рассмотрением гладких кривых.

Итак, пусть замкнутая гладкая кривая (L) длины L задана параметрически, причем в роли параметра фигурирует длина дуги s, отсчитываемая от некоторой точки:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant L).$$

Переходя к параметру $t = \frac{2\pi s}{L}$, изменяющемуся от 0 до 2π, перепишем эти уравнения в виде

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi);$$

особо отметим выполнение условий

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ и } \psi(0) = \psi(2\pi).$$

В силу **732**, ясно, что из рядов Фурье, в которые разлагаются функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mt + b_m \sin mt,$$

$$\psi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos mt + d_m \sin mt,$$

ряды Фурье для их производных получаются почленным дифференцированием:

$$\varphi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} mb_m \cos mt - ma_m \sin mt,$$

$$\psi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} md_m \cos mt - mc_m \sin mt.$$

Применяя здесь уравнение замкнутости, получим:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(t)]^2 \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\psi'(t)]^2 \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (c_m^2 + d_m^2).$$

Так как

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = (s_t')^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}, \tag{26}$$

то отсюда

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2). \tag{27}$$

С другой стороны, площадь F фигуры, ограниченной рассматриваемой кривой, по известной формуле [526 (9)] выразится так:

$$F = \int_{(L)} x \, dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} \, dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \psi'(t) \, dt\,^*. \tag{28}$$

---

* Если предположить (что мы вправе сделать), что при изменении параметра t от 0 до 2π кривая описывается в *положительном* направлении.

Воспользовавшись на этот раз обобщенным уравнением замкнутости, представим выражение для площади в виде

$$F=\pi\sum_{m=1}^{\infty} m\,(a_m d_m - b_m c_m). \tag{29}$$

В таком случае, вычитая из равенства (27) равенство (29), умноженное на 4π, получим:

$$L^2-4\pi F=2\pi^2\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m^2(a_m^2+b_m^2+c_m^2+d_m^2)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{\infty} 2m\,(a_m d_m-b_m c_m)\right\}=$$

$$=2\pi^2\left\{\sum_{m=1}^{\infty}(ma_m-d_m)^2+\sum_{m=1}^{\infty}(mc_m+b_m)^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=2}^{\infty}(m^2-1)(b_m^2+d_m^2)\right\}$$

и, так как все слагаемые суммы в фигурных скобках неотрицательны, всегда будет выполняться «изопериметрическое неравенство»

$$L^2-4\pi F\geqslant 0,$$

т. е.

$$F\leqslant\frac{L^2}{4\pi}.$$

Знак равенства имеет место — и одновременно площадь F получает наибольшее из возможных для нее значений — лишь в том случае, если все слагаемые — нули, т. е. если

$$d_m=ma_m,\ b_m=-mc_m,\quad b_m=d_m=0.$$
$$(m=1,\,2,\,3,\,\ldots)\qquad (m=2,\,3,\,\ldots)$$

Это равносильно соотношениям

$$d_1=a_1,\quad c_1=-b_1,\quad a_m=b_m=c_m=d_m=0\ \text{ для }\ m\geqslant 2.$$

Но тогда

$$x=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos t+b_1\sin t,$$

$$y=\frac{1}{2}c_0-b_1\cos t+a_1\sin t,$$

откуда

$$\left(x-\frac{1}{2}a_0\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}c_0\right)^2=a_1^2+b_1^2,$$

и наша кривая есть не что иное, как окружность! Этим и доказано экстремальное свойство круга.

Заметим, впрочем, что если воспользоваться неравенством (25)*, то изопериметрическое неравенство можно установить, уже не прибегая к уравнению замкнутости. Действительно, мы можем, не умаляя общности, предположить, что центр тяжести кривой лежит на оси y, т. е. что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0. \tag{30}$$

Тогда из (26) и (28) имеем

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 + \psi'^2]\,dt - 2\int_0^{2\pi} \varphi\psi'\,dt = \int_0^{2\pi} [\varphi - \psi']^2\,dt + \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 - \varphi^2]\,dt \geqslant 0$$

— именно в силу неравенства (25), с учетом условия (30). При этом равенство может осуществиться, лишь если $\varphi(t) = A\cos t + B\sin t$ и $\psi'(t) = \varphi(t)$, откуда $\psi(t) = A\sin t - B\cos t + C$, и т. д.

§ 2. Применение методов обобщенного суммирования к рядам Фурье

740. Основная лемма. Для того чтобы в дальнейшем изложении избежать повторений, мы предпошлем ему некоторые общие соображения, составляющие существо ряда последующих доказательств. Рассмотрим интеграл общего вида ($a > 0$)

$$J(\lambda) = \int_0^a g(t)\,\Phi(t, \lambda)\,dt, \tag{1}$$

содержащий параметр λ. Областью изменения параметра пусть будет некоторое множество $\Lambda = \{\lambda\}$, имеющее точку сгущения ω, конечную или нет. Относительно функции $\Phi(t, \lambda)$ предположим, что она определена для значений t в $[0, a]$ и значений λ из Λ, и при постоянном λ интегрируема по t в собственном смысле. Кроме того, наложим на функцию $\Phi(t, \lambda)$ следующие три требования:

1°. $\Phi(t, \lambda) \geqslant 0$.

2°. Каково бы ни было λ из Λ,

$$\int_0^a \Phi(t, \lambda)\,dt = 1\ ^{**}$$

и, наконец,

---

* Которое, очевидно, имеет место и при замене промежутка $[-\pi, \pi]$ промежутком $[0, 2\pi]$.

** Достаточно было бы предположить, что

$$\lim_{\lambda \to \omega} \int_0^a \Phi(t, \lambda)\,dt = 1,$$

но мы в этом обобщении не заинтересованы.

3°. При любом δ, $0<\delta<a$, величина

$$M(\delta, \lambda)=\sup_{t\geqslant\delta}\Phi(t, \lambda)$$

при $\lambda\to\omega$ стремится к нулю.

Функцию Φ, удовлетворяющую этим условиям, для краткости будем называть «положительным ядром».

Лемма. *Если $\Phi(t, \lambda)$ есть положительное ядро, а $g(t)$ — произвольная, абсолютно интегрируемая функция, для которой существует предел $g(+0)$, то*

$$\lim_{\lambda\to\omega}J(\lambda)=g(+0).$$

Доказательство. Ввиду 2°,

$$g(+0)=\int_0^a g(+0)\,\Phi(t, \lambda)\,dt;$$

вычитая это равенство почленно из (1), получим:

$$J(\lambda)-g(+0)=\int_0^a [g(t)-g(+0)]\,\Phi(t, \lambda)\,dt.$$

Задавшись произвольным числом $\varepsilon>0$, возьмем теперь $\delta\,(0<\delta<a)$ так, чтобы при $0<t\leqslant\delta$ было

$$|g(t)-g(+0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и разобьем предшествующий интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_0^a=\int_0^\delta+\int_\delta^a=J_1+J_2.$$

Для первого из них, во внимание к 1° и 2°, сразу получаем оценку:

$$|J_1|\leqslant\int_0^\delta|g(t)-g(+0)|\,\Phi(t, \lambda)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\delta\Phi(t, \lambda)\,dt<\frac{\varepsilon}{2},$$

и притом независимо от λ. С другой стороны,

$$|J_2|\leqslant\int_\delta^a|g(t)-g(+0)|\,\Phi(t, \lambda)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M(\delta, \lambda)\int_0^a|g(t)-g(+0)|\,dt. \tag{2}$$

В силу 3°, $J_2 \to 0$, так что для значений λ, достаточно близких к ω, будет $|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, а вместе с этим и

$$|J(\lambda) - g(+0)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

К сказанному сделаем еще такое дополнение. Предположим, что функция g, кроме переменной t, зависит еще от одной переменной x $(0 \leqslant x \leqslant a)$:

$$g = g(t, x),$$

но при постоянном x удовлетворяет прежним условиям. Тогда, *если* 1) $g(t, x)$ *равномерно ограничена при всех* t *и* x:

$$|g(t, x)| \leqslant L$$

и 2) *стремление* $g(t, x)$ *к* $g(+0, x)$ *осуществляется равномерно относительно* x, *то и интеграл*

$$J(\lambda, x) = \int_0^a g(t, x)\, \Phi(t, \lambda)\, dt$$

при $\lambda \to \omega$ *стремится к пределу* $g(+0, x)$ *равномерно относительно* x.

Действительно, в силу 2) число δ, о котором была речь в предшествующем рассуждении, можно выбрать независимо от x. Далее, так как, в силу 1),

$$|g(t, x) - g(+0, x)| \leqslant 2L,$$

то неравенство (2) можно заменить таким:

$$|J_2| \leqslant 2La\, M(\delta, \lambda),$$

где справа уже нет никакой зависимости x. Отсюда ясно, что для значений λ, достаточно близких к ω, неравенство $|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, а с ним и неравенство

$$|J(\lambda, x) - g(+0, x)| < \varepsilon,$$

будет выполняться сразу для всех значений x, что и требовалось доказать.

741. Суммирование рядов Фурье по методу Пуассона—Абеля. Пусть $f(x)$ снова означает функцию с периодом 2π, абсолютно интегрируемую в любом конечном промежутке. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{3}$$

и при произвольно фиксированном x применим к нему метод обобщенного суммирования Пуассона—Абеля [418]. С этой целью умножим члены этого ряда по порядку на r^m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, где $0<r<1$, и составим ряд

$$f(r,\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{4}$$

Так как коэффициенты a_m, b_m при $m\to\infty$ стремятся к нулю [656], то они ограничены в их совокупности:

$$|a_m|,\ |b_m| \leqslant K \qquad (K=\text{const.}),$$

так что ряд (4) мажорируется просто прогрессией $2K\sum\limits_{0}^{\infty} r^m$ и заведомо сходится.

Чтобы облегчить исследование поведения его суммы $f(r,\ x)$ при $r\to 1$, представим ее в виде интеграла. Если заменить в (4) коэффициенты a_m, b_m их интегральными выражениями

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du, \qquad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du,$$
$$(m=0,\ 1,\ 2\ldots) \qquad\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

то получим сначала

$$f(r,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos m(u-x)\,du,$$

а затем

$$f(r,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x)\right\}du.$$

Переход этот мотивируется ссылкой на следствие, установленное в n° **510**: равномерно (относительно x) сходящийся ряд в фигурных скобках, по умножении его членов на абсолютно интегрируемую функцию, можно интегрировать почленно. Так как сумма упомянутого ряда нам известна [см., например, **741**, 2)]:

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(u-x)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2},$$

то окончательно приходим к такому выражению:

$$f(r,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du. \tag{5}$$

Этот замечательный интеграл, называемый *интегралом Пуассона* (S. D. Poisson), играет важную роль во многих вопросах анализа.

Фактически и ряд (4) и интеграл (5), к которому этот ряд приводится, были рассмотрены Пуассоном задолго до появления идеи «обобщенного суммирования», но рассуждения автора не были достаточно строгими. Точную теорию интеграла Пуассона дал Шварц (H. A. Schwarz).

Теорема. *Пусть для функции $f(x)$ в рассматриваемой точке x существуют пределы справа и слева $f(x\pm 0)$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0} f(r, x) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (6)$$

В частности, в точке непрерывности этот предел равен $f(x)$.

Если же функция $f(x)$ везде непрерывна, то $f(r, x)$ стремится к $f(x)$ равномерно относительно x.*

Доказательство. Преобразуя интеграл Пуассона (5) так же, как мы в свое время преобразовали интеграл Дирихле [681], получим:

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt. \qquad (7)$$

Желая применить к этому интегралу лемму предыдущего n°, мы положим

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = g(t),$$

а в качестве ядра возьмем функцию

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \qquad (8)$$

(«ядро Пуассона»). Здесь роль параметра λ играет r, область его изменения есть промежуток $[0, 1)$, а $\omega = 1$. Покажем, что функция Φ удовлетворяет всем требованиям, предъявленным в предыдущем n° к положительному ядру.

Прежде всего $\Phi(t, r) > 0$ [см. требование 1°]. Действительно, при $r < 1$ числитель дроби (8), очевидно, положителен; то же заключение легко сделать и о знаменателе, если представить его в виде

$$1-2r\cos t+r^2 = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}. \qquad (9)$$

* Напомним, что мы предполагаем функцию $f(x)$ имеющей период 2π.

Если, далее, положить в (7) $f \equiv 1$, то и $f(r, x) \equiv 1$, и мы получаем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\, dt = 1,$$

т. е. выполняется требование 2°. Наконец, при $\delta \leqslant t \leqslant \pi$ (если число δ произвольно выбрано между 0 и π) будет $\sin\frac{t}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$, так что [см. (9)]

$$1 - 2r\cos t + r^2 \geqslant 4r\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Отсюда

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi(t, r) \leqslant \frac{1}{\pi}\, \frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Очевидно, $M(\delta, r) \to 0$ при $r \to 1$ (и фиксированном δ); выполнено и требование 3°.

В таком случае на основании упомянутой леммы имеем

$$\lim_{r\to 1-0} f(r, x) = \lim_{t\to +0} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь функция $f(x)$ будет везде непрерывна. Тогда она необходимо ограничена: $|f(x)| \leqslant K$, а вместе с этим и

$$\left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \right| \leqslant K.$$

Кроме того, ввиду равномерной непрерывности функции $f(x)$ выражение

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

стремится при $t \to +0$ к своему пределу $f(x)$ равномерно относительно x. Этим на основании дополнительного замечания предыдущего n° оправдывается и заключительное утверждение теоремы.

Итак, доказанная теорема учит, что *в точке x, где функция $f(x)$ непрерывна или, в крайнем случае, имеет разрыв первого рода, ряд Фурье* (3) *суммируем по методу Пуассона—Абеля, причем «обобщенной суммой» ряда оказывается*

$$f(x) \quad \text{или} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

смотря по случаю.

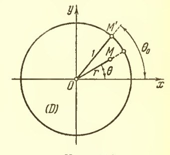
Замечание. Если функция $f(x)$ первоначально была задана лишь в промежутке $[-\pi, \pi]$, то, переходя обычным образом [687] к периодической функции, легко усмотрим, что для $-\pi < x < \pi$ все остается по-старому, а для $x = \pm\pi$ пределом интеграла Пуассона, или «обобщенной суммой» ряда, будет

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

742. Решение задачи Дирихле для круга. Интеграл Пуассона, изученный в предыдущем п°, может быть использован при решении так называемой *задачи Дирихле* для одного простого, но важного частного случая. Напомним, что функция $u = u(x, y)$ называется гармонической в некоторой области, если она в этой области непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{10}$$

(«уравнение Лапласа»). Рассмотрим конечную область (D), ограниченную замкнутым контуром (L). Тогда задача Дирихле для этой области формулируется следующим образом: *на контуре (L) произвольно задана непрерывная функция точки; требуется же найти такую непрерывную в замкнутой области (D) и гармоническую внутри нее функцию $u = u(x, y)$, которая на контуре совпадала бы с заданной функцией**. Мы дадим решение этой задачи для случая, когда область (D) есть круг, описанный вокруг начала радиусом 1 (к этому, очевидно, легко приводится и случай произвольного круга).



Черт. 145.

Итак, пусть на окружности (L) названного круга задана некоторая непрерывная функция точки. Если положение точки на окружности определять полярным углом θ (черт. 145), то это равносильно заданию непрерывной (и, очевидно, имеющей период 2π) функции $f(\theta)$. Нам удобно и внутри круга (D) перейти к полярным координатам r, θ, заменив уравнение (10) соответственно преобразованным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \tag{10*}$$

[см. 222, 1)]; нам предстоит, таким образом, найти непрерывную при $r \leqslant 1$ функцию $u = u(r, \theta)$, которая при $r < 1$ удовлетворяла бы уравнению (10*), а при $r = 1$ совпадала бы с $f(\theta)$.

В порядке наведения начнем с простейших (не считая постоянной) решений уравнения (10*):

$$r^n \cos n\theta, \qquad r^n \sin n\theta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

* В п° 602, 7) было установлено, что своими контурными значениями гармоническая функция определяется однозначно.

найти их можно было бы по методу Фурье [701]. Нетрудно проверить непосредственно, что эти функции уравнению удовлетворяют. Умножив их на произвольные множители A_n, B_n и присоединив еще постоянный член A_0, составим ряд

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) r^m,$$

который формально* также удовлетворяет уравнению (10*). Наконец, учитывая граничное условие: $u(1, \theta) = f(\theta)$, получим

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta = f(\theta),$$

откуда, как обычно, заключаем, что A_0, A_m, B_m суть коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_m = a_m, \quad B_m = b_m.$$

Окончательно приходим к такому, пока формальному, решению поставленной задачи:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta). \tag{11}$$

В этом ряде легко узнать ряд Пуассона для функции $f(\theta)$, который, если угодно, можно заменить и интегралом Пуассона:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u - \theta) + r^2} du. \tag{11*}$$

Остается убедиться, что построенная функция в действительности удовлетворяет всем требованиям.

Прежде всего, так как коэффициенты a_m и b_m ограничены в их совокупности, то нетрудно видеть, что если рассматривать лишь значения $r \leqslant r_0$, где $r_0 < 1$, но может быть взято сколь угодно близким к единице, ряды, полученные из (11) почленным дифференцированием по r или по θ (однажды или дважды), все будут сходиться равномерно как относительно r, так и относительно θ. В таком случае они и дадут последовательные производные функции $u(r, \theta)$, и эта функция внутри круга, т. е. при $r < 1$, будет удовлетворять преобразованному уравнению Лапласа, поскольку ему удовлетворяют по отдельности все члены ряда.

Внутри круга функция $u(r, \theta)$ непрерывна по совокупности переменных (r, θ); это вытекает из равномерной сходимости ряда (11) сразу по обеим переменным (при $r \leqslant r_0 < 1$) по теореме 1 п° **431**, которая легко распространяется и на случай функций двух переменных. Установим теперь, что функция $u(r, \theta)$, при приближении точки $M(r, \theta)$ изнутри круга к точке $M'(1, \theta_0)$ на окружности, стремится именно к $f(\theta_0)$. Действительно, ввиду непрерывности функции $f(\theta)$ по произвольно взятому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\theta - \theta_0| < \delta$ будет

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

* Если допустить возможность беспрепятственного почленного дифференцирования.

С другой стороны, в силу того, что $u(r, \theta)$ при $r \to 1-0$ стремится к $f(\theta)$ равномерно относительно θ [741], число δ можно считать и столь малым, что при $|r-1| < \delta$ будет

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех θ. Итак, окончательно при $|r-1| < \delta$ и $|\theta - \theta_0| < \delta$ имеем:

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

743. Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро—Фейера. Как известно [681], частичная сумма $s_n(x)$ ряда Фурье (3) может быть представлена интегралом Дирихле

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du.$$

В таком случае среднее арифметическое первых n таких сумм напишется в виде:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du$$

или после упрощения [ср. 418, 2)]:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du.$$

Этот интеграл называют *интегралом Фейера* (L. Fejér) по имени ученого, впервые успешно применившего метод средних арифметических к обобщенному суммированию рядов Фурье. Фейеру принадлежит также следующая теорема (см. теорему Шварца).

Теорема. *Пусть для функции $f(x)$ в рассматриваемой точке x существуют пределы справа и слева $f(x \pm 0)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du =$$
$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{12}$$

В частности, в точке непрерывности этот предел равен $f(x)$.

Если же функция $f(x)$ везде непрерывна, то сумма $\sigma_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно относительно x.*

---

* См. сноску на стр. 603.

Доказательство. Подобно интегралу Дирихле и интегралу Пуассона, интеграл Фейера может быть представлен в виде:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt. \tag{13}$$

Этот случай также подходит под общую схему n° **740**, если положить, как и в **741**,

$$\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} = g(t),$$

а за ядро принять функцию

$$\Phi(t, n) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2$$

(«ядро Фейера»).

Легко убедиться в том, что это действительно положительное ядро, как оно было определено в n° **740** (вместо λ здесь натуральный параметр n; $\omega = +\infty$). В самом деле, что

$$\Phi(t, n) \geqslant 0,$$

непосредственно очевидно. Если в (13) взять $f \equiv 1$, то одновременно и $s_n \equiv 1$, а также $\sigma_n \equiv 1$, так что

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt = 1, \tag{14}$$

т. е. для ядра Фейера выполняется требование 2° n° **723**. Что же касается требования 3°, то легко получить оценку

$$M(\delta, n) = \sup_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi(t, n) \leqslant \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

откуда и следует, что $M(\delta, n) \to 0$ при $n \to \infty$.

В таком случае, применяя лемму n° **740**, получим предельное соотношение (12).

Наконец, заключительное утверждение теоремы обосновывается как и в случае теоремы Шварца.

На этот раз из доказанной теоремы явствует, что *в точке x, где функция $f(x)$ непрерывна или, в крайнем случае, имеет разрыв первого рода, ряд Фурье* (3) *суммируем по методу средних арифметических, причем «обобщенной суммой» ряда будет*

$$f(x) \quad \textit{или} \quad \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

соответственно.

Опираясь на теорему Фробениуса [421], из этого утверждения, как следствие, можно получить аналогичное утверждение n° **741**, относящееся к суммированию по методу Пуассона—Абеля.

Если функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[-\pi, \pi]$, то по поводу нее можно повторить замечание, сделанное в конце n° **741**.

744. Некоторые приложения обобщенного суммирования рядов Фурье. Мы имеем здесь в виду привести некоторые следствия из теоремы Фейера (хотя для той же цели, иной раз — ценой небольшого усложнения рассуждений, — могла бы служить и теорема Шварца). Первые два из них иллюстрируют то любопытное обстоятельство, что обобщенное суммирование может послужить основанием для утверждений, относящихся к суммированию в собственном смысле!

1°. *Если ряд Фурье* (3) *сходится в некоторой точке x, где функция $f(x)$ непрерывна или имеет обыкновенный разрыв, то сумма ряда необходимо равна*

$$f(x) \quad \text{или} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

соответственно.

Действительно, именно такова по теореме Фейера будет «обобщенная сумма» ряда, полученная по методу средних арифметических. Ввиду же регулярности этого метода [420], поскольку ряд имеет сумму в обычном смысле, эта сумма должна совпадать с «обобщенной суммой».

2°. Из теоремы Фейера, как следствие, может быть получена теорема Дирихле—Жордана о сходимости ряда Фурье для функции с ограниченным изменением [см. 706].

Если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением во всем промежутке $[-\pi, \pi]$, то в любой точке x для нее существуют пределы $f(x \pm 0)$, и «обобщенной суммой» ряда Фурье будет $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. С другой стороны, известно [707], что для функции с ограниченным изменением коэффициенты Фурье a_n, b_n будут порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а тогда по теореме Харди [422] отсюда следует, что ряд (3) сходится в обычном смысле и притом к той же сумме.

Этим, впрочем, не покрывается еще теорема Дирихле—Жордана, которая в формулировке n° **686** имеет, так сказать, «локальный» характер. Ограниченность изменения там требуется лишь по отношению к произвольно малой окрестности рассматриваемой точки. Но мы знаем [683], что именно значения, принимаемые функцией в этой окрестности, и определяют поведение ряда Фурье и величину его суммы в данной точке. Поэтому, ничего не меняя по существу, мы могли бы изменить значения функции вне упомянутой окрестности так, чтобы получилась функция с ограниченным изменением во всем промежутке $[-\pi, \pi]$, а к этой функции уже применимо сказанное выше.

3°. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и к тому же удовлетворяет условию

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

то она может быть распространена на всю числовую ось, как периодическая (с периодом 2π) и повсюду непрерывная функция. В таком случае последовательность фейеровских сумм $\{\sigma_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно для всех x в промежутке $[-\pi, \pi]$. Так как каждая такая сумма есть тригонометрический многочлен, то отсюда очевидным образом получается теорема Вейерштрасса об аппроксимации периодической непрерывной функции [734].

4°. Из теоремы Фейера непосредственно может быть получено утверждение о полноте тригонометрической системы в классе непрерывных функций [ср. 733]. В самом деле, если непрерывная в промежутке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ оказывается ортогональной ко всем функциям тригонометрической системы, так что равны нулю все ее коэффициенты Фурье, то $\sigma_n(x) = 0$. В то же время, по крайней мере в открытом промежутке $(-\pi, \pi)$, $\sigma_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$; следовательно, $f(x) = 0$ внутри промежутка, а по непрерывности — и на концах его.

Присовокупим еще следующие замечания, хотя и не связанные с теоремой Фейера, но относящиеся к фейеровским суммам.

5°. *Если функция $f(x)$ оказывается ограниченной и при изменении в промежутке $[-\pi, \pi]$ содержится между m и M, то между теми же границами содержатся и все фейеровские суммы $\sigma_n(x)$.*

Это сразу получается из оценки интеграла (13) с учетом (14):

$$m \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt = m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt = M.$$

Для частичных сумм ряда Фурье $s_n(x)$ подобное утверждение уже не имеет места: здесь сказывается тот факт, что «ядро Дирихле»

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2} t},$$

в отличие от «ядра Фейера», меняет знак. По отношению к этим суммам нельзя ручаться даже за существование общих для них всех границ.

Однако *если коэффициенты a_n, b_n функции $f(x)$ будут порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$, то и частичные суммы $s_n(x)$ все же оказываются равномерно ограниченными.* Именно, если при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$n\,|a_n| \leqslant A, \quad n\,|b_n| \leqslant B,$$

то можно утверждать, что

$$m - (A + B) \leqslant s_n(x) \leqslant M + (A + B).$$

Действительно, применяя к настоящему случаю соображения n° 422, получим:

$$s_n(x) = \sigma_{n+1}(x) + \frac{\sum_{1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)}{n+1}.$$

Но

$$|k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \leqslant A + B,$$

в то время как по доказанному

$$m \leqslant \sigma_{n+1}(x) \leqslant M.$$

Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

Если, например, рассмотреть разложение [690, 2)]

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi), \tag{15}$$

то здесь $m = -\frac{\pi}{2}$, $M = \frac{\pi}{2}$, $A = 0$, $B = 1$. Поэтому можно утверждать, что частичные суммы этого ряда по абсолютной величине равномерно ограничены числом $\frac{\pi}{2} + 1$ [ср. 702].

Из доказанного утверждения можно сделать и более общее заключение: *частичные суммы ряда Фурье функции с ограниченным изменением будут все равномерно ограничены* [ср. 737]. Это следует из того, что для названной функции коэффициенты Фурье a_n, b_n заведомо будут порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$ [707].

745. Почленное дифференцирование рядов Фурье. Если ряд Фурье (3) функции $f(x)$ продифференцировать почленно, то полученный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(b_m \cos mx - a_m \sin mx), \tag{16}$$

вообще говоря, будет расходящимся, даже если в рассматриваемой точке x для функции $f(x)$ существует конечная производная $f'(x)$. Примером может служить только что упомянутый ряд (15): почленное дифференцирование приводит к повсюду расходящемуся ряду

$$\sum_{1}^{\infty} \cos mx.$$

Однако имеет место следующее интересное предложение, принадлежащее Фату́ (P. Fatou): *если в точке x существует конечная производная $f'(x)$, то ряд* (16) *суммируем по методу Пуассона — Абеля и именно к сумме $f'(x)$.*

Для доказательства продифференцируем по x ряд Пуассона (4):

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} r^m m (b_m \cos mx - a_m \sin mx); \tag{17}$$

почленное дифференцирование здесь допустимо в силу равномерной относительно x сходимости полученного ряда. Тот же результат получится, если продифференцировать по x интеграл Пуассона (5):

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{2r(1-r^2)\sin(u-x)}{[1-2r\cos(u-x)+r^2]^2} du,$$

причем в этом случае можно дифференцировать под знаком интеграла по теореме 3* n° **510**. Последний интеграл преобразуем так:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{2r(1-r^2)\sin t}{[1-2r\cos t+r^2]^2} dt =$$

$$= r \cdot \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t} \cdot \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2} dt. \tag{18}$$

Положим

$$g(t) = \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t};$$

если переписать это выражение в виде

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right] \cdot \frac{t}{\sin t},$$

то станет ясно, что

$$g(+0) = f'(x).$$

Покажем, далее, что функция

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{\pi} \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}$$

является положительным ядром в смысле n° **740**. Прежде всего, очевидно,

$$\Phi(t, r) \geqslant 0.$$

Положим в (18), в частности, $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f(r, x) = r\sin x, \quad \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = r\cos x, \quad \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t} = \cos x.$$

Подставляя все это, по сокращении на $r\cos x$, получим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}\,dt = 1.$$

Наконец,

$$M(\delta, r) = \sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi(t, r) \leqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{2(1-r^2)}{\left[4r\sin^2\frac{\delta}{2}\right]^2},$$

так что заведомо $M(\delta, r)\to 0$ при $r\to 1$.

Применяя теперь лемму n° **740**, видим, что интеграл (18), который служит суммой ряда (17), стремится к $f'(x)$ при $r\to 1$. А это и означает, что ряд (16) суммируется по методу Пуассона — Абеля к $f'(x)$, что и требовалось доказать.

Замечания. I. Доказанная теорема может быть обобщена на случай повторного дифференцирования: *если в рассматриваемой точке существует конечная производная* $f^{(p)}(x)\,(p>1)$, *то ряд, полученный из* (3) *p-кратным дифференцированием, суммируем к* $f^{(p)}(x)$ *по методу Пуассона — Абеля.*

II. Для суммирования по Чезаро уже не имеет места утверждение, аналогичное теореме Фату. Если, впрочем, усилить требования к производной и предположить непрерывность ее в рассматриваемой точке, то суммирование по Пуассону — Абелю может быть заменено суммированием по Чезаро.

§ 3. Единственность тригонометрического разложения функции

746. Вспомогательные предложения об обобщенных производных. Чтобы ниже не прерывать изложения важного вопроса, указанного в заголовке, мы предпошлем ему ряд вспомогательных соображений.

Пусть в некотором промежутке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Возьмем значение x между a и b: $a<x<b$; тогда для достаточно малых $h>0$ имеет смысл разность $\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x-h)$. Если существует конечный предел

$$F^{[\prime]}(x) = \lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{2h},$$

его называют *обобщенной* («симметрической») *производной функции* $F(x)$ *в точке* x. Лишь только существует производная $F'(x)$ в обычном смысле, необходимо существует и обобщенная производная $F^{[\prime]}(x)$, ей равная; это непосредственно видно из следующего соотношения: при $h\to+0$

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right]\to F'(x).$$

Однако обобщенная производная может существовать в некоторых случаях, когда обыкновенной производной нет. Примером тому служит функция

$$F(x) = x \sin \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \ F(0) = 0;$$

известно [**102**, 1°], что в точке $x = 0$ производной она не имеет; обобщенная же производная ее в этой точке равна нулю.

Рассмотрим, далее, вторую разность

$$\Delta_h^2 F(x) = \Delta_h \Delta_h F(x) = \Delta_h F(x+h) - \Delta_h F(x-h) =$$
$$= [F(x+2h) - F(x)] - [F(x) - F(x-2h)] =$$
$$= F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h).$$

Если существует конечный предел

$$F^{[\prime\prime]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2},$$

его называют *обобщенной второй производной функции* $F(x)$ *в рассматриваемой точке* x. И здесь можно доказать, что в случае существования обычной второй производной $F''(x)$ существует и равна ей обобщенная производная. Действительно, если к двум функциям от h, $\Delta_h^2 F(x)$ и $4h^2$ применить формулу Коши*:

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2} = \frac{F'(x+2\theta h) - F'(x-2\theta h)}{4\theta h},$$

то, в силу сказанного выше об обобщенной (первой) производной, ясно, что при $h \to 0$ полученное выражение стремится к $F''(x)$. Пример функции

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \ F(0) = 0$$

[см. **101**, 2°] показывает, что обратное утверждение неверно: существование обобщенной производной $F^{[\prime\prime]}(x)$ не влечет за собой обязательно существования обычной производной $F''(x)$.

Следующая теорема устанавливает, что обобщенная вторая производная в некоторых случаях может играть ту же роль, что и обыкновенная

Теорема Шварца. *Если для непрерывной в промежутке* $[a, b]$ *функции* $F(x)$ *обобщенная вторая производная* $F^{[\prime\prime]}(x)$ *существует внутри промежутка и равна нулю, то* $F(x)$ *будет линейной функцией* (совсем так, как если бы было дано, что обыкновенная производная $F''(x) = 0$!).

---

* Предположение о существовании второй производной $F''(x)$ в точке x уже включает предположение о существовании первой производной $F'(x)$ в окрестности этой точки.

Для доказательства возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и построим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right\} + \\ + \varepsilon(x - a)(x - b),$$

причем наши рассуждения будут в равной мере относиться к обоим знакам перед скобками. Тогда внутри промежутка имеем

$$\varphi^{['']}(x) = 2\varepsilon, \tag{1}$$

ибо для функции F обобщенная вторая производная равна нулю, а для квадратичной функции — ее обыкновенной второй производной *.

Функция $\varphi(x)$ на концах промежутка $[a, b]$ обращается в нуль. Покажем, что внутри промежутка она не может принимать положительных значений. Действительно, в противном случае $\varphi(x)$, как непрерывная функция, достигала бы своего наибольшего (положительного) значения в некоторой *внутренней* точке x_0. Но тогда мы имели бы

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \leqslant \varphi(x_0), \quad \Delta_h \varphi(x_0) \leqslant 0$$

и, наконец,

$$\varphi^{['']}(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta_h \varphi(x_0)}{4h^2} \leqslant 0$$

вопреки равенству (1)!

Итак, $\varphi(x) \leqslant 0$ для всех x, т. е.

$$\pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right\} \leqslant \varepsilon(x - a)(b - x) < \\ < \varepsilon(b - a)^2,$$

и притом, какой бы знак, плюс или минус, ни взять перед скобками. Поэтому и

$$\left|F(x) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a)\right| < \varepsilon(b - a)^2.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что левая часть неравенства есть нуль, так что

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b) - F(a)}{b - a}(x - a),$$

что и требовалось доказать.

Иной раз условие $F^{['']}(x) = 0$ оказывается удостоверенным повсюду, за исключением отдельных «точек неизвестности», где про выполнение его ничего не дано. Тогда находит применение

---

* Ясно, что если две функции F и G в рассматриваемой точке имеют производные $F^{['']}$ и $G^{['']}$, то для их суммы или разности $F \pm G$ также существует обобщенная вторая производная, равная, соответственно, $F^{['']} \pm G^{['']}$.

Обобщенная теорема Шварца. *Пусть для непрерывной в промежутке* $[a, b]$ *функции* $F(x)$ *производная* $F^{[''] }(x)$ *существует и равна нулю повсюду внутри промежутка, за исключением конечного числа «точек неизвестности»*

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b.$$

Если в каждой из этих точек выполняется хотя бы облегченное условие

$$\lim_{h \to +0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0, \tag{2}$$

то функция $F(x)$ *все же будет в промежутке* $[a, b]$ *линейной.*

По предыдущей теореме функция $F(x)$ наверное будет линейной функцией от x между двумя исключительными значениями, так что, скажем, в промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$F(x) = cx + d,$$

а в смежном промежутке $[x_i, x_{i+1}]$

$$F(x) = c'x + d'.$$

При этом в точке $x = x_i$ оба выражения совпадают:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \tag{3}$$

Условие (2) для $x = x_i$ дает

$$\lim_{h \to +0} \left\{ \frac{F(x_i + 2h) - F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i - 2h) - F(x_i)}{-2h} \right\} = 0.$$

Но левая часть здесь выражает попросту разность угловых коэффициентов прямых $y = cx + d$ и $y = c'x + d'$. Итак, $c = c'$, а тогда из (3) и $d = d'$, т. е. оба прямолинейных отрезка составляют на деле продолжение один другого. Так как сказанное относится к любым двум смежным отрезкам, то график нашей функции во всем промежутке $[a, b]$ будет прямая, и функция оказывается линейной.

747. Риманов метод суммирования тригонометрических рядов. Важную роль в дальнейшем играет развитый Риманом метод суммирования тригонометрических рядов:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{4}$$

Этот метод не предполагает вовсе, что ряд (4) является рядом Фурье для какой-либо функции, и может быть приложен к совершенно произвольному тригонометрическому ряду, лишь бы коэффициенты его были ограничены в их совокупности:

$$|a_n|, \ |b_n| \leqslant L \qquad (L = \text{const.}). \tag{5}$$

Формально проинтегрировав ряд (1) почленно дважды, получим ряд:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_1^\infty \frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{6}$$

При выполнении условия (5) этот ряд мажорируется сходящимся рядом

$$L\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

и, следовательно, в любом промежутке изменения x сходится равномерно и определяет непрерывную функцию $F(x)$. Если для нее в данной точке x существует конечный предел

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{4h^2},$$

т. е. обобщенная вторая производная $F^{['']}(x)$, то последнюю и называют «обобщенной суммой» ряда (1) в смысле Римана.

Если для примера применить этот метод к ряду

$$\frac{1}{2}+\sum_1^\infty \cos nx,$$

то здесь

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Вспоминая [**664**, 9)], что для $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ суммой ряда, стоящего справа, будет $\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$, имеем

$$F(x)=\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{6}.$$

Поэтому для $0<x<2\pi$, очевидно, $F^{['']}(x)=F''(x)=0$, и «обобщенной суммой» ряда оказывается нуль [ср. **418** и **420**].

Легко проверить, что

$$\Delta_h^2\cos nx=-2\cos nx\,(1-\cos 2nh)=-4\cos nx\sin^2 nh$$

и

$$\Delta_h^2\sin nx=-4\sin nx\sin^2 nh.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{7}$$

Таким образом, метод суммирования Римана сводится к умножению членов ряда (4) на множители вида $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ и к предельному переходу при $h\to 0$.

В такой форме метод Римана может быть приложен и к совершенно произвольному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2,$$

по крайней мере для достаточно малых h, сходится, и его сумма $\varphi(h)$ при $h \to 0$ стремится к пределу U, то это и будет «обобщенной суммой» исходного ряда.

Читатель видит, что метод Римана подходит под общую схему n° **426.** Роль параметра x в этом случае играет h (при $\omega = 0$), а множители

$$\gamma_n(h) = \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 *$$

удовлетворяют обоим сформулированным там требованиям. Это очевидно по отношению к первому:

$$\lim_{h \to 0} \gamma_n(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = 1.$$

Что же касается второго, то, учитывая, что

$$\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1) h}{(n-1) h}\right)^2 = \int_{(n-1)h}^{nh} \left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' dz$$

и

$$\left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1) h}{(n-1) h}\right)^2\right| \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \left|\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'\right| dz,$$

будем иметь

$$|\gamma_0(h)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(h) - \gamma_{n-1}(h)| =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1) h}{(n-1) h}\right)^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \int_0^{\infty} \left|\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'\right| dz.$$

* Под $\gamma_0(h)$ мы разумеем просто единицу.

Существование этого интеграла легко проверить, ибо

$$\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' = 2\sin z\left(\cos z - \frac{\sin z}{z}\right)\frac{1}{z^2} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

при $z \to \infty$.

Таким образом, метод обобщенного суммирования Римана оказывается *регулярным.* Этот факт применительно к тригонометрическим рядам и формулирует

Первая теорема Римана. *Если тригонометрический ряд* (4) *в точке x сходится к сумме S, то функция $F(x)$, полученная из него формальным почленным интегрированием дважды, имеет в этой точке обобщенную вторую производную, равную S:*

$$F^{[''']}(x) = S.$$

Заметим, что для случая ряда Фурье выражение

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

легко преобразуется к виду интеграла изученного в n° **740** типа и притом с «положительным ядром». Таким путем для риманова метода суммирования может быть установлена теорема, совершенно аналогичная теореме Шварца [741] и теореме Фейера [**743**], на чем мы останавливаться, однако, не будем: для нас метод Римана важен как мощное орудие исследования тригонометрических рядов общего вида*. На этом пути нужна будет и

Вторая теорема Римана. *Если коэффициенты a_n, b_n ряда* (4) *стремятся к нулю, то независимо от сходимости ряда выполняется условие* (2):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0.$$

Положим при любом фиксированном x

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \quad u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда вопрос приводится к доказательству соотношения

$$\lim_{h \to 0} \left\{u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2}\right\} h = 0. \tag{8}$$

По условию теоремы $u_n \to 0$, т. е. для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geqslant N$ будет $|u_n| < \varepsilon$. Пред-

* Сам Риман вовсе не занимался обобщенным суммированием рядов. Он развил свою теорию для решения поставленной им задачи — дать полную характеристику функций, разлагающихся в тригонометрический ряд общего вида. Мы не имеем возможности излагать здесь эти исследования Римана.

ставим теперь интересующее нас выражение в виде суммы двух выражений:

$$S_1=\left\{u_0+\sum_{n=1}^{N-1}\right\}\cdot h \quad \text{и} \quad S_2=\sum_{n=N}^{\infty}\cdot h.$$

Имеем:

$$|S_2|<\varepsilon \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 h<\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 h.$$

Легко показать, что множитель при ε ограничен независимо от h. Мы видели, например, что

$$\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nh}{n^2}=\frac{\pi-h}{2}$$

[494, 4)]. Следовательно,

$$|S_2|<\frac{\pi}{2}\varepsilon.$$

Что же касается выражения S_1, то оно, очевидно, стремится к нулю вместе с h и становится при достаточно малом h по абсолютной величине меньшим, чем ε. Отсюда в совокупности и вытекает утверждение (8).

748. Лемма о коэффициентах сходящегося ряда. Доказываемое ниже предложение, полезное в дальнейшем, представляет и самостоятельный интерес.

Лемма Кантора (G. Cantor). *Если тригонометрический ряд* (4)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx$$

сходится, по крайней мере, для значений x в некотором промежутке $(d)=[\alpha, \beta]$, то коэффициенты a_m, b_m ряда необходимо стремятся к нулю при $m\to\infty$.

Представим общий член ряда в виде

$$a_m\cos mx+b_m\sin mx=\rho_m\sin m(x-\alpha_m),$$

где $\rho_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2}$. Требуется доказать, что $\rho_m\to 0$.

Допустим противное; тогда для бесконечного множества значений m будет выполняться неравенство

$$\rho_m\geqslant\delta, \tag{9}$$

где δ есть некоторое постоянное положительное число.

Мы индуктивно построим последовательность вложенных один в другой промежутков $\{(d_n)\}$ и возрастающих значков $\{m_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ таких, что

$$\left|\rho_{m_n} \sin m_n\left(x-\alpha_{m_n}\right)\right|>\frac{\delta}{2} \text{ для } x \text{ из } (d_n). \tag{10}$$

В качестве m_1 возьмем первый из номеров m, удовлетворяющих, кроме неравенства (9), еще неравенству

$$md > \pi^*.$$

При изменении x в промежутке (d) функция $\sin m_1(x-\alpha_{m_1})$ хоть однажды примет значение ± 1, а тогда по непрерывности найдется и такой содержащийся в (d) промежуток (d_1), во всех точках которого эта функция по абсолютной величине будет $>\frac{1}{2}$ и, следовательно, во внимание к (9),

$$\left|\rho_{m_1} \sin m_1(x-\alpha_{m_1})\right|>\frac{\delta}{2} \text{ для } x \text{ из } (d_1).$$

Если (d_{n-1}) и m_{n-1} уже определены, то совершенно аналогично тому, как это сделано только что, определяется значок m_n и строится содержащийся в (d_{n-1}) промежуток (d_n) так, что выполняется (10). При этом легко осуществить и требование $m_n > m_{n-1}$.

Возьмем теперь точку x_0, содержащуюся во всех (d_n) (а такая точка, хотя одна, всегда найдется). В ней неравенство (10) будет иметь место при всех n, а тогда, ввиду нарушения необходимого условия сходимости, ряд (4) при $x=x_0$ расходится — вопреки предположению. Этим лемма и доказана.

749. Единственность тригонометрического разложения. Мы подошли, наконец, к одному из фундаментальных вопросов, которые являются целью настоящего параграфа. Если функция $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в некий тригонометрический ряд (4), то будет ли это разложение единственным? Вопрос этот тем более законен, что выражение коэффициентов ряда формулами Эйлера—Фурье, как мы помним [678], не имело логически безупречной мотивации. Следующая теорема дает на него утвердительный ответ.

Теорема Гейне—Кантора. *Если два тригонометрических ряда*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{4}$$

и

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx \tag{11}$$

* Через d мы обозначаем длину промежутка $(d)=[\alpha, \beta]$.

сходятся к одной и той же сумме $f(x)$ *во всех точках промежутка* $[-\pi, \pi]$ *(даже за возможным исключением конечного числа «точек неизвестности»* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*), то эти ряды тождественны, т. е.*

$$a_m = \alpha_m, \qquad b_m = \beta_m.$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Почленно вычитая ряды (4) и (11), сведем доказываемую теорему к теореме об единственности тригонометрического разложения нуля:

Если тригонометрический ряд (4) *сходится к нулю в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *(исключая разве лишь конечное число «точек неизвестности»), то все его коэффициенты должны быть нулями:*

$$a_m = 0, \quad b_m = 0.$$

Докажем это последнее утверждение.

По лемме предыдущего n° *коэффициенты* a_m *и* b_m *стремятся к нулю*; в частности, отсюда вытекает, что они ограничены в совокупности.

Рассмотрим риманову функцию $F(x)$ [см. (6)], при наших предположениях непрерывную. За выключением «точек неизвестности» ее обобщенная вторая производная $F^{[''']}(x)$ повсюду равна нулю по первой теореме Римана **[747]**. По второй же теореме Римана **[747]*** даже в «точках неизвестности» выполняется облегченное условие (2). Тогда на основании обобщенной теоремы Шварца **[746]** можно заключить, что функция $F(x)$ линейна:

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d.$$

Важно подчеркнуть, что это равенство на деле имеет место на всей числовой оси, ибо сказанное о промежутке $[-\pi, \pi]$ справедливо и для любого конечного промежутка. Переписав полученное равенство в виде

$$\frac{a_0 x^2}{4} - cx = d + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

из периодичности функции, стоящей в правой части равенства, сразу заключаем, что $a_0 = c = 0$. Итак, имеем разложение нуля:

$$0 = d + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

* Она здесь применима именно потому, что коэффициенты a_m и b_m стремятся к нулю!

но на этот раз — в равномерно сходящийся ряд! В таком случае [678] коэффициенты его с необходимостью выражаются формулами Эйлера—Фурье, и мы приходим к требуемому заключению: $a_m = b_m = 0$.

Замечание. Можно было бы следующим образом избежать ссылки на лемму Кантора.

Пусть x — любая точка, отличная от «точек неизвестности», так что ряд (4) при этом значении x сходится, и его общий член, разумеется, стремится к нулю:

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx \to 0. \tag{12}$$

Подставляя в ряд (4) вместо x значения $x + \delta$ и $x - \delta$ и почленно складывая, придем к разложению

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos m\delta,$$

которое сходится к нулю при всех значениях δ, кроме разве лишь конечного числа их (если речь идет о любом конечном промежутке изменения δ). Но по отношению к этому тригонометрическому ряду с переменной δ мы уже знаем, что его коэффициенты стремятся к нулю, и к нему (без всякой ссылки на лемму Кантора!) применимы изложенные выше рассуждения, так что $a_0 = 0$ и

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = 0. \tag{13}$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Равенства эти имеют место не только для точек x, отличных от «точек неизвестности», но, в силу непрерывности функций косинус и синус, просто везде. Дифференцируя по x, получим еще и равенства

$$b_m \cos mx - a_m \sin mx = 0; \tag{14}$$

из (13) и (14), наконец, вытекает, что $a_m = b_m = 0$.

750. Заключительные теоремы о рядах Фурье. Итак, если для какой-либо функции $f(x)$ в промежутке $[-\pi, \pi]$ возможно разложение в тригонометрический ряд, то только одним способом. Каков же этот единственный способ? Обязательно ли это будет ряд Фурье функции $f(x)$ *?

Нам известны такие — даже непрерывные — функции, которые не разлагаются в ряд Фурье [703], но до сих пор мы оставляли открытым вопрос, не может ли подобная функция быть разложена в тригонометрический ряд с другими коэффициентами, отличными от коэффициентов Фурье.

---

* Конечно, в предположении, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, ибо, говоря о ряде Фурье, мы всегда здесь имеем в виду (как и выше) именно ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции.

Все эти вопросы тем более естественны, что мы, с другой стороны, легко можем построить тригонометрический ряд, повсюду сходящийся (следовательно, однозначно определяющий некоторую функцию) и в то же время заведомо не могущий быть рядом Фурье. Таков, например, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Этот ряд даже равномерно сходится в любом замкнутом промежутке, не содержащем точек вида $2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ [430], и определяет там непрерывную функцию; но и в точках вида $2k\pi$ он также сходится, очевидно, к нулю. В то же время этот ряд вообще не является рядом Фурье, ибо здесь нарушено необходимое для этого условие, установленное в конце n° **731** [см. там замечание]: ряд $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится! [**367**, 6)].

Поставленные вопросы получают окончательное разрешение в теореме настоящего n° и в ее обобщении, которое мы изложим в следующем n°.

Предпошлем одно замечание, принадлежащее Лебегу (H. Lebesgue).

Лемма. *Если непрерывная в промежутке* $[a, b]$ *функция* $F(x)$ *имеет повсюду внутри этого промежутка обобщенную вторую производную* $F^{[''']}(x)$, *содержащуюся между границами* m *и* M:

$$m \leqslant F^{['']}(x) \leqslant M,$$

то и любое отношение вида $\frac{\Delta_h^2 F(x_0)}{4h^2}$ *заключено между теми же границами*, в предположении, конечно, что промежуток $[x_0-2h, x_0+2h]$ целиком содержится в $[a, b]$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta_{2h} f(x_0)}{4h} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2},$$

которая представляет собой целый многочлен второй степени. Непосредственной проверкой убеждаемся, что он принимает те же значения, что и $f(x)$, в трех точках: x_0-2h, x_0, x_0+2h, так что в этих точках разность

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

обращается в нуль. Функция $\lambda(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0-2h, x_0+2h]$ и имеет внутри него обобщенную вторую производную:

$$\lambda^{['']}(x) = f^{['']}(x) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}$$

(для полинома φ обобщенная вторая производная будет попросту равна обыкновенной второй производной). Своих наибольшего и наименьшего значений $\lambda(x)$ достигает в двух точках: x_1 и x_2, внутри промежутка $[x_0-2h,\ x_0+2h]$ *. Легко показать, что в этих точках имеем соответственно $\lambda^{['']}(x_1)\leqslant 0$, $\lambda^{['']}(x_2)\geqslant 0$ [ср. рассуждение на стр. 615], откуда

$$f^{['']}(x_1)\leqslant \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}\leqslant f^{['']}(x_2),$$

чем и доказано высказанное утверждение.

Теперь, наконец, мы в состоянии доказать следующую замечательную теорему:

Теорема дю Буа-Реймонда (P. du Bois Reymond). *Если функция $f(x)$, ограниченная и интегрируемая (в собственном смысле) в промежутке $[-\pi,\ \pi]$, разлагается в этом промежутке в тригонометрический ряд:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{15}$$

то ряд этот необходимо является ее рядом Фурье.

Из сходимости ряда прежде всего вытекает ограниченность коэффициентов a_n, b_n [лемма II° 748]. Вводя риманову функцию $F(x)$, имеем для выражения $\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$ разложение в тригонометрический ряд (7):

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2,$$

который (при постоянном h) сходится равномерно относительно x, ибо мажорируется рядом вида $L\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$. В таком случае [678] коэффициенты этого ряда необходимо являются коэффициентами Фурье для его суммы:

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx,\\
a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx,\\
b_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx\\
&(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

* Даже если одно из этих значений есть нуль, то и оно достигается внутри — в точке x_0.

Заметим, что разложение (15) можно считать осуществляющимся и вне промежутка $[-\pi, \pi]$, если функцию $f(x)$ периодически продолжить на всю числовую ось. Следовательно, по первой теореме Римана [747] для всех значений x будем иметь

$$F^{[''']}(x) = f(x).$$

Ввиду ограниченности функции $f(x)$:

$$|f(x)| \leqslant K,$$

по предшествующей лемме, одновременно и

$$\left|\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\right| \leqslant K \tag{17}$$

для всех значений x и h.

Перейдем теперь к пределу при $h \to 0$ в равенствах (16), причем в правых частях их, по теореме Арцела [526], это можно сделать под знаком интеграла. Мы получаем, таким образом:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\ &\qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

751. Обобщение. Мы откажемся теперь от предположения ограниченности функции $f(x)$ и допустим даже существование конечного числа точек, в которых разложение (15) может не иметь места. И при этих облегченных условиях справедлива

Обобщенная теорема дю Буа-Реймонда. *Если функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$, разлагается в этом промежутке, исключая разве лишь конечное число точек, в тригонометрический ряд* (15), *то последний необходимо является ее рядом Фурье*.*

Начнем с того, что функцию $f(x)$ периодически распространим на всю числовую ось**. Впрочем, взамен $f(x)$ удобнее рассматривать функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}.$$

---

* Это обобщение принадлежит Валле-Пуссену (Ch. J. de la Vallée Poussin).

** Если функция $f(x)$ не удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi)$, то предварительно, чтобы добиться выполнения этого условия, нужно изменить значение функции на одном из концов промежутка $[-\pi, \pi]$, скажем, на том, где не имеет места разложение (15).

Для нее в любом конечном промежутке (за возможными исключениями в конечном числе точек) имеет место разложение уже без свободного члена:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Мы докажем, что, во-первых,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0$$

и, во-вторых, для $n=1, 2, 3, \ldots$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx; \tag{19}$$

отсюда уже будут следовать требуемые соотношения (18).

Ограниченность коэффициентов [по лемме n° **748**] и здесь позволяет ввести в рассмотрение риманову функцию

$$\Phi(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2},$$

на этот раз периодическую (с периодом 2π).

Возьмем промежуток $[\alpha, \beta]$, не содержащий ни упомянутых выше исключительных точек, ни особых точек функции $\varphi(x)$; таков же, очевидно, будет и промежуток $[\alpha-\delta, \beta+\delta]$ при некотором, достаточно малом, δ. Ввиду ограниченности функции φ, как и выше, заключаем об ограниченности выражения $\dfrac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2}$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, $h\leqslant\delta$. К тому же

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2}=\varphi(x).$$

При любом y из $[\alpha, \beta]$ по теореме Арцела [**526**] имеем:

$$\lim_{h\to 0}\int_{\alpha}^{y}\frac{\Delta_h^2\Phi(x)}{4h^2}\,dx=\int_{\alpha}^{y}\varphi(x)\,dx.$$

Если положить

$$\Phi_1(y)=\int_0^y \Phi(t)\,dt,$$

то последнее соотношение можно представить в виде

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2}-\frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2}\right\}=\int_\alpha^y \varphi(t)\,dt.$$

Так как выражение в фигурных скобках ограничено, при $\alpha\leqslant y\leqslant\leqslant\beta$ и $h\leqslant\delta$, то, снова применяя теорему Арцела, имеем:

$$\lim_{h\to 0}\int_\alpha^x \{\ldots\}\,dy=\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)\,dt \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta).$$

Полагая, далее,

$$\Phi_2(x)=\int_0^x \Phi_1(y)\,dy,$$

сможем написать полученное соотношение так:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2}-\frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2}-(x-\alpha)\frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2}\right\}=\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)\,dt.$$

Но $\Phi_2(x)$, очевидно, имеет $\Phi(x)$ своей обыкновенной второй производной, так что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2}=\Phi(x),\quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2}=\Phi(\alpha).$$

Если через γ обозначить еще (очевидно, существующий) предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2},$$

то окончательно найдем:

$$\int_\alpha^x dy\int_\alpha^y \varphi(t)\,dt=\Phi(x)-\Phi(\alpha)-\gamma(x-\alpha).$$

Легко видеть теперь, что повторный интеграл

$$\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)\,dt$$

(при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$) отличается от предыдущего на линейную функцию. Таким образом, функция

$$\Psi(x)=\Phi(x)-\int_0^x dy\int_0^y \varphi(t)\,dt \tag{20}$$

оказывается линейной в каждом промежутке вида $[\alpha, \beta]$. Значит, в каждой точке x, отличной от особых точек функции φ и от исключительных точек, где не имеет места разложение (15), будет

$$\Psi^{[''']}(x) = 0.$$

С другой стороны, во всех точках x без исключения выполняется условие типа (2): выражение

$$\frac{\Delta_h^2 \Psi(x)}{2h} = \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{2h} - \frac{1}{2h}\int\limits_x^{x+2h} dy \int\limits_0^y \varphi(t)\,dt + \frac{1}{-2h}\int\limits_x^{x-2h} dy \int\limits_0^y \varphi(t)\,dt$$

стремится к нулю при $h \to 0$. Действительно, для первого слагаемого справа стремление к нулю следует из второй теоремы Римана [в силу леммы n° **748**], а по теореме о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу [**305**, 12°] то же заключение оказывается справедливым и для суммы двух других слагаемых.

В таком случае, на основании обобщенной теоремы Шварца [**746**], имеем в любом конечном промежутке, а следовательно, и для всех вообще значений x:

$$\Psi(x) = cx + d. \tag{21}$$

Пусть теперь

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx;$$

дважды интегрируя почленно [**731**], получим:

$$\int\limits_0^x dy \int\limits_0^y \varphi(t)\,dt = \frac{\alpha_0 x^2}{4} - \sum_1^\infty \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2}. \tag{22}$$

Сопоставляя (20), (21) и (22), придем к разложению

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4} + cx + d = \sum_1^\infty \frac{(\alpha_n - a_n)\cos nx + (\beta_n - b_n)\sin nx}{n^2},$$

которое справедливо для всех вещественных значений x без исключения.

Так как правая часть представляет собой непрерывную и периодическую, а значит, ограниченную функцию от x, то необходимо $c = 0$, а также

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Теперь оказывается, что ряд

$$-d+\sum_{1}^{\infty}\frac{(\alpha_n-a_n)\cos nx+(\beta_n-b_n)\sin nx}{n^2}$$

повсюду сходится к 0, и притом равномерно. Отсюда [**678** или **749**] следует, что все его коэффициенты суть нули, так что выполняются условия (19):

$$a_n=\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

чем и завершается доказательство.

Таким образом, мы подвели, наконец, фундамент под всю изложенную выше теорию тригонометрического разложения функций и обосновали то исключительное внимание, которое уделялось именно *рядам Фурье.*

ДОПОЛНЕНИЕ

ОБЩАЯ ТОЧКА ЗРЕНИЯ НА ПРЕДЕЛ

752. Различные виды пределов, встречающиеся в анализе. Понятие предела пронизывает весь курс анализа, но в разных его частях принимает весьма различные формы.

Мы начали с изучения простейшего случая — предела варианты, пробегающей нумерованную последовательность значений [**22, 23**]; применительно к нему и была подробно развита теория пределов (глава 1).

Затем понятие предела было обобщено на случай предела функции от одной или от нескольких переменных [**52, 165**]*. Предельный процесс усложнился, но в общем сохранил свой характер.

Интегральное исчисление привело нас к рассмотрению пределов интегральных сумм Римана и Дарбу [**295, 296, 301**]. Здесь предельный процесс оказался связанным с дроблением на части данного промежутка и, по сравнению с ранее изученным, представил уже значительное своеобразие.

К этого типа пределам в известной мере примыкают пределы, с которыми мы столкнулись в главе X при определении понятий длины дуги (предел периметра вписанной ломаной, **330**), площади плоской фигуры (предел площади входящих и выходящих прямоугольных фигур, **336**) и т. п.

Наконец, в третьем томе читатель встретил еще другие предельные образования, получаемые в результате других предельных процессов, отличных от указанных выше.

Все упомянутые разновидности предела принципиально могут быть сведены к пределу варианты. Эту мысль мы подчеркивали на протяжении всего изложения, входя поначалу в подробности [**53, 166, 295**], а затем ограничиваясь уже лишь упоминанием о возможности перефразировки определения предела «на языке последовательностей». Конечно, сведéние сложных предельных процессов к простому пределу варианты представляет интерес само по себе. Но для нас оно было важно еще и в том отношении, что освобождало от необходимости всякий раз вновь устанавливать элементарные теоремы из теории пределов.

---

* Мы все время имеем в виду определения предела «на языке ε-δ».

Хотя подобным путем и восстанавливается единство всех встретившихся нам видов предела, однако самая необходимость «анатомирования» для этого переменной, выделение из множества ее значений особых нумерованных последовательностей, несомненно, содержат в себе элемент искусственности. Общего определения предела переменной это все же не создает.

Цель настоящего дополнительного параграфа и состоит в том, чтобы *установить общую точку зрения на предел, которая охватила бы как частные случаи все встречающиеся в анализе различные виды предела*, и на ее основе наметить контуры общей теории пределов.

Излагаемые ниже идеи впервые были высказаны С. О. Шатуновским, а затем американскими учеными Муром (E. H. Moore) и Смитом (H. L. Smith). [Заметим, впрочем, что принадлежащая им постановка вопроса отнюдь не является единственно возможной.]

753. Упорядоченные множества (в собственном смысле). Изученные выше образцы переменных, имеющих пределы, подсказывают мысль, что для того чтобы вообще имело смысл говорить о пределе переменной, ее область изменения не может оставаться «аморфной» и должна быть определенным образом направлена или упорядочена. В связи с этим мы установим сначала в общей форме основные понятия, относящиеся к упорядоченным множествам.

Пусть имеем множество $\mathcal{P}=\{P\}$, состоящее из элементов P какой угодно природы. Если для определенной пары различных элементов P, P' согласились считать, что один из них (например, P') следует за другим (P), то обозначают это так: $P' \succ P$, и говорят, что для пары P, P' установлен порядок. Правило, устанавливающее порядок для всевозможных пар различных элементов $\mathcal{P}$ или только для некоторых из этих пар, во всяком случае должно подчиняться следующим двум требованиям:

I) *если* $P_1 \succ P_2$, *то не может быть одновременно* $P_2 \succ P_1$;

II) *если* $P_1 \succ P_2$ *и* $P_2 \succ P_3$, *то необходимо* $P_1 \succ P_3$ (т. е. отношение «следует» обладает транзитивным свойством).

Если по некоторому правилу для всех пар различных элементов, взятых из $\mathcal{P}$, установлен порядок с соблюдением требований I, II, то множество $\mathcal{P}$ называется упорядоченным (или, точнее, упорядоченным в собственном смысле, в отличие от упорядоченных в обобщенном смысле множеств, которые будут рассмотрены в следующем n°).

Вот примеры упорядоченных множеств:

1) Любое множество вещественных чисел $\{x\}$ естественным образом упорядочивается, если расположить эти числа в порядке возрастания ($x' \succ x$, когда $x' > x$)* или убывания ($x' \succ x$, когда $x' < x$).

---

* Отправляясь от этого простого примера и стало привычным обозначать отношение «следует» знаком $\succ$, сходным со знаком $>$ («больше»).

Тот же пример в геометрической форме может быть представлен так: любое множество точек на горизонтальной прямой упорядочивается, если из двух точек следующей считать ту, которая лежит правее (или — левее).

2) Рассмотрим теперь какое-нибудь множество $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$, состоящее из некоторых точек $M(x, y)$ двумерного (арифметического) пространства. Это множество можно упорядочить, скажем, следующим образом:

$$M'(x', y') \succ M(x, y), \text{ если } x > x', \text{ а при } x = x', \text{ если } y > y'.$$

Во всех этих случаях легко проверить соблюдение требований I и II.

Для облегчения использования введенного понятия при рассмотрении предела переменной, мы будем дополнительно предполагать, что *в рассматриваемом множестве* $\mathcal{P}$ *нет «последнего» элемента* (который следовал бы за всеми остальными). Таким образом, какой бы элемент P из $\mathcal{P}$ ни взять, всегда найдется элемент P', следующий за P: $P' \succ P$.

754. Упорядоченные множества (в обобщенном смысле). Как увидим в дальнейшем, чаще всего приходится поступаться предположением, что для каждой пары элементов рассматриваемого множества $\mathcal{P}$ установлен порядок, и довольствоваться тем, что такой порядок установлен (с соблюдением условий I и II) лишь для некоторых пар. В подобных случаях, однако, мы будем требовать еще выполнения такого условия:

III) *для любых двух элементов* P, P' *множества* $\mathcal{P}$ *в этом множестве найдется элемент* P'', *следующий за обоими*

$$P'' \succ P, \quad P'' \succ P'.$$

[При этом безразлично, установлен ли порядок для самих элементов P и P' или нет.]

Это условие само по себе уже делает невозможным существование в $\mathcal{P}$ последнего элемента.

Легко видеть, что всякое множество, упорядоченное в собственном смысле, если только оно лишено последнего элемента, необходимо удовлетворяет и условию III. Действительно, каковы бы ни были элементы P и P' из $\mathcal{P}$, для них в данном случае порядок установлен; пусть, скажем, $P' \succ P$. Так как P' — не последний элемент, то в $\mathcal{P}$ найдется элемент $P'' \succ P'$; по транзитивному свойству отношения $\succ$ одновременно и $P'' \succ P$, что и требовалось доказать.

Если хотя бы для некоторых пар элементов множества $\mathcal{P}$ установлен порядок, с соблюдением всех трех условий I, II, III, мы также будем называть множество $\mathcal{P}$ упорядоченным (в обобщенном смысле)*.

* Говорят также о «частично упорядоченном», «полуупорядоченном» или «не вполне упорядоченном» множестве.

Приведем теперь примеры таких множеств.

3) Рассмотрим множество $\mathscr{X}$ вещественных чисел x, для которого a служит точкой сгущения [52]; пусть само число a при этом не принадлежит $\mathscr{X}$.

Условимся считать, что

$$x' \succ x, \text{ если } |x'-a| < |x-a|,$$

так что следующим будет то из значений, которое ближе к a.

Требования I, II явно соблюдены. Если в $\mathscr{X}$ не встречается значений x, равноотстоящих от a, но лежащих по разные стороны от a, то множество $\mathscr{X}$ будет упорядочено в собственном смысле. Если же такие пары значений имеются, то для них нашим соглашением, очевидно, порядок не будет установлен.

Проверим теперь выполнение требования III. Возьмем любые числа x и x' из $\mathscr{X}$. Так как они оба отличны от a, и a служит для $\mathscr{X}$ точкой сгущения, то в $\mathscr{X}$ необходимо найдется такое x'', которое будет ближе к a, чем x и x'; тогда $x'' \succ x$ и $x'' \succ x'$.

Таким образом, множество $\mathscr{X}$ во всяком случае является упорядоченным в обобщенном смысле.

4) Пусть $\mathscr{X}$ будет числовое множество с точкой сгущения ∞. Его можно упорядочить с помощью условия

$$x' \succ x, \text{ если } |x'| \succ |x|.$$

Все требования I, II, III выполнены. Если в $\mathscr{X}$ нет пар значений x, разнящихся лишь знаками, то множество будет упорядочено в собственном смысле. Если же такие пары имеются, то для них порядок не установлен, и можно говорить об упорядоченности лишь в обобщенном смысле.

5) Возьмем теперь любое множество $\mathscr{M} = \{M(x, y)\}$ точек двумерного пространства с точкой сгущения $M_0(a, b)$ [153]. Предположим, что обе координаты a и b конечны; пусть точка M_0 множеству $\mathscr{M}$ не принадлежит.

Установим соглашение, что

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

если

$$\max(|x'-a|, |y'-b|) < \max(|x-a|, |y-b|).$$

Подобно 3), все требования I, II, III здесь выполнены. Проверим, например, условие III. Пусть даны две точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$ из $\mathscr{M}$; так как обе они отличны от M_0, то

$$\sigma = \max(|x-a|, |y-b|) > 0$$

и

$$\sigma' = \max(|x'-a|, |y'-b|) > 0,$$

Пусть δ будет наименьшим из этих чисел; ввиду того, что M_0 для $\mathscr{M}$ служит точкой сгущения, в $\mathscr{M}$ найдется такая точка $M''(x'', y'')$, что $|x''-a|<\delta$ и $|y''-b|<\delta$. А тогда

$$M'' \succ M \text{ и } M'' \succ M',$$

что и требовалось доказать. Итак, установленным соглашением множество $\mathscr{M}$ действительно упорядочено (в обобщенном смысле).

Если какая-либо из координат точки M_0, скажем a, равна ∞, то можно модифицировать наше соглашение, например, заменив $|x-a|$ на $\frac{1}{|x|}$, и т. д.

6) Приведем в виде примера еще другие способы упорядочения множества $\mathscr{M}$, о котором была только что речь (a и b считаем конечными).

Можно условиться так:

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

если

$$|x'-a|+|y'-b|<|x-a|+|y-b|,$$

или же так:

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

если

$$\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2}<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Предлагаем читателю проверить соблюдение в обоих случаях требований I, II, III.

7) Пусть $\mathscr{M}$ есть множество «целочисленных» точек (m, n), где m и n — натуральные числа, с точкой сгущения $(+\infty, +\infty)$. Аналогично 5), это множество можно упорядочить по правилу

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{если} \quad \min(m', n') > \min(m, n).$$

Проще — такой закон упорядочения:

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{если} \quad m' > m \quad \text{и} \quad n' > n.$$

И здесь требования I, II, III соблюдены.

8) Возьмем теперь примеры из другой области. Пусть элементами рассматриваемого множества $\mathscr{R}$ будут всевозможные разбиения R данного промежутка $[a, b]$ на конечное число частей с помощью точек деления

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b.$$

Если через λ обозначить наибольшую из длин этих частей, то естественно расположить различные разбиения R в порядке убывания λ; то из разбиений будет следующим, которому отвечает меньшее λ.

Соблюдение условий I, II очевидно. Легко проверяется и условие III: каковы бы ни были два разбиения, отвечающие значениям

λ и λ', всегда можно осуществить разбиение на еще более мелкие части, которому отвечало бы число λ'', меньшее и λ и λ'.

Множество $\mathscr{R}$, таким образом, оказывается упорядоченным, но лишь в обобщенном смысле: для двух различных разбиений с одним и тем же λ порядок не установлен.

9) Для рассмотренного только что множества $\mathscr{R} = \{R\}$ можно установить порядок другим соглашением: разбиение R' следует за разбиением R, если оно получено из R добавлением к его точкам деления еще новых точек деления. Это также приводит к упорядочению лишь в обобщенном смысле: порядок не установлен, например, для двух разбиений R и R', имеющих сплошь различные точки деления.

755. Упорядоченная переменная и ее предел. Рассмотрим теперь переменную x с областью изменения $\mathscr{X}$. Можно представить себе, что непосредственно эта область $\mathscr{X}$ упорядочена (в собственном или обобщенном смысле) или — более общо — что значения x из $\mathscr{X}$ поставлены в однозначное соответствие элементам P некоторого упорядоченного множества $\mathscr{P} = \{P\}$, состоящего из объектов любой природы. В этом случае и сама переменная x называется *упорядоченной*.

Сообразно с $\mathscr{P}$ упорядочивается и множество значений $x = x_P$; именно, считают, что

$$x_{P'} \succ x_P, \quad \text{если} \quad P' \succ P \quad (\text{в } \mathscr{P}).$$

Это есть воспроизведение в общей форме того, что мы имели для *варианты* x_n, значения которой ставились в соответствие числам натурального ряда — «номерам» — и располагались по возрастанию их

$$x_{n'} \succ x_n, \quad \text{если} \quad n' > n.$$

Умея различать элементы P множества $\mathscr{P}$, мы различаем и значения $x = x_P$ нашей переменной по этим «пометкам» P. В этих условиях мы допускаем (как и в случае варианты) возможность и *равных* значений с различными «пометками».

Подчеркнем особо, что, говоря об упорядоченной переменной, мы по существу не связываем с этим никаких представлений о расположении ее значений *в пространстве* или *во времени*. *Следующее* значение не занимает «более далекого места», чем *предыдущее*; *следующее* значение не принимается переменной «позже» *предыдущего* и т. д. Если же, тем не менее, обычно позволяют себе употреблять выражения вроде «начиная с некоторого места» или «с некоторого момента изменения» и т. п., то делается это лишь для образности языка.

Определение предела *упорядоченной переменной* $x = x_P$ (или — как иногда говорят — предела *упорядоченного множества* $\{x_P\}$) совершенно аналогично определению предела варианты (или последовательности):

переменная $x = x_P$ *имеет конечный предел* a, *если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такая «пометка»* P_ε *из* $\mathscr{P}$, *что для всех* $P \succ P_\varepsilon$ *соответствующие значения* $x = x_P$ *удовлетворяют неравенству*

$$|x - a| = |x_P - a| < \varepsilon.$$

В определении n° **23** роль P_ε играло, очевидно, N_ε: ведь соотношение $n \succ N_\varepsilon$ равносильно неравенству $n > N_\varepsilon$.

Точно так же дается определение и бесконечного предела: *переменная* $x = x_P$ *имеет предел* ∞, *если для каждого числа* $\mathrm{E} > 0$ *найдется такая «пометка»* P_E *из* $\mathscr{P}$, *что*

$$|x| = |x_P| > \mathrm{E},$$

лишь только $P \succ P_\mathrm{E}$.

Легко перефразировать последнее определение для случая, когда речь идет о бесконечности определенного знака, $+\infty$ или $-\infty$.

При этом пишут, как обычно:

$$\lim x = a \ (\infty, +\infty, -\infty) \text{ или } x \to a \ (\infty, +\infty, -\infty).$$

Обратимся к примерам.

756. Примеры. Начнем с примера переменной x, у которой область изменения $\mathscr{X}$ непосредственно упорядочена.

1) Пусть $\mathscr{X} = \{x\}$ будет любое множество вещественных чисел с точкой сгущения a, упорядоченное по убыванию $|x - a|$ [см. пример 3) n° **754**]. Очевидно, соответствующая переменная x имеет пределом a: какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, в $\mathscr{X}$ найдется x_ε, отличное от a, такое, что $|x_\varepsilon - a| < \varepsilon$, а тогда для $x \succ x_\varepsilon$ и подавно $|x - a| < \varepsilon$.

Аналогично, если $\mathscr{X} = \{x\}$ имеет точку сгущения ∞ и множество это упорядочить по возрастанию $|x|$ [см. пример 4) n° **754**], то $x \to \infty$.

Чаще встречаются, однако, случаи, когда значения переменной поставлены в соответствие «пометкам» P из некоторого упорядоченного множества $\mathscr{P}$. Приводимые ниже примеры этого рода имеют особую важность: они показывают, что *изученные в нашем курсе различные виды пределов действительно могут быть рассматриваемы как частные осуществления изложенного выше общего определения.*

2) Рассмотрим понятие предела функции [**52**]

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad (1)$$

ограничиваясь для простоты случаем конечных a и A.

Пусть функция $f(x)$ определена в области $\mathscr{X} = \{x\}$, имеющей точку сгущения a; значение a само в $\mathscr{X}$ не входит или, по крайней мере, не учитывается при определении предела (1). Эта функция и есть здесь та переменная, о пределе которой идет речь, x же играет

роль «пометки» P. *Условимся понимать указание* $x \to a$ *в том смысле, что область* $\mathscr{X}$ *изменения* x *упорядочена по убыванию* $|x-a|$ [**754**, 3)]. Тогда соответственным образом упорядочивается и множество значений функции $\{f(x)\}$, и равенство (1) — в согласии с общим определением — приобретает определенный смысл. Именно, оно означает, что по заданному $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое значение x_ε из $\mathscr{X}$, что неравенство

$$|f(x)-A| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполняется для $x \succ x_\varepsilon$, т. е. лишь только $|x-a| < |x_\varepsilon - a|$.

Положив $|x_\varepsilon - a| = \delta$, последнее условие можно записать так: $|x-a| < \delta$. Обратно, если неравенство (2) имеет место при $|x-a| < \delta$, то, взяв x_ε под условием $|x_\varepsilon - a| < \delta$, можно утверждать, что (2) выполняется для $x \succ x_\varepsilon$. Таким образом, новое определение предела функции равносильно прежнему [**52**].

3) Определение предела функции двух переменных

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A \qquad (3)$$

может быть выражено в терминах упорядоченной переменной совершенно аналогично.

Пусть функция $f(M) = f(x, y)$ определена в области $\mathscr{M} = \{M(x, y)\}$ с точкой сгущения $M_0(a, b)$; сама эта точка при определении равенства (3) в расчет не берется. Точки $M(x, y)$ из $\mathscr{M}$ играют роль «пометок». Упорядочив множество $\mathscr{M}$ так, как это сделано в n° **754**, 5) (*именно в этом смысле мы уславливаемся понимать указание* $M \to M_0$ *или* $x \to a$, $y \to b$), мы тем самым упорядочиваем и множество значений функции $\{f(M)\} \equiv \{f(x, y)\}$. Тогда равенство (3) приобретает смысл — в согласии с общим определением предела упорядоченной переменной.

И здесь сразу ясно, что новое понимание равенства (3) равносильно прежнему [**165**].

Определение предела, по существу останется тем же, если вместо закона упорядочения множества $\mathscr{M} = \{M(x, y)\}$, указанного в **754**, 5), положить в основу те правила, которые были приведены в 6).

4) Для переменной $x_{m,n}$, зависящей от двух натуральных значков m и n, понятие предела

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} x_{m,n} = A$$

строится на таком законе упорядочения пар (m, n):

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{если} \quad \min(m', n') > \min(m, n)$$

[см. **754**, 7)]. Оно совпадает с тем определением, о котором была речь в конце n° **165**.

Тот же результат получился бы, если бы мы исходили и из более простого, также упомянутого в 7), правила упорядочения

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{если} \quad m' > m, \ n' > n.$$

Распространение всего сказанного на случай функций от нескольких переменных не представляет затруднений.

5) Обратимся, наконец, к вопросу о пределе сумм Римана или Дарбу для заданной в промежутке $[a, b]$ ограниченной функции $f(x)$. Эти суммы связаны с разбиением R промежутка $[a, b]$ на части с помощью произвольных точек деления

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

причем предельный процесс направляется тем, что $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max \Delta x_i$. В **754**, 8) мы уже упорядочивали множество всевозможных разбиений промежутка на части $\mathscr{R} = \{R\}$ по убыванию λ. Соответственно этому упорядочиваются и значения сумм Дарбу, s и S.

Для построения римановой суммы σ, кроме разбиения промежутка на части, нужно еще выбрать в каждой части по точке. Таким образом, риманова сумма характеризуется набором не только точек деления, но и промежуточных точек; эти наборы (а с ними и римановы суммы) также можно упорядочить по убыванию λ.

Теперь уже ясно, что и пределы

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma, \quad \lim_{\lambda \to 0} s, \quad \lim_{\lambda \to 0} S$$

подходят под общую схему, развитую здесь.

Заметим попутно, что те же, по существу, пределы получились бы во всех случаях, если бы в основу упорядочения множеств $\{\sigma\}$, $\{s\}$, $\{S\}$ было положено и правило 9) n° **754**. В виде упражнения предлагается читателю доказать это, опираясь на результаты пп° **297** и **301**.

Аналогично исчерпывается вопрос о пределах, рассмотренных при определении длины дуги [**330**], площади плоской фигуры [**336**] криволинейных, двойных и поверхностных интегралов [**544**, **550**, **589**, **631**, **635**] и т. д.

757. Замечание о пределе функции. Говоря о пределе (1), мы условились одним лишь вполне определенным образом упорядочивать множество $\mathscr{X} = \{x\}$ [**754**, 3)], а с ним и множество значений функции $\{f(x)\}$. Определение предела этой последней, построенное на рассмотрении упомянутого «стандартного» закона приближения x к a, оказалось равносильным тому определению, которое было дано в n° **52** «на языке ε-δ».

Можно было бы, однако, отказаться от «стандартизации» закона приближения x к a, предоставляя x изменяться вдоль множества $\mathscr{X}$ или любой из его частей, сохраняющих a в качестве точки сгущения и упорядоченных по произвольному правилу, но так, что a является их пределом. Значения функции $f(x)$ всякий раз упорядочиваются сообразно с x.

Таким образом, равенство (1) можно понимать и так:

по какому бы закону независимая переменная x ни стремилась к пределу a, функция $f(x)$ всегда стремится к одному и тому же пределу A.

Это определение сближается с определением n° **53** «на языке последовательностей», лишь произвольная последовательность значений x, стремящаяся к a, здесь заменена вообще произвольным упорядоченным множеством, имеющим предел a.

Для доказательства равносильности только что приведенного определения и данного в предыдущем n° достаточно установить, что из существования предела (1) в смысле n° **52** следует сформулированное выше утверждение. Пусть же для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство (2) выполняется, лишь только $|x - a| < \delta$. По какому бы закону x ни стремилось к a, по самому определению предела должно существовать такое значение $\overline{\overline{x}}$, что для $x \succsim \overline{\overline{x}}$ будет $|x - a| < \delta$; тогда для тех же значений x выполнится и неравенство (2), т. е., действительно, $f(x) \to A$.

Такое же замечание можно было бы сделать и относительно функций двух (или нескольких) переменных.

758. Распространение теории пределов. Обратимся, наконец, к распространению утверждений, доказанных в главе I для варианты, на общий случай упорядоченной переменной. Это распространение осуществить нетрудно, если шаг за шагом проследить построение теории пределов для варианты.

Всякий раз, когда там была речь о выполнении какого-либо соотношения для значений x_n с номерами n, бо́льшими некоторого N, здесь придется говорить об его выполнении для значений $x = x_P$ с «пометками» P, следующими за некоторым P'.

Например, докажем утверждение, аналогичное **26**, 1°:

Если упорядоченная переменная x_P стремится к пределу a и $a > p$ $(a < q)$, то и $x_P > p$ $(x_P < q)$, по крайней мере, начиная с некоторого места.

Взяв $\varepsilon < a - p$ $(\varepsilon < q - a)$, найдем такое P', что для $P \succsim P'$ будет $|x_P - a| < \varepsilon$; для тех же x_P, очевидно, и

$$x_P > a - \varepsilon > p \quad (x_P < a + \varepsilon < q).$$

Так же обобщаются и утверждения **26**, 2°—4°. Последнее, впрочем, перефразируется так: *если переменная x имеет (конечный) предел a, то она является ограниченной, по крайней мере, начиная с некоторого места* [ср. **55**, I, 4°].

При доказательстве единственности предела [**26**, 5°] приходится своеобразно воспользоваться условием III [**754**].

Допустим (рассуждая от противного), что одновременно $x_P \to a$, $x_P \to b$, причем $a < b$. Если взять r между a и b, то, с одной стороны, $x_P < r$ для $P \succsim P'$, с другой же стороны, $x_P > r$ для $P \succsim P''$. Но именно в силу III найдется такая «пометка» P, что сразу и $P \succsim P'$

и $P \succ P''$; тогда одновременно $x_P < r$ и $x_P > r$, что и осуществляет требуемое противоречие.

На упорядоченную переменную следующим образом распространяется определение монотонной переменной: *переменная x_P называется монотонно возрастающей (или возрастающей в широком смысле), если $P' \succ P$ всегда влечет за собой $x_{P'} > x_P$ (или $x_{P'} \geqslant x_P$).*

Примером такой переменной может служить монотонно возрастающая функция $f(x)$, если ее значения упорядочены по возрастанию независимой переменной x, или частная сумма $A_m^{(n)}$ положительного двойного ряда

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_{i,\,k},$$

если считать

$$A_{m'}^{(n)} > A_m^{(n')} \quad \text{при} \quad m' > m \quad \text{и} \quad n' > n.$$

Так же устанавливается понятие монотонно убывающей переменной.

Во внимание к известным свойствам сумм Дарбу s и S [**296**], если только упорядочить разбиения промежутка так, как это сделано в примере 9) n° **754**, очевидно, нижняя сумма s окажется монотонно возрастающей переменной, а верхняя сумма S — монотонно убывающей. Этого нельзя сказать, если взять другой способ упорядочения [**754**, 8)].

Теперь легко обобщить теорему n° **34** о монотонной варианте:

Монотонно возрастающая переменная $x = x_P$ всегда имеет предел. Если переменная ограничена сверху, то этот предел конечен, в противном случае он равен $+\infty$.

Предполагая переменную ограниченной, положим $a = \sup\{x_P\}$, так что все $x_P \leqslant a$ и, с другой стороны, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такая «пометка» P_ε, что $x_{P_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Но тогда, лишь только $P \succ P_\varepsilon$, будем иметь $x_P > x_{P_\varepsilon}$, следовательно, и подавно $x_P > a - \varepsilon$. Таким образом, для $P \succ P_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_P - a| < \varepsilon$, откуда $x_P \to a$.

Если переменная x_P не ограничена, то для каждого числа $E > 0$ найдется такое P_E, что $x_{P_E} > E$. Тогда для $P \succ P_E$ и подавно $x_P > E$, так что $x_P \to +\infty$. Теорема доказана.

В этой теореме, как частные случаи, содержатся теорема n° **34** о пределе монотонной варианты и теорема n° **57** о существовании предела для монотонной функции, а также теорема n° **394** о сходимости положительного двойного ряда. Проведенное здесь рассуждение, как читателю ясно, в общей форме лишь воспроизводит те, которые были осуществлены в указанных местах для доказательства порознь частных теорем.

Заметим, что из доказанной общей теоремы сразу вытекает и существование конечных пределов для сумм s и S Дарбу, но лишь если стоять на точке зрения правила 9) n° **754**; совпадение их с пределами, рассмотренными в **301**, еще подлежало бы доказательству.

В качестве более сложного примера остановимся на доказательстве принципа сходимости [ср. **39**]:

Для того чтобы упорядоченная переменная x_P имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовала такая «пометка» P_ε, что неравенство

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$$

выполняется, лишь только $P \succ P_\varepsilon$ и $P' \succ P_\varepsilon$.

Перефразируя рассуждение n° **39**, прежде всего установим необходимость этого условия. Если $x_P \to a$, то по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такое $\overline{P}$, что для $P \succ \overline{P}$ будет $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $P \succ \overline{P}$ и $P' \succ \overline{P}$, тогда сразу $|x_P - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|a - x_{P'}| < \frac{\varepsilon}{2}$, так что $|x_P - x_{P'}| < \varepsilon$; за P_ε в этом случае можно взять $\overline{P}$.

Для доказательства достаточности предположим условие выполненным.

Произведем в области всех вещественных чисел сечение по следующему правилу. В класс A отнесем каждое вещественное число α, для которого — начиная с некоторого места —

$$x > \alpha.$$

В класс A' отнесем все остальные вещественные числа α'. Легко видеть, что это правило действительно определяет сечение. Мы остановимся лишь на доказательстве непустоты обоих классов.

При произвольном $\varepsilon > 0$ найдется, по предположению, соответствующее ему P_ε такое, что лишь только $P \succ P_\varepsilon$ и $P' \succ P_\varepsilon$, тотчас же

$$|x_P - x_{P'}| < \varepsilon \quad \text{или} \quad x_{P'} - \varepsilon < x_P < x_{P'} + \varepsilon.$$

Отсюда уже ясно, что (при $P' \succ P_\varepsilon$) $x_{P'} - \varepsilon$ есть одно из чисел α, а $x_{P'} + \varepsilon$ — одно из чисел α'; последнее, собственно, опять требует использования условия III: если бы $x_{P'} + \varepsilon$ было одним из α, так что неравенство $x_P > x_{P'} + \varepsilon$ выполнялось бы, скажем, для $P \succ \overline{P}$, то, взяв (в силу III) P так, чтобы сразу было $P \succ P_\varepsilon$ и $P \succ \overline{P}$, имели бы одновременно $x_P < x_{P'} + \varepsilon$ и $x_P > x_{P'} + \varepsilon$!

По теореме Дедекинда [**9**] существует пограничное между обоими классами число a

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

В частности, при $P' \succ P_\varepsilon$

$$x_{P'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{P'} + \varepsilon, \text{ т. е. } |x_{P'} - a| \leqslant \varepsilon,$$

откуда и следует, что $x_P \to a$.

Эта теорема находит себе интересные применения. Она не только содержит, как частные случаи, уже известные нам теоремы nn° 39 и 58, но приводит и к новым результатам. Так, с ее помощью принцип сходимости распространяется на функции нескольких переменных, на двойные ряды и т. п. Оно дает также условие спрямляемости дуги [330]. Предоставляя читателю самому сформулировать это условие, обращаем внимание на то, что условие явно выполняется для части дуги, если выполняется для всей дуги; таким образом, сейчас можно было бы в два слова доказать утверждение, которое раньше потребовало от нас длинных рассуждений [247].

759. Одинаково упорядоченные переменные. Для обобщения таких утверждений, в которых участвуют одновременно две (или несколько) переменных, введем понятие одинаково упорядоченных переменных. Так называются две переменные x и y, которые могут быть упорядочены с помощью одного и того же упорядоченного множества $\mathcal{P}=\{P\}$, с элементами которого их значения ставятся в однозначное соответствие (соответствующими мы будем считать их значения x_P, y_P с одинаковыми «пометками» P).

Если, например, имеем две функции $f(x)$ и $g(x)$ от одной и той же независимой переменной x, с упорядоченной областью изменения $\mathcal{X}$, то эти функции будут одинаково упорядоченными переменными. Соответствующими будут те их значения, которые определяются одним и тем же значением x (оно и играет роль «пометки» P).

Вот другой пример. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных в некотором промежутке $[a, b]$, построены интегральные суммы

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{и} \quad \tau=\sum_i g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Здесь соответствующими следует, очевидно, считать суммы, определяемые одним и тем же набором точек деления x_i и промежуточных точек ξ_i; этот набор играет в рассматриваемом случае роль «пометки» P; если упорядочить их, а с ними и суммы σ, τ, по убыванию $\lambda=\max\Delta x_i$, то снова получим одинаково упорядоченные переменные.

Соединяя теперь две переменные x, y знаками равенства или знаками арифметических действий, мы будем предполагать эти переменные одинаково упорядоченными и подразумевать, что речь идет о соответствующих значениях их, x_P и y_P, с одинаковыми «пометками». Обращаясь с этими пометками, как раньше обращались с номерами n значений варианты, легко воспроизвести все прежние рассуждения, относившиеся к вариантам.

Для примера докажем предложение, обобщающее лемму 2 n° 29:

Если переменная x_P ограничена (по крайней мере, начиная с некоторого места), а одинаково с нею упорядоченная переменная α_P — бесконечно малая, то и их произведение будет бесконечно малой.

Пусть же

$$|x_P| \leqslant M,$$

скажем, для $P \succ P'$. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, по числу $\frac{\varepsilon}{M}$ найдем такое P'', что для $P \succ P''$ будет

$$|\alpha_P| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

В согласии с условием III, существует такое P_0, что

$$P_0 \succ P' \text{ и } P_0 \succ P''.$$

Если $P \succ P_0$, то (в силу II) одновременно

$$P \succ P' \text{ и } P \succ P'',$$

так что выполняются сразу оба предыдущих неравенства, а тогда

$$|x_P \alpha_P| = |x_P| \cdot |\alpha_P| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

После приведенных примеров читателю ясно, что вся теория пределов (с сохранением основных линий в доказательствах) действительно переносится на общий случай упорядоченных переменных.

760. Упорядочение с помощью числового параметра. Во всех встречавшихся нам случаях применения в анализе понятия предела упорядочение множества $\mathscr{P} = \{P\}$ «пометок» для значений переменной x_P осуществлялось однообразно. В общем виде применявшийся способ упорядочивания может быть описан следующим образом.

Каждому элементу P из $\mathscr{P}$ ставится в соответствие значение t некоторого параметра, причем и многим P может отвечать одно и то же t; множество всех таких P обозначим через $\mathscr{P}_t$. Предположим, что все $t > 0$ и существуют сколь угодно малые значения t, для которых $\mathscr{P}_t$ не пусто.

Условимся теперь что *из двух элементов P считается следующим то, которому отвечает меньшее значение параметра t* (т. е. расположим элементы P «по убыванию параметра»). Для двух элементов P, которым отвечает одно и то же t, так что они входят в одно и то же множество $\mathscr{P}_t$ (равно как и для соответствующих им значений x), порядок не устанавливается. При этом будут соблюдены все условия I, II, III. Это очевидно по отношению к I, II; проверим выполнение III. Пусть P и P' — любые два элемента из множества $\mathscr{P}$, и им отвечают значения t и t' параметра. По предположению, найдется такое значение t'', меньшее, чем t и t', для которого $\mathscr{P}_{t''}$ не пусто. Тогда любое P'' из $P_{t''}$ будет следующим и за P, и за P'.

Читатель легко проверит, что все известные ему случаи использования понятия предела подходят под эту схему. Для варианты x_n

с «пометкой» n, можно принять $t=\frac{1}{n}$. Если речь идет о функции $f(x)$ и ее пределе при $x \to a$, то множество «пометок» x упорядочивается по убыванию параметра $t=|x-a|$. Также и в случае функции $f(M)=f(x, y)$ двух переменных, где роль «пометки» играет точка $M(x, y)$, определяя предел функции при $x \to a$, $y \to b$, можно охарактеризовать процесс с помощью любого из параметров

$$t_1=\max\{|x-a|, \ |y-b|\}, \quad t_2=|x-a|+|y-b|$$

или

$$t_3=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Для сумм Дарбу

$$s=\sum_i m_i \Delta x_i, \quad S=\sum_i M_i \Delta x_i$$

«пометкой» служит набор точек деления; при переходе к суммам Римана

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

к нему присоединяется еще набор точек ξ_i. В обоих случаях эти «пометки» упорядочиваются с помощью параметра $t=\max \Delta x_i$. При определении длины дуги параметром служит наибольший из диаметров частичных дуг и т. д.

Во всех случаях, когда область изменения $\mathscr{X}$ переменной x или — вернее — множество «пометок» $\mathscr{P}=\{P\}$ упорядочены указанным выше образом с помощью числового параметра t, очевидно, определение предела (мы ограничиваемся случаем конечного предела) может быть дано в следующем виде: *число a является пределом x, если каждому числу $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что*

$$|x-a|<\varepsilon,$$

лишь только соответствующее ему значение параметра $t<\delta$.

Упорядочением с помощью числового параметра мы пользовались и в третьем томе. Однако этот простой способ упорядочивания все же не покрывает потребностей математического анализа в его более высоких ветвях. В качестве примера такого упорядочения, которое вообще нельзя осуществить подобным путем (с привлечением числового параметра), можно привести правило 9) n° **754**: это станет ясным из рассмотрений следующего n°.

761. Сведе́ние к варианте. Во всех конкретных случаях, когда мы сталкивались с понятием предела, до сих пор оказывалось возможным в некотором смысле свести вопрос к пределу варианты. Эта возможность выражения понятия предела на «языке последовательностей» играла важную роль в предыдущем изложении. Исследуем

теперь, как обстоит дело в общем случае упорядоченной переменной $x = x_P$.

С этой целью введем понятие конфинальной подпоследовательности для данного упорядоченного множества $\mathcal{P} = \{P\}$. Так мы будем называть последовательность

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{4}$$

элементов, извлеченных из $\mathcal{P}$, если выполнено следующее условие: какой бы элемент P' из $\mathcal{P}$ ни взять, элементы P_n для достаточно больших номеров оказываются следующими за P':

$$P_n \succ P' \qquad (\text{для } n > N).$$

Если переменная x упорядочена с помощью «пометок» P из $\mathcal{P}$, то, при наличии конфинальной подпоследовательности (4) для множества $\mathcal{P}$, соответствующую извлеченную из $\mathcal{X}$ последовательность значений x

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{5}$$

где $x_n = x_{P_n}$, будем называть конфинальной подпоследовательностью для $\mathcal{X} = \{x\}$.

Прежде всего *встает вопрос о самом существовании хоть одной подпоследовательности* (4), *конфинальной для* $\mathcal{P}$, *или, что то же, подпоследовательности* (5), *конфинальной для* $\mathcal{X}$.

Нужно сказать, что во всех случаях, когда упорядочивание множества $\mathcal{P}$ осуществляется с помощью некоторого числового параметра t (как это разъяснено в предыдущем n°), построение подобной подпоследовательности не представляет труда: взяв последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to 0$ так, чтобы все множества $\mathcal{P}_{t_n}$ были непусты, выберем из каждого $\mathcal{P}_{t_n}$ по элементу P_n: составленная из них последовательность $\{P_n\}$ очевидно и будет искомой.

В общем случае, однако, для упорядоченного множества $\mathcal{P} = \{P\}$ может и не существовать ни одной конфинальной подпоследовательности.

Рассмотрим, для примера, множество $\mathcal{R} = \{R\}$ различных разбиений данного промежутка $[a, b]$ на конечное число частей*, причем упорядочивание этого множества произведем по правилу 9) n° **754**. Допустим, рассуждая от противного, что для $\mathcal{R}$ существует конфинальная подпоследовательность

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

разбиений. Каждому R_n отвечает конечный набор точек деления. Легко построить такой промежуток $[a_1, b_1]$ $(a < a_1 < b_1 < b)$, чтобы в нем не лежала ни одна точка деления из R_1. Затем построим про-

* Эти R, как указывалось, могут служить «пометками», например, для сумм Дарбу некоей функции, определенной в $[a, b]$.

межуток $[a_2, b_2]$ $(a_1 < a_2 < b_2 < b_1)$, свободный от точек деления R_2, и т. д. до бесконечности. На n-й стадии окажется построенным промежуток $[a_n, b_n]$ $(a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1})$, в котором не содержится точек деления R_n. Если озаботиться при этом, чтобы было $b_n - a_n \to 0$, то, по лемме о вложенных промежутках [38], найдется единственная точка $c = \lim a_n = \lim b_n$, которая принадлежит всем промежуткам $[a_n, b_n]$. Эта точка, очевидно, не совпадает ни с какой точкой деления ни одного R_n. Если взять теперь любое разбиение R' промежутка $[a, b]$, в котором среди точек деления фигурирует c, то по правилу 9) **754** ни одно R_n не может считаться следующим за R', вопреки определению конфинальной подпоследовательности. Это противоречие и доказывает, что на деле такой подпоследовательности нет.

[Отсюда-то, между прочим, и следует, что указанный способ упорядочивания множества $\mathscr{R} = \{R\}$ не поддается параметризации в смысле предыдущего n°!]

Предположим теперь, что множество «пометок» $\mathscr{P}$, а с ним и область изменения $\mathscr{X}$ упорядоченной переменной x, вообще содержит конфинальные подпоследовательности. В этом случае (и — понятно — только в этом случае) вопрос о пределе переменной x обычным образом сводится к вопросу о пределе варианты:

для того чтобы переменная x имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы к этому пределу стремилась каждая варианта x_n, пробегающая конфинальную подпоследовательность для $\mathscr{X}$.

Действительно, если $x \to a$ (где мы, для определенности, предполагаем a конечным), то при любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|x_P - a| < \varepsilon, \text{ лишь только } P \succ P_\varepsilon.$$

Но если взята любая конфинальная подпоследовательность (4), то для достаточно больших n, по определению, будет $P_n \succ P_\varepsilon$, так что

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| < \varepsilon.$$

Это и значит, что варианта $x_n \to a$.

Обратно, пусть каждая такая варианта стремится к a. Для того чтобы доказать, что тогда $x \to a$, допустим противное: для некоторого $\varepsilon > 0$, какое бы ни взять P' из $\mathscr{P}$, найдется $P \succ P'$ такое, что $|x_P - a| \geqslant \varepsilon$. Возьмем какую-нибудь конкретную конфинальную для $\mathscr{P}$ подпоследовательность $\{P'_n\}$. Согласно сказанному, по каждому P'_n найдется в $\mathscr{P}$ элемент $P_n \succ P'_n$, для которого

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| \geqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Легко показать, что и подпоследовательность $\{P_n\}$ будет конфинальной для $\mathscr{P}$, а значит подпоследовательность $\{x_n\}$ — конфинальной для $\mathscr{X}$, а тогда предыдущее неравенство противоречит допущению.

762. Наибольший и наименьший пределы упорядоченной переменной. Рассмотрим упорядоченную переменную x, значения которой

снабжены «пометками» P из $\mathscr{P}$. При любом P составим множество $\mathscr{X}_P$ из тех значений x, которые следуют за x_P, т. е. отвечают «пометкам» $P' \succ P$, и найдем его точные границы

$$\sup \mathscr{X}_P \text{ и } \inf \mathscr{X}_P$$

(которые могут оказаться и бесконечными). Каждая из них является упорядоченной переменной с пометками P и притом первая — монотонно убывающей, а вторая — монотонно возрастающей (в смысле n° **758**). В таком случае, по теореме о монотонной переменной, существуют определенные (конечные или нет) пределы

$$M^* = \lim\ (\sup\ \mathscr{X}_P)\ M_* = \lim\ (\inf\ \mathscr{X}_P)^*. \tag{6}$$

Их, в общем случае, и называют, соответственно, наибольшим или наименьшим пределом переменной x и пишут

$$M^* = \overline{\lim}\, x,\ M_* = \underline{\lim}\, x.$$

Равенство этих пределов есть условие, необходимое и достаточное для существования предела переменной x в обычном смысле [**755**].

Действительно, если существует конечный предел

$$a = \lim x \tag{7}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая «пометка» P_ε, что

$$a - \varepsilon < x_P < a + \varepsilon \text{ для } P \succ P_\varepsilon. \tag{8}$$

Тогда и

$$a - \varepsilon \leqslant \inf \mathscr{X}_{P_\varepsilon} \leqslant M_* \leqslant M^* \leqslant \sup \mathscr{X}_{P_\varepsilon} \leqslant a + \varepsilon,$$

так что, ввиду произвольности ε,

$$M^* = M_* = a.$$

Обратно, если имеет место это равенство (при a конечном), то, ввиду (6), снова по $\varepsilon > 0$ найдется такое P_ε, что

$$a - \varepsilon < \inf \mathscr{X}_{P_\varepsilon} \leqslant \sup \mathscr{X}_{P_\varepsilon} < a + \varepsilon,$$

так что выполняется (8), а отсюда следует (7).

Предоставляем читателю провести рассуждения для случая $a = \pm \infty$.

Числа M^* и M_*, в случае их конечности, могут быть охарактеризованы их свойствами, которые вполне аналогичны свойствам I и II, изученным в **42**. Для примера остановимся на M^*.

---

* То обстоятельство, что рассматриваемые переменные могут принимать и несобственные значения $\pm \infty$, не создает затруднений.

Если взять по произволу число $\varepsilon > 0$ и «пометку» P_0, то существует такое $P_\varepsilon \succ P_0$, что

$$M^* - \varepsilon < \sup \mathscr{X}_{P_\varepsilon} < M^* + \varepsilon.$$

Отсюда, по определению точной верхней границы, следует

I свойство числа M^*: *для всех $P \succ P_\varepsilon$ будет*

$$x_P < M^* + \varepsilon.$$

II свойство числа M^*: ***найдется хоть одно значение** $x_{P'}$ (где $P' \succ P_0$), **такое, что***

$$x_{P'} > M^* - \varepsilon.$$

Пусть теперь множество $\mathscr{P} = \{P\}$ допускает конфинальные подпоследовательности (4), которым отвечают конфинальные для $\mathscr{X}$ подпоследовательности (5) значений нашей переменной. Если какая-либо из таких последовательностей имеет предел, то его называют частичным пределом переменной x [ср. **40** и **59**].

В этом случае можно доказать, что наибольший и наименьший пределы M^* и M_*, определенные выше, являются в то же время, соответственно, наибольшим и наименьшим из всех частичных пределов переменной x [как и в **40** или **59**].

Действительно (если снова ограничиться наибольшим пределом в предположении его конечности), из свойства I сразу ясно, что ни один частичный предел не может превзойти M^*. Для того чтобы построить конфинальную для $\mathscr{X}$ подпоследовательность (5), стремящуюся к M^* (и тем показать, что M^* само служит частичным пределом), мы исходим наперед из некоторой подпоследовательности

$$P'_1,\ P'_2, \ldots,\ P'_n, \ldots,$$

конфинальной для $\mathscr{P}$. А затем, с помощью свойств I и II [ср. **40**], индуктивно строим подпоследовательность (4) так, чтобы, во-первых, было

$$P_n \succ P'_n$$

(так что и (4) будет конфинальной для $\mathscr{P}$!) и, во-вторых, чтобы $x_n = x_{P_n}$ удовлетворяло двойному неравенству

$$M^* - \varepsilon_n < x_n < M^* + \varepsilon_n,$$

где ε_n — произвольно взятая положительная варианта, стремящаяся к 0. Очевидно, последовательность (5), конфинальная для $\mathscr{X}$, будет иметь своим пределом M^*.

Можно указать еще один пример наибольшего и наименьшего пределов из уже знакомой читателю области. Так, очевидно, верхний и нижний интегралы Дарбу I^* и I_* [**296, 301**] являются, соответственно, наибольшим и наименьшим пределами для интегральной суммы (суммы Римана) $\sigma = \sum f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Фихтенгольц Григорий Михайлович

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
ТОМ III

Редактор *Г. П. Акилов* Техн. редактор *Р. Г. Польская*
Корректор *К. А. Ланская*

Сдано в набор 20/X 1959 г. Подписано к печати 12/III 1960 г. Формат бумаги 60×92¹/₁₆.
Печ. л. 41. Уч.-изд. л. 43,17. Тираж 40 000 экз. Цена книги 13 р. 95 к.
Заказ № 1806.

Государственное издательство физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский пр., 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической промышленности, Типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская, 26.


цѣн. 1 р. 40 к.


1 р. 75 к.